Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Код и дизайн, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:51:32

Код и дизайн

© 1997 г. В. А. Юдин

Исследуется взаимосвязь между кодом и дизайном на сфере. Рассматриваются две экстремальные задачи для алгебраических многочленов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 9301105, и ISF MC-5000.

Пусть $\mathbf{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ — скалярное произведение векторов x и y , $|x| = \sqrt{xx}$, и $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$.

Для произвольного конечного множества W , $W \subset S^{n-1}$, рассмотрим две величины.

Рассматривая W как код, введем кодовое расстояние $d = d(W)$ как минимальное расстояние между точками, полагая

$$d = d(W) = \min_{x, y \in W, x \neq y} |x - y|.$$

Наряду с кодовым расстоянием удобно использовать величину

$$\tau = \tau(W) = \max_{x, y \in W, x \neq y} xy,$$

которая связана с кодовым расстоянием очевидным равенством

$$d^2 = 2(1 - \tau).$$

Рассматривая W как дизайн, введем порядок дизайна $s = s(W)$ как наибольшее число s , $s \in \mathbf{N}$, для которого кубатурная формула

$$\frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{|W|} \sum_{x \in W} f(x), \quad |W| = \sum_{x \in W} 1 \quad (1)$$

точна для любого алгебраического многочлена n переменных степени s (степень монома $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$ определяется суммой показателей $s = s_1 + \dots + s_n$).

В последние годы в теории кодирования активно используются аналитические методы, в которых не последнюю роль играют экстремальные свойства многочленов. Так были получены оценки сверху мощности кодов $|W|$ через кодовое расстояние и оценки снизу мощности дизайна через его порядок для произвольных размерностей. Эти результаты общеизвестны [1–4].

Цель настоящей работы состоит в исследовании взаимосвязи между $\tau = \tau(W)$ ($d = d(W)$) и $s = s(W)$. Рассмотрим один пример. Пусть W — дизайн порядка s , ρ

— элемент группы вращений $SO(n)$ такой, что $\rho x x \geq \cos \alpha$ для всех $x \in S^{n-1}$, где α — достаточно малый угол.

Рассмотрим новое множество

$$W_1 = W \cup \rho W, \quad \rho W = \{x \in S^{n-1} : \rho^{-1}x \in W\},$$

вращение ρ подберем так, чтобы $W \cap \rho W = \emptyset$. Тогда равенство

$$\frac{1}{|W_1|} \sum_{x \in W_1} f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|W|} \sum_{x \in W} f(x) + \frac{1}{|W|} \sum_{x \in \rho W} f(x) \right\} = \frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x) dx$$

остаётся справедливым для любого многочлена степени s , поскольку интеграл по сфере инвариантен относительно замены переменной $\rho x = y$. Следовательно, W_1 является дизайном порядка s , а его кодовое расстояние не превосходит $2(1 - \cos \alpha)$. Этот пример показывает, что конечное множество может быть плохим кодом и хорошим дизайном.

Рассмотрим противоположный вопрос: определить самый хороший код среди дизайнов заданного порядка s . Как оценить сверху d (снизу τ) через s ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим экстремальную задачу: среди всех алгебраических многочленов $h_s(t)$ степени s одного переменного t , удовлетворяющих условиям

$$h_s(1) = 0, \quad \int_{-1}^1 h(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt = 0,$$

определить наибольшее число λ , $-1 < \lambda < 1$, так, чтобы

$$h(t) \geq 0, \quad -1 \leq t < \lambda.$$

Точное решение этой экстремальной задачи позволяет получить оценку снизу для τ через наибольшие нули многочленов Якоби. Для малых степеней полученные оценки приведем в виде таблицы:

s	1	2	3	4	5
τ	-1	$-1/n$	0	$(\sqrt{n+3}-1)/(n+2)$	$1/\sqrt{n+2}$

В ряде случаев они оказываются точными.

Второй вопрос: на S^{n-1} задан τ -код W (код с характеристикой τ), каким дизайном он является?

Для любого τ нетрудно сконструировать множество W , являющееся τ кодом, но не являющееся дизайном даже первого порядка. Будем рассматривать экстремальную задачу: среди множества τ кодов определить дизайн самого большого порядка. Этот вопрос приводит к новой экстремальной задаче для алгебраических многочленов. Пусть $\{C_\nu(t)\}$ — ортогональная система многочленов Гегенбауэра. Среди всех многочленов $h_s(t)$ степени s , удовлетворяющих условиям

$$\int_{-1}^1 h_s(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt = 0, \quad \int_{-1}^1 h_s(t)C_\nu(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt \geq 0, \quad \nu = 1, \dots, s,$$

требуется найти такой многочлен, чтобы он был неотрицательным на отрезке $[-1, \tau]$ для наибольшего возможного числа τ . Решение этой задачи позволяет получить

оценку снизу порядка сферического дизайна s через τ . К сожалению полного ответа на этот вопрос автором не получено (у предполагаемого экстремального многочлена не доказана положительность его коэффициентов Фурье).

Предварительно дадим простые условия на скалярные произведения $x^{(k)} x^{(l)}$ точек $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ и веса $\{p_k\}_{k=1}^N$, при которых справедлива кубатурная формула

$$\frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \sum_{k=1}^N p_k f(x^k), \quad \sum_{k=1}^N p_k = 1, \quad (2)$$

для любого многочлена степени s . Будем использовать аппарат гармонических многочленов, применяемый в математической физике [5]. Пусть $C_k^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра, $Z_k(x)$ — однородный гармонический многочлен порядка k ,

$$Y_k(x) = Z_k(x)|_{S^{n-1}}$$

— сферическая гармоника порядка k . Предположим справедливость (2) для гармонических многочленов порядка s . Представим произвольный многочлен $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в виде суммы однородных:

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_s(x).$$

Из представления Гаусса

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \left(\frac{|x|}{2} \right)^2 Z_{k-2j}(x)$$

закключаем, что на сфере S^{n-1} любой многочлен может быть представлен в виде суммы сферических гармоник. Значит, выполнение (2) для сферических гармоник степени, не превосходящей s , гарантирует выполнение (2) для любого многочлена степени s . Из формулы Лапласа [5]

$$Y_j(x) = \frac{n+2j-2}{n-2} \frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} Y_j(y) C_j^{(n-2)/2}(xy) dy, \quad (3)$$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^N p_k Y_j(x^{(k)}) = 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

как только

$$\sum_{k=1}^N p_k C_j^{(n-2)/2}(x^{(k)} y) \equiv 0, \quad y \in S^{n-1}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4)$$

Поскольку среднее значение по сфере S^{n-1} от сферической гармоники $Y_j(x)$, $j \in \mathbb{N}$, равно нулю [5], из тождеств (4) вытекает (2). Таким образом, W есть дизайн порядка s , если кубатурная формула (1) точна для зональных сферических гармоник степени, не превосходящей s .

Возведем тождества (4) в квадрат и проинтегрируем по сфере. Полагая в (3)

$$Y_j(x) = C_j^{(n-2)/2}(ax),$$

находим, что

$$\sum_{k,l=1}^N p_k p_l C_j^{(n-2)/2}(x^{(k)} x^{(l)}) = \frac{n+2j-2}{n-2} \frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left| \sum_{k=1}^N p_k C_j^{(n-2)/2}(yx^{(k)}) \right|^2 dy. \quad (5)$$

Значит, для справедливости (2) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{k,l=1}^N p_k p_l C_j^{(n-2)/2}(x^{(k)} x^{(l)}) = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (6)$$

В частности, при равных весах p_k получаем эквивалентное определение дизайна.

Через $p_k^{\alpha,\beta}(t)$ обозначим многочлены Якоби [6]. Положим

$$h_s(t) = \begin{cases} (p_q^{(n-1)/2, (n-3)/2}(t))^2 (1-t)(t_1-t)^{-1}, & s = 2q, \\ (p_q^{(n-1)/2, (n-1)/2}(t))^2 (1-t^2)(t_1-t)^{-1}, & s = 2q+1, \end{cases} \quad (7)$$

где $\{t_1, \dots, t_s\}$ — множество нулей (без $t = 1$) $h_s(t)$, расположенных в порядке убывания.

Теорема 1. Пусть W — дизайн порядка s , $s \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\{x, y\}_{x, y \in W, x \neq y} \subset \{t_1, \dots, t_s\},$$

либо существует пара различных $x, y \in W$, для которых $xy > t_1$.

Доказательство. Разложим $h_s(t)$ по системе Гегенбауэра на $(-1, 1)$:

$$h_s(t) = \sum_{\nu=0}^s \hat{h}_\nu C_\nu^{(n-2)/2}(t).$$

Покажем, что нулевой коэффициент Фурье равен нулю. Пусть вначале s чётно, тогда с точностью до нормированного множителя

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \int_{-1}^1 h_s(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \\ &= \int_{-1}^1 (p_q^{(n-1)/2, (n-3)/2}(t)) (p_q^{(n-1)/2, (n-3)/2}(t) (t_1-t)^{-1}) (1-t)^{(n-1)/2} (1+t)^{(n-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Многочлен, стоящий во второй скобке, имеет степень $q-1$, поэтому из условия ортогональности многочленов Якоби разных порядков следует, что $\hat{h}_0 = 0$. Аналогично из равенства

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \int_{-1}^1 h_s(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \\ &= \int_{-1}^1 (p_q^{(n-1)/2, (n-1)/2}(t)) (p_q^{(n-1)/2, (n-1)/2}(t) (t_1-t)^{-1}) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \end{aligned}$$

вытекает, что $\hat{h}_0 = 0$ и при s нечетном. Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{x,y \in W} h_s(xy).$$

Так как W — дизайн порядка s и нулевой коэффициент многочлена (7) равен нулю, из (6) и (8) находим, что

$$I = \sum_{\nu=0}^s \hat{h}_\nu \sum_{x,y \in W} C_\nu^{(n-2)/2}(xy) = 0.$$

С другой стороны, $h_s(1) = 0$ и $h_s(t)$ неотрицателен на отрезке $[-1, t_1]$. Значит, если все скалярные произведения меньше или равны t_1 , то они должны совпадать с множеством нулей $h_s(t)$. В противном случае, для некоторой пары векторов $x, y \in W$ в точке xy многочлен $h_s(t)$ должен быть отрицательным, т.е. $xy > t_1$. Теорема доказана.

При малых s приведем множества нулей $h_s(t)$:

$$\begin{aligned} s = 2 : & \quad \{-1/n\}, \\ s = 3 : & \quad \{-1, 0\}, \\ s = 4 : & \quad \{\pm\sqrt{n+3} - 1/n + 2\}, \\ s = 5 : & \quad \{-1, \pm 1/\sqrt{n+2}\}. \end{aligned}$$

Многочлен (7) является решением экстремальной задачи, которую сформулируем в общем виде. Пусть $\{p_k(t)\}, \{Q_k(t)\}, \{R_k(t)\}$ — ортогональные системы многочленов относительно $d\sigma(t), (1-t)d\sigma(t), (1-t^2)d\sigma(t)$ на интервале $(-1, 1)$. Через $t_j(P_k), t_j(Q_k), t_j(R_k), j = 1, \dots, k$, обозначим нули многочленов P_k, Q_k, R_k , расположенные в порядке убывания.

Задача I. Среди всех алгебраических многочленов $h_s(t)$ степени s , удовлетворяющих условиям

$$\int_{-1}^1 h_s(t) d\sigma(t) = 0, \quad h_s(1) = 0,$$

найти

$$A_s(\sigma) = \sup_{h_s} \{\lambda : h_s(t) \geq 0, -1 \leq t \leq \lambda\}.$$

Теорема 2. Для любого $s \in \mathbb{N}$

$$A_s(\sigma) = \begin{cases} t_1(Q_q), & q = s/2, \quad s \text{ четно}, \\ t_1(R_q), & q = (s-1)/2, \quad s \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство. Для оценки снизу рассмотрим многочлены

$$h_s(t) = \frac{Q_q^2(t)(1-t)}{t_1(Q_q) - t}, \quad h_s(t) = \frac{R_q^2(t)(1-t^2)}{t_1(R_q) - t}$$

соответственно для s четного и нечетного. Очевидно, что $h_s(t)$ на $(-1, 1)$ имеет единственную смену знака в первом нуле и $h_s(1) = 0$. Нулевой коэффициент Фурье $h_s(t)$ по системе $P_k(t)$ равен нулю, что устанавливается так же, как и в теореме 1. Следовательно, $A_s(\sigma) \geq t_1(Q_q), t_1(R_q)$ при четном и нечетном s соответственно.

Найдем оценку сверху. Разберем оба случая по очереди. Пусть вначале $s = 2q$ четно. Допустим противное: существует многочлен h степени $2q$, удовлетворяющий условиям задачи и неотрицательный на отрезке $[-1, \lambda]$ с $\lambda > t_1(Q_q) = t_1$. Тогда из условий задачи находим, что

$$\int_{-1}^1 \frac{h(t)}{1-t} (1-t) d\sigma(t) = \int_{-1}^1 h(t) d\sigma(t) = 0,$$

но $h(t)(1-t)^{-1}$ — многочлен степени $2q-1$, следовательно, из квадратурной формулы Гаусса [6] находим, что с положительными коэффициентами A_j

$$\sum_{j=1}^q A_j h(t_j(Q_q))(1-t_j)^{-1} = 0.$$

Так как $h(t)$ неотрицателен на интервале, содержащем нули t_j , они являются для $h(t)$ по крайней мере двойными нулями. Получаем, что многочлен $h(t)(1-t)^{-1}$ степени $2q-1$ имеет $2q$ нулей. Получено противоречие.

Пусть $s = 2q+1$ нечетно. Снова допустим противное: существует многочлен h степени $2q+1$, удовлетворяющий условиям задачи, такой, что

$$h(t) \geq 0, \quad -1 \leq t \leq \lambda, \quad \lambda > t_1(R_q).$$

Тогда $h(t)(1-t)^{-1}$ — также неотрицательный многочлен степени $2q$ на $[-1, \lambda]$. По теореме Маркова-Люкача [6] он представим в виде

$$h(t)(1-t)^{-1} = (1+t)(\lambda-t)A_{q-1}^2(t) + B_q^2(t),$$

где $A_{q-1}(t), B_q(t)$ — алгебраические многочлены степени $q-1$ и q . Из условий задачи и квадратурной формулы Гаусса находим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \frac{h(t)}{1-t} (1-t) d\sigma(t) = \int_{-1}^1 ((1+t)(\lambda-t)A_{q-1}^2(t) + B_q^2(t))(1-t) d\sigma(t) \\ &\geq \int_{-1}^1 (\lambda-t)A_{q-1}^2(t)(1-t^2) d\sigma(t) = \sum_{j=1}^q A_j(\lambda-t_j(R_q))A_{q-1}^2(t_j(R_q)). \end{aligned}$$

Так как числа $A_j, \lambda - t_j(R_q), j = 1, \dots, q$, положительны,

$$A_{q-1}(t_1(R_q)) = \dots = A_{q-1}(t_q(R_q)) = 0,$$

что возможно лишь для $A_{q-1} \equiv 0$. Значит выполняется равенство

$$h(t) = (1-t)B_q^2(t),$$

но в этой ситуации выполнение первого условия задачи очевидно невозможно. Получено противоречие. Теорема 2 доказана.

Задача II. Среди всех алгебраических многочленов $h_s(t)$ степени s , удовлетворяющих условиям

$$\hat{h}_0 = 0, \quad \hat{h}_\nu \geq 0, \quad \nu = 1, \dots, s, \quad h(t) = \sum_{\nu=0}^s \hat{h}_\nu P_\nu(t),$$

найти

$$B_s(\sigma) = \sup_{h_s} \{ \lambda : h_s(t) \geq 0, -1 \leq t \leq \lambda \}.$$

Близкая по постановке задача из гармонического анализа рассмотрена в [7]. В качестве

$$P_\nu(t) = C_\nu^{(n-2)/2}(t) / C_\nu^{(n-2)/2}(1)$$

возьмем нормированные многочлены Гегенбауэра. Пусть многочлен удовлетворяет условиям задачи II и W есть τ -код с $\tau = B_s(\sigma)$, $d\sigma = (1 - t^2)^{(n-3)/2} dt$. Тогда

$$I = \sum_{x, y \in W} h(xy) \geq |W| h(1); \quad (8)$$

с другой стороны, используя положительность коэффициентов, находим, что

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\nu=1}^s \hat{h}_\nu \sum_{x, y \in W} P_\nu(xy) \leq \max_{1 \leq \nu \leq s} \sum_{x, y \in W} P_\nu(xy) \sum_{\nu=1}^s \hat{h}_\nu \\ &= h(1) \max_{1 \leq \nu \leq s} \sum_{x, y \in W} P_\nu(xy). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем, что

$$\max_{1 \leq \nu \leq s} \sum_{x, y \in W} P_\nu(xy) \geq |W|. \quad (10)$$

В силу тождеств (6) находим, что τ -код с $\tau = B_s(\sigma)$ не является дизайном порядка s . Аналогично показывается, что для $B_s(\sigma)$ кода кубатурная формула (2) с произвольными положительными весами неточна. Отметим, что оценивая сверху интеграл из (5), находим, что

$$\frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left| \sum_{x \in W} P_\nu(xy) \right|^2 dy \leq \max_{y \in S^{n-1}} \left| \sum_{x \in W} P_\nu(xy) \right|^2.$$

Из (10) получаем оценку

$$\max_{1 \leq \nu \leq s} \max_{y \in S^{n-1}} \left| \sum_{x \in W} P_\nu(xy) \right| \geq c |W|^{1/2}$$

с некоторой константой c , зависящей лишь от s и n .

Решение задачи II (даже в частном случае многочленов Гегенбауэра) автору неизвестно. При четном $s = 2q$ нетрудно догадаться, что экстремальный многочлен должен иметь вид

$$h(t) = P_{q+1}^2(t)(t - t_1)^{-1}(t - t_2)^{-1}$$

и значит,

$$B_{2q}(\sigma) = t_2(P_{q+1}).$$

Мы установим лишь оценку сверху для четных s , правда при предположениях, более общих, чем предположения задачи II.

Теорема 3. Пусть нетривиальный алгебраический многочлен $h(t)$ степени $2q$ удовлетворяет условиям

$$(1) \int_{-1}^1 h(t) d\sigma(t) = 0,$$

$$(2) \int_{-1}^1 th(t) d\sigma(t) \geq 0,$$

$$(3) h(t) \geq 0, -1 \leq t \leq \lambda.$$

Тогда

$$\lambda \leq t_2(P_{q+1}).$$

Доказательство. Предположим противное: найдется многочлен $h(t)$ степени $2q$, наибольшая смена знака которого (она существует из-за условия 1) больше $t_2(P_{q+1})$. Рассмотрим вначале случай $\lambda \in [t_1, 1]$. Тогда из квадратурной формулы Гаусса и условия 1

$$\int_{-1}^1 h(t) d\sigma(t) = \sum_{j=1}^{q+1} A_j h(t_j) = 0 \quad (11)$$

вытекает, что

$$h(t_1) = \dots = h(t_{q+1}) = 0.$$

Получается, что у $h(t)$ имеется по крайней мере $2q+1$ нуль ($2q+2$ в случае $\lambda > t_1$), а его степень $2q$. Получено противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда наибольшая смена знака $\lambda \in (t_2, t_1)$. Если $h(t_1) > 0$, то из формулы (11) снова следует противоречие, поскольку $h(t)$ имеет q двойных нулей $t_2, \dots, t_{q+1}$ и нуль λ . Поэтому считаем, что $h(t_1) \leq 0$. Рассмотрим новый многочлен $h(t)(\lambda - t)$ степени $2q+1$. Из квадратурной формулы Гаусса и условий 1 и 2 находим, что

$$\sum_{j=1}^{q+1} A_j h(t_j)(\lambda - t_j) = \int_{-1}^1 h(t)(\lambda - t) d\sigma(t) \leq 0. \quad (12)$$

Все слагаемые в левой части (12) неотрицательны, значит, они равны нулю.

Используя положительность h на интервале $(-1, \lambda)$, получаем, что многочлен $h(t)$ имеет q двойных нулей $t_2, \dots, t_{q+1}$ и еще нуль в точке t_1 . В итоге у $h(t)$ имеется не менее $2q+1$ нулей, получено противоречие. Теорема доказана.

Список литературы

1. Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы*. Т. 1, 2. Мир, Москва, 1990.
2. Delsarte P., Goethals J.-M., Seidel J. J. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata* (1976) **6**, 363–388.
3. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения. *Проблемы киберн.* (1983) **40**, 43–110.
4. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода. *Проблемы передачи информ.* (1980) **16**, №3, 13–30.
5. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных форм*. Наука, Москва, 1974.
6. Сеге Г. *Ортогональные многочлены*. Физматгиз, Москва, 1962.
7. Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually-positive functions with zero integral. *SIAM J. Math. Anal.* (1983) **14**, №2, 249–252.

Статья поступила 04.01.1995.