Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Хакимуллин, Н. Ю. Энатская, Предельные теоремы для числа пустых ячеек, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 120–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:34:41

Предельные теоремы для числа пустых ячеек

© 1997 г. Е. Р. Хакимуллин, Н. Ю. Энатская

Рассматривается равновероятная схема размещения n комплектов частиц, вообще говоря, различных размеров по N ячейкам. При $N \rightarrow \infty$ и различных соотношениях между параметрами схемы изучается асимптотическое поведение числа пустых ячеек среди M выделенных ячеек после размещения n комплектов частиц. Получены интегральная и локальная предельные теоремы о сходимости к нормальному распределению, а также предельные теоремы пуассоновского типа. Во всех случаях дается оценка скорости сходимости.

1. Постановка задачи

По N ячейкам, среди которых выделено M ячеек, $M \leq N$, независимо и последовательно размещают n комплектов частиц размеров $m_1, \dots, m_n$ так, что все частицы i -го комплекта попадают в разные ячейки и все $C_N^{m_i}$ возможных размещений i -го комплекта равновероятны, $i = 1, 2, \dots, n$.

Изучаются предельные при $N \rightarrow \infty$ распределения случайной величины $\mu_0 = \mu_0(n, M)$, равной числу пустых ячеек среди M выделенных ячеек после размещения n комплектов частиц. При $N \rightarrow \infty$ и $m_1 = m_2 = \dots = m$ и некоторых соотношениях между параметрами схемы в [1] и [2] найдены предельные распределения случайной величины μ_0 и приведены оценки скорости сходимости к этим предельным распределениям. При $N \rightarrow \infty$ и $M = N$ в [3] получены интегральная и локальная предельные теоремы о сходимости к нормальному распределению и пуассоновские предельные теоремы с оценками скорости сходимости. В настоящей работе результаты статей [1–3] обобщаются на случай $M \leq N$. Специфика ситуации при $M < N$ в отличие от рассмотренной в [3] состоит в том, что число частиц, попавших в выделенные M ячеек после размещения n комплектов частиц является случайным, в то время как в N ячеек попадает $m_1 + \dots + m_n$ частиц.

2. Обозначения и результаты

Для удобства при сопоставлении полученных результатов с результатами работ [1–3] будем в основном использовать обозначения, введенные в этих работах. Не нарушая общности, будем считать, что

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n = m.$$

Пусть

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{N}, & \alpha_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{N^2}, \\ \beta &= \alpha - m/N, & m &= \max_i m_i, \\ \alpha(\theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{N - \theta} = \frac{N\alpha}{N - \theta}, \\ \beta(\theta) &= \frac{N\beta}{N - \theta} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{N - \theta}, & \theta &\in (0, 1), \\ (b)_0 &= 1, & (b)_k &= b(b-1)\dots(b-k+1),\end{aligned}$$

где b и k — целые положительные числа,

$$\begin{aligned}\pi_k(\lambda) &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & \lambda > 0, & \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \rho_\lambda(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}\{\xi = k\} - \pi_k(\lambda)|,\end{aligned}$$

где ξ — целочисленная неотрицательная случайная величина,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, & \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, & A &= \prod_{i=1}^n (N)_{m_i}, \\ R(z) &= \sum_{j=0}^s C_M^j z^j \prod_{i=1}^n (N-j)_{m_i}, & s &= \min_i (M, N-m), \\ S &= 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N-1}\right) \left(1 - \frac{m_i}{N}\right)^{-1}, \\ a &= \frac{1 + (M-1)S}{M}, & \gamma_i &= \frac{m_i}{N-m_i}, & G_{n,k} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}\end{aligned}$$

— симметрический многочлен степени k от n переменных $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, $\mu_0^* = \mu_0(n, N)$
— число пустых ячеек среди N ячеек после размещения n комплектов частиц,
 $\tau = (M-1)/(N-1)$, $Q = M/N$, C — положительная постоянная, как обычно, $\mathbf{E}X$
и $\mathbf{D}X$ обозначают математическое ожидание и дисперсию случайной величины X
соответственно, а $[z]$ — целая часть числа z . Положим также

$$B = N(N-m) \left(1 + \frac{m\tau}{N-m} + \tau G_{n-1,1}\right).$$

Перейдем к изложению результатов.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $C > 0$, что*

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_0 - \mathbf{E}\mu_0}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0}}.$$

Теорема 2. Существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\max_{0 \leq k \leq N-m} \left| \sqrt{D\mu_0} \mathbf{P}\{\mu_0 = k\} - \varphi((k - \mathbf{E}\mu_0)/\sqrt{D\mu_0}) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{D\mu_0}}.$$

Следствие 1. Если параметры $N, n, t_1, \dots, t_n$ меняются так, что $D\mu_0 \rightarrow \infty$, то $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$ и распределение случайной величины $(\mu_0 - \mathbf{E}\mu_0)/\sqrt{D\mu_0}$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами $(0, 1)$ и для случайной величины μ_0 справедлива локальная предельная теорема.

Теорема 3. Если $N - m, N\beta \rightarrow \infty$, $\lambda = \mathbf{E}\mu_0^*Q$, то

$$\rho_\lambda(\mu_0) \leq \lambda \min \left\{ \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{\tau N \alpha}{(N-1)(N-m)} \right), \left(\frac{1 + \tau N \beta}{(N-1)} \right) \exp\{-N\beta/(N-1)\} \right\}. \quad (1)$$

Следствие 2. Если $N - m, N\beta \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то распределение случайной величины μ_0 сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Теорема 4. Если $m/N \rightarrow 0$, $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$, $D\mu_0/\sqrt{\mathbf{E}\mu_0} \rightarrow 0$, $\lambda = \mathbf{E}\mu_0 + M(\alpha - 1)$, $N - m \rightarrow \infty$, $N\beta \rightarrow \infty$, то

$$\rho_\lambda(\mu_0 + M(\alpha - 1)) = O(M\alpha(\alpha^2 - \alpha_2) + M(1 - \tau)\alpha^2 + (D\mu_0)^2/M). \quad (2)$$

Следствие 3. Если $N - m, N\beta \rightarrow \infty$, $m/N \rightarrow 0$, $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$, $D\mu_0 \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$\mathbf{E}\mu_0 + M(\alpha - 1) \rightarrow \lambda$$

и распределение случайной величины $\mu_0 + M(\alpha - 1)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Теорема 5. Если $m/N \rightarrow 1$, $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$, $D\mu_0/\sqrt{\mathbf{E}\mu_0} \rightarrow 0$, $\lambda = M - [mQ] - \mathbf{E}\mu_0$, $N - m, N\beta \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} & \rho_\lambda(M - [mQ] - \mu_0) \\ &= O \left(\frac{\beta(N-m)}{1 - m(1-\tau)/N} \left(\beta - \frac{m(1-\tau)}{N} + \frac{\tau(N-m)}{N(1 - m(1-\tau)/N)} \right) + \frac{(D\mu_0)^2}{N-m} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Следствие 4. Если $N - m, N\beta, \mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$, $D\mu_0 \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$M - [mQ] - \mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \lambda$$

и распределение случайной величины $M - [mQ] - \mu_0$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Замечание 1. При $M = N$ все приведенные выше результаты совпадают с результатами работы [3].

Замечание 2. Пусть $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ и $N \rightarrow \infty$. Тогда ситуация, описанная в следствии 4, невозможна.

Замечание 3. Условия $N - m \rightarrow \infty$ и $N\beta \rightarrow \infty$ необходимы для того, чтобы предельное распределение случайной величины μ_0^* не было сосредоточено на конечном числе значений.

В параграфе 4 будет показано, что в случае $0 < c_1 \leq m/N \leq c_2 < 1$, где c_1, c_2 — положительные постоянные, из условий $N - m, N\beta \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$ следует, что и $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \infty$. А это, в силу следствия 1, означает, что случайная величина μ_0 асимптотически нормальна.

3. О методе доказательства

Рассматриваемая схема является обобщением схем работ [1, 2] на случай $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n = m$ и схемы работы [3] на случай $M < N$.

Наиболее подробно асимптотическое поведение числа пустых ячеек μ_0 изучено при $M = N$ и $m_1 = \dots = m_n = m$ (см. [4–10]). В частности, установлено, что

- если параметры m, n, N меняются так, что $n, N \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}\mu_0 = N(1 - m/N)^n \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то распределение случайной величины μ_0 сходится к распределению Пуассона с параметром λ ;
- если $\mathbf{E}\mu_0, \mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \infty$, то распределение случайной величины $(\mu_0 - \mathbf{E}\mu_0)(\mathbf{D}\mu_0)^{-1/2}$ сходится к нормальному распределению с параметрами $(0, 1)$;
- если $n \rightarrow \infty$ и $C_n^2 m^2 N^{-1} \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то распределение случайной величины $\mu_0 - N + mn$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

В книге [10] исследовалось число пустых ячеек среди отмеченных в классической схеме размещения частиц по ячейкам, были указаны условия сходимости распределения μ_0 к нормальному, пуассоновскому и биномиальному распределениям.

Методы доказательства приведенных результатов различны. В [4] и [5] использовалась аппроксимация равновероятной схемы размещения частиц комплектами схемой независимого размещения отдельных частиц, в [6], [8], [9] использовался метод моментов, а в [10] метод производящих функций. Метод исследования в представляемой работе, как и в [1–3], состоит в использовании факта совпадения распределения с.в. μ_0 с композицией некоторых двухточечных распределений, установленного нами в параграфе 4 настоящей работы. Доказательство теорем и следствий проводится так же, как в [1–3], поэтому мы в основном сохраняем обозначения, стиль изложения и логику рассуждений этих работ.

4. Вспомогательные результаты

Лемма 1. В условиях описанной схемы для $j = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\mu_0)_j = (M)_j \prod_{i=1}^n C_{N-j}^{m_i} / C_N^{m_i}. \quad (4)$$

Доказательство. Доказательство леммы 1 дословно повторяет доказательство леммы 1 из [1] с естественной заменой $(C_{N-j}^m / C_N^m)^n$ на $\prod_{i=1}^n (C_{N-j}^{m_i} / C_N^{m_i})$.

Замечание 4. Из (1) с учетом равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0 &= M \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N}\right), \\ \mathbf{D}\mu_0 &= \mathbf{E}(\mu_0)_2 + \mathbf{E}\mu_0 - (\mathbf{E}\mu_0)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mu_0 &= M(M-1) \prod_{i=1}^n \frac{(N-m_i)(N-m_i-1)}{N(N-1)} \\ &\quad + M \prod_{i=1}^n \frac{N-m_i}{N} - M^2 \left(\prod_{i=1}^n \frac{N-m_i}{N} \right)^2 \\ &= \mathbf{E}\mu_0 \left(1 - M \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N}\right) + (M-1) \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N-1}\right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}z^{\mu_0} = A^{-1}R(z-1).$$

Доказательство. Указанное в лемме представление производящей функции следует из (4), равенства

$$\mathbf{E}C_{\mu_0}^j = \mathbf{E}(\mu_0)_j / j!$$

и цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{E}z^{\mu_0} &= \mathbf{E} \sum_{j=0}^M C_{\mu_0}^j (z-1)^j = \sum_{j=0}^M (z-1)^j C_M^j \prod_{i=1}^n C_{(N-j)}^{m_i} / C_N^{m_i} \\ &= \sum_{j=0}^M (z-1)^j C_M^j \prod_{i=1}^n \frac{(N-j)_{m_i}}{(N)_{m_i}} = \sum_{j=0}^M (z-1)^j C_M^j \prod_{i=1}^n (N-j)_{m_i} / \prod_{i=1}^n (N)_{m_i} \\ &= A^{-1}R(z-1). \end{aligned}$$

Лемма 3. Многочлен $R(z)$ имеет только действительные корни.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 2 из [3]. Очевидно, что, если корни некоторого многочлена $f(z)$ степени n действительны, то действительными являются и все корни многочленов $z^n f(z^{-1})$, $z^j f(z)$, $j = 1, 2, \dots$, $f'(z)$, а следовательно, и многочлена

$$D_j f(z) = z^j \frac{d^j}{dz^j} f(z), \quad j = 1, 2, \dots$$

Для доказательства леммы остается установить справедливость соотношений

$$D_j z^n = (n)_j z^{n-j}, \\ D_{m_1} \dots D_{m_n} (z^{N-M} (1+z)^M) = z^N R(z^{-1}).$$

Первое из них очевидно, а второе следует из равенств

$$\begin{aligned} z^{N-M} (1+z)^M &= \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j}, \\ D_{m_n} (z^{N-M} (1+z)^M) &= z^{m_n} \frac{d^{m_n}}{dz^{m_n}} \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j} \\ &= z^{m_n} \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j-m_n} (N-M+j)_{m_n} \\ &= \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j} (N-M+j)_{m_n}, \\ D_{m_{n-1}} D_{m_n} (z^{N-M} (1+z)^M) &= z^{m_{n-1}} \frac{d^{m_{n-1}}}{dz^{m_{n-1}}} \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j} (N-M+j)_{m_n} \\ &= \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j} (N-M+j)_{m_{n-1}} (N-M+j)_{m_n}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} D_{m_1} D_{m_2} \dots D_{m_n} (z^{N-M} (1+z)^M) &= \sum_{j=0}^M C_M^j z^{N-M+j} \prod_{i=1}^n (N-M+j)_{m_i} \\ &= \sum_{l=0}^M C_M^l z^{N-l} \prod_{i=1}^n (N-l)_{m_i}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

С помощью неравенств

$$\max(0, N(Q - \alpha)) \leq \mu_0 \leq \min(M, N - m)$$

получаем следующее утверждение.

Следствие 5. *Многочлены*

$$F(z) = \mathbf{E}z_0^\mu, \quad F_1(z) = \mathbf{E}z^{M-[mQ]-\mu_0}, \quad F_2(z) = \mathbf{E}z^{\mu_0+M(\alpha-1)}$$

имеют лишь действительные корни.

Лемма 4. *В условиях описанной схемы, если $\mathbf{E}\mu_0 \rightarrow \infty$, $\mathbf{D}\mu_0/\sqrt{\mathbf{E}\mu_0} \rightarrow 0$, то*

$$\mathbf{E}\mu_0 = \frac{1}{a} - \mathbf{D}\mu_0 + O(a(\mathbf{D}\mu_0)^2). \quad (7)$$

Доказательство. Для доказательства (7) установим равенство

$$\mathbf{D}\mu_0 = \mathbf{E}\mu_0 - a(\mathbf{E}\mu_0)^2. \quad (8)$$

Для этого представим обе части (8) как функции от S . Из (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mu_0 &= \mathbf{E}\mu_0 \left(1 - \mathbf{E}\mu_0 + (M-1) \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N-1} \right) \right) \\ &= \mathbf{E}\mu_0 (1 - \mathbf{E}\mu_0 (S - (1-S)/M)). \end{aligned}$$

Правую часть (8) можно представить в виде

$$\mathbf{E}\mu_0 (1 - a\mathbf{E}\mu_0) = \mathbf{E}\mu_0 (1 - \mathbf{E}\mu_0 (S - (1-S)/M)),$$

откуда и следует (8).

Теперь из (8) и условия $\mathbf{D}\mu_0 = o(\sqrt{\mathbf{E}\mu_0})$ следует, что $a\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow 0$. Из (8) находим, что

$$\mathbf{E}\mu_0 = (1 + \sqrt{1 - 4a\mathbf{D}\mu_0})/2a,$$

откуда и получаем (7).

Лемма 5. *Пусть γ обозначает любую из случайных величин μ_0 , $M - [Qt] - \mu_0$, $\mu_0 + M(\alpha - 1)$. Тогда*

$$\rho_{\mathbf{E}\gamma}(\gamma) \leq \mathbf{E}\gamma - \mathbf{D}\gamma. \quad (9)$$

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 3 из [3] и поэтому здесь не приводится.

5. Доказательство теорем и следствий

Доказательство теорем 1 и 2. При доказательстве теорем 1, 2 и следствия 1 отличие исследуемого случая $M \leq N$ от случая $M = N$ рассмотренного в [3], не проявляется. Поэтому доказательство теорем 1, 2 и следствия 1, основанное на совпадении распределения случайной величины μ_0 с распределением суммы независимых двухточечных случайных величин, установленном в леммах 2 и 3, в нашем случае (то есть при $M \leq N$) следует из аналогичных утверждений работы [3] (при $M = N$) и не приводится.

Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 3 из [3] и леммы 8 из [1]. Оно следует из леммы 5 и двух оценок для $\mathbf{D}\mu_0$. Остановимся на их получении. Для этого, применяя теорему о среднем к функции

$$f(x) = (M - x) \prod_{i=1}^n (1 - m_i / (N - x))$$

в выражении (6) для $\mathbf{D}\mu_0$, находим, что

$$\mathbf{D}\mu_0 = \mathbf{E}\mu_0 \left(1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) - \frac{M - \theta}{(N - \theta)^2} \sum_{i=1}^n m_i \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) \right),$$

где $\theta \in (0, 1)$. Используя неравенства

$$\prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) \leq \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) \leq \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{N - \theta} \right\} = \exp \{ -\beta(\theta) \},$$

получаем, что

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) < \exp \{ -\beta(\theta) \},$$

и следовательно,

$$\mathbf{D}\mu_0 > \mathbf{E}\mu_0 \left(1 - \left(1 + \frac{M - \theta}{N - \theta} \beta(\theta) \right) \exp \{ -\beta(\theta) \} \right). \quad (10)$$

Другую оценку для дисперсии получаем, исходя из неравенств

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m_i}{N - \theta} &\leq 1 - \frac{m_i}{N}, \\ \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{m_j}{N} \right) &\leq \frac{N}{N - m} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N} \right), \\ \frac{M - \theta}{(N - \theta)^2} \sum_{i=1}^n m_i \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{m_i}{N - \theta} \right) &\leq \frac{M - \theta}{(N - \theta)^2 (N - m)} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{E}\mu_0 \\ &= \frac{(M - \theta)\alpha(\theta)}{(N - \theta)(N - m)} \mathbf{E}\mu_0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{D}\mu_0 > \mathbf{E}\mu_0 \left(1 - \mathbf{E}\mu_0 \left(\frac{1}{N} + \frac{(M - \theta)\alpha(\theta)}{(N - \theta)(N - m)} \right) \right). \quad (11)$$

Подставив оценки (10) и (11) в (9), получим (1).

Доказательство следствия 2. Из того, что $\alpha \rightarrow \infty$, следует, что и $\beta \rightarrow \infty$, поэтому в условиях следствия получаем, что правая часть (1), которая в этом случае есть $O(\min\{1/N + \alpha\tau/(N - m), (1 + \beta)e^{-\beta}\})$ стремится к нулю, откуда и следует утверждение следствия.

Доказательство теоремы 4. Из неравенств

$$G_{n,1} - G_{n,2}/(N-1) \leq (N-1)S \leq G_{n,1},$$

приведенных в [3], с учетом соотношений

$$\begin{aligned} G_{n,1} &= \frac{m}{N-m} + G_{n-1,1}, & 1 + G_{n,1} &\geq \frac{N}{N-m}, \\ G_{n,2} &= \frac{m}{N-m} G_{n-1,1} + G_{n-1,2}, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{N - m(1 - \tau) + \tau(N - m)G_{n-1,1}}{(N - m)M} \left(1 + O\left(\frac{m\beta + (N - m)^2\beta^2}{B}\right) \right), \\ \frac{1}{a} &= \left(\frac{N - m(1 - \tau) + \tau(N - m)G_{n-1,1}}{(N - m)M} \right)^{-1} \left(1 + O\left(\frac{m\beta + (N - m)^2\beta^2}{B}\right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенства (10) в условиях теорем 4 и 5 при $\mathbf{D}\mu_0 = o(\sqrt{\mathbf{E}\mu_0})$ следует, что $\beta \rightarrow 0$, $\beta^2 \mathbf{E}\mu_0 = O(\mathbf{D}\mu_0)$, а тогда $\alpha \rightarrow 0$, а $B \geq cN^2$, где c — положительная постоянная.

Используя соотношения

$$G_{n,1} = \sum_{i=1}^n \gamma_i = O(\alpha), \quad G_{n,k} = O(\alpha G_{n,k-1}),$$

получаем из (12) и равенства

$$\mathbf{E}\mu_0 = M \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \gamma_i},$$

что $a = O(1/M)$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \mathbf{E}\mu_0 &= M \left(\left(1 + \frac{m\tau}{N-m} + \tau \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \right)^{-1} - \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \gamma_i} \right) + O(\alpha^2) \\ &= M(G_{n,2} + (1 - \tau)G_{n,1})(1 + O(\alpha)) + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив в (7) выражение (13) и соотношение

$$G_{n,2} = \frac{\alpha^2 - \alpha_2}{2}(1 + O(\alpha))$$

из [3], получаем оценку

$$\mathbf{D}\mu_0 = M \left(\frac{\alpha^2 - \alpha_2}{2} + (1 - \tau)G_{n,1} \right) (1 + O(\alpha)) + O(\alpha^2 + (\mathbf{D}\mu_0)^2/M). \quad (14)$$

Заметим, что $\mathbf{E}\mu_0 = Q\mathbf{E}\mu_0^*$. Поэтому оценка для $\mathbf{E}\mu_0$ получается путем пересчета из оценки

$$\mathbf{E}\mu_0^* = N(1 - \alpha + ((\alpha^2 - \alpha_2)/2)(1 + O(\alpha))),$$

приведенной в [3], и имеет вид

$$\mathbf{E}\mu_0 = M(1 - \alpha + ((\alpha^2 - \alpha_2)/2)(1 + O(\alpha))). \quad (15)$$

В условиях теоремы 4

$$\gamma = \mu_0 + M(\alpha - 1), \quad \mathbf{E}\gamma = \mathbf{E}\mu_0 + M(\alpha - 1), \quad \mathbf{D}\gamma = \mathbf{D}\mu_0, \quad (16)$$

поэтому, подставляя (14) и (15) в (16) и далее в (9), получаем требуемое утверждение теоремы.

Доказательство следствия 3. По условию следствия $N \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Поэтому из (14) и (15) следует, что

$$\lambda_1 = \mathbf{E}\mu_0 + M(\alpha - 1) \rightarrow \lambda.$$

Теперь из (2) получаем, что

$$\rho_{\lambda_1}(\mu_0 + M(\alpha - 1)) \rightarrow 0.$$

Поэтому $\rho_{\lambda}(\mu_0 + M(\alpha - 1)) \rightarrow 0$, и следствие доказано.

В частном случае при $M = N$ получаем соответствующие утверждения из [3].

Доказательство теоремы 5. В условиях теоремы из асимптотического разложения, приведенного в [3] для $\mathbf{E}\mu_0^*$, по формуле $\mathbf{E}\mu_0 = Q\mathbf{E}\mu_0^*$ получаем асимптотическое разложение

$$\mathbf{E}\mu_0 = Q(N - m)(1 - \beta + O(\beta^2)). \quad (17)$$

В условиях теоремы $\beta \rightarrow 0$ и вместе с тем $G_{n-1,k} = O(\beta^k)$. Поэтому из (12) и (17) получаем, что $a = O((N - m)^{-1})$ и

$$\frac{1}{a} - \mathbf{E}\mu_0 = \frac{Q(N - m)}{1 - m(1 - \tau)/N} \left(1 - \frac{\tau(N - m)G_{n-1,1}}{N - m(1 - \tau)} + O\left(\beta^2 + \frac{\beta}{N - m}\right) \right). \quad (18)$$

Теперь из (18), (7) и (9) следует доказываемое утверждение.

Доказательство следствия 4. Доказательство совершенно аналогично доказательству следствия 3 с заменой соотношений (14), (15) и (2) соответственно на (17), (18) и (3).

Рассмотрим случай, когда величина m/N отделена от 0 и от 1. Схема анализа здесь аналогична [3]. Предположим, что

$$\limsup \mathbf{D}\mu_0 < \infty. \quad (19)$$

Тогда в силу (7), (18), условий $N - m, N\beta \rightarrow \infty$ и равенства $G_{n-1,1} = \beta(1 + O(\beta))$ получаем, что $\mathbf{D}\mu_0 \rightarrow \infty$, что противоречит предположению (19). Следовательно, $\limsup \mathbf{D}\mu_0 = \infty$. Теперь стандартными рассуждениями (от противного) выводим, что и $\lim \mathbf{D}\mu_0 = \infty$, откуда следует замечание 3.

Список литературы

1. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю. Скорость сходимости распределения времени ожидания к предельному в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. В кн.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1989, с.123–130.
2. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю. Предельные теоремы для времени ожидания в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. В кн.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1990, с.63–68.
3. Ватулин В. А., Михайлов В. Г. Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. *Теория вероятностей и ее применения* (1982) **27**, №4, 684–692.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
5. Севастьянов Б. А. Предельные теоремы в одной схеме размещения частиц по ячейкам. *Теория вероятностей и ее применения* (1966) **11**, №4, 696–700.
6. Михайлов В. Г. Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №1, 155–159.
7. Михайлов В. Г. Оценка скорости сходимости к распределению Пуассона при размещении частиц комплектами. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **22**, №3, 566–674.
8. Михайлов В. Г. Асимптотическая нормальность числа пустых ячеек при размещении частиц комплектами. *Теория вероятностей и ее применения* (1980) **25**, №1, 83–91.
9. Михайлов В. Г. Сходимость к многомерному нормальному закону в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. *Матем. сборник* (1980), **111**, №2, 163–180.
10. Сачков В. Н. *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.

Статья поступила 20.01.1995.