Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Лисовик, ΣTC -порождаемые языки и проблемы относительной эквивалентности, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:31:27

ΣTC -порождаемые языки и проблемы относительной эквивалентности

© 1997 г. Л. П. Лисовик

Доказана разрешимость проблемы эквивалентности для машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой относительно любого входного ΣTC -порождаемого языка. Такие языки порождаются обобщенными конечными преобразователями с конечноповоротными счетчиками над бесконечными размеченными деревьями. Доказана ΣTC -порождаемость многих языков (контекстно-свободных, распознаваемых гнездовыми машинами Тьюринга ограниченного режима и других). Показано, что для последовательностных преобразователей с двумя состояниями неразрешима проблема эквивалентности относительно регулярного языка.

Настоящая работа посвящена рассмотрению проблемы эквивалентности преобразователей относительно входного языка. Эта проблема ранее изучалась в ряде работ [1–8]. В общем виде она может быть сформулирована следующим образом. Даны некоторый класс языков $\mathcal{L}$ и некоторый класс словарных преобразований $\mathcal{B}$. Проблема $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ -эквивалентности имеет такую постановку: по любому языку L из класса $\mathcal{L}$ и преобразователям A_1 и A_2 из класса $\mathcal{B}$, задающим отображения $O(A_i)$, $i = 1, 2$, определить, верно ли равенство $M_1 = M_2$, где $M_i = \{(u, v) \mid (u, v) \in O(A_i), u \in L\}$. Языки из класса $\mathcal{L}$ задаются некоторыми порождающими или распознающими устройствами. Например, $\mathcal{L}$ — класс контекстно-свободных языков, заданных контекстно-свободными грамматиками.

В [1] была доказана разрешимость проблемы $(\mathcal{L}_0, \mathcal{B}_0)$ -эквивалентности, когда $\mathcal{L}_0$ — класс контекстно-свободных языков, а $\mathcal{B}_0$ — класс детерминированных последовательностных преобразователей. Обобщение на случай $(\mathcal{L}_0, \mathcal{B}_1)$ -эквивалентности, где $\mathcal{B}_1$ — класс двусторонних детерминированных конечных преобразователей, получено в [5]. Там же указан ряд других результатов по разрешимости $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ -эквивалентности. В [6] показана разрешимость $(\mathcal{L}_1, \mathcal{B}_2)$ -эквивалентности, где $\mathcal{L}_1$ — класс NPDTOL-языков, а $\mathcal{B}_2$ — класс однозначных двусторонних конечных преобразователей.

В данной работе доказана разрешимость $(\mathcal{L}_i, \mathcal{B}_3)$ -эквивалентности, $i = 2, 3$, где $\mathcal{L}_2$ — класс языков, распознаваемых недетерминированными стековыми автоматами ограниченного режима; $\mathcal{L}_3$ — класс языков, распознаваемых гнездовыми недетерминированными машинами Тьюринга ограниченного режима (с входной лентой и эластичной рабочей лентой); $\mathcal{B}_3$ — класс детерминированных машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой.

На самом деле здесь получены эти и более общие результаты. Введен класс ΣTC -порождаемых языков (класс $\mathcal{L}_4$). Доказана разрешимость $(\mathcal{L}_4, \mathcal{B}_3)$ -эквива-

лентности. Показано, что классы $\mathcal{L}_i$, $i = 2, 3$, входят в класс $\mathcal{L}_4$ и даже в класс ΣT -порождаемых языков (класс $\mathcal{L}_5$). Класс $\mathcal{L}_4$ состоит из языков, порождаемых ΣTC -преобразователями. Последние были введены в [9] и представляют собой обобщенные недетерминированные конечные преобразователи ограниченного режима над бесконечными размеченными деревьями с конечноповоротными счетчиками и выходной лентой. Ряд результатов связан с изучением класса ΣTC -порождаемых языков. ΣTC -преобразователи без счетчиков называются ΣT -преобразователями. Показано, что класс ΣT -порождаемых языков весьма обширный. Он содержит в себе класс контекстно-свободных языков, класс языков, распознаваемых гнездовыми стековыми автоматами ограниченного режима и другие классы. Отметим, что гнездовые стековые автоматы ограниченного режима могут иметь неограниченную степень гнездования. Под руководством автора изучением подклассов класса ΣTC -порождаемых языков в связи с проблемой $(\mathcal{L}, \mathfrak{B})$ -эквивалентности занимался В. А. Канивец (см. [7, 8, 10]). Он показал, что ΣTC -порождаемыми являются векторные языки [11], языки, генерируемые абсолютно параллельными грамматиками [12], простые матричные языки степени $n \geq 1$ [13], языки допускаемые управляемыми МП-автоматами [14], конечноповоротными просмотрными автоматами [3, 15], и другие языки из классов, указанных в [5].

Подход к проблеме $(\mathcal{L}, \mathfrak{B})$ -эквивалентности в [5] и наш подход опираются на близкие по характеру предшествующие работы [9, 16, 17], которые связаны с конечноповоротными счетчиковыми машинами и полулинейными множествами. В [5] проблема $(\mathcal{L}, \mathfrak{B}_1)$ -эквивалентности была решена в форме метатеоремы для абстрактного класса $\mathcal{L}$ при условии, что он эффективно замкнут относительно обратного гомоморфизма и пересечения с регулярным языком и таков, что для любого языка L из класса $\mathcal{L}$ его образ Парика есть эффективно задаваемое полулинейное множество. В данной статье указаны возможности решения проблем $(\mathcal{L}, \mathfrak{B})$ -эквивалентности для подклассов класса ΣTC -порождаемых языков. В конечном счете здесь могут возникать достаточно сложные построения, поэтому изложение результатов ведется от более простых к более сложным с постепенным добавлением новых возможностей и одновременно развитием средств их ΣTC -моделирования. Вначале (после введения исходных определений в §1) особое внимание уделяется в §2 понятию протокола для ΣT -преобразователя, построению ΣT -распознавателя протоколов и описанию в §3 моделирования процесса распознавания языка автоматом с магазинной памятью при помощи процесса порождения этого же языка ΣT -преобразователем. Следующий шаг — моделирование на ΣT -порождаемом языке поведения машины Тьюринга ограниченного режима. При этом обрабатываемое машиной Тьюринга слово w из ΣT -порожденного языка представлено в размеченном дереве в протоколе процесса ΣT -порождения так, что при помощи ΣT -преобразователя может быть промоделировано движение машины Тьюринга по слову w и обработка этого слова. Указатели на направление движения по размеченному дереву при обработке слова w имеются в достаточном количестве в протоколе процесса ΣT -порождения. Все эти процессы удается совместить в конечном счете в одном ΣT -преобразователе. Далее при сохранении аналогичной схемы моделирования доказывается, что и более богатые распознающие устройства (с возможностями стековых автоматов, машин Тьюринга, гнездовых стековых автоматов ограниченного режима) распознают языки, порождаемые ΣT -преобразователями. Класс ΣT -порождаемых языков образует полное абстрактное семейство языков (§3).

В §4 рассматриваются обобщения, связанные с добавлением конечноповорот-

ных счетчиков, введением недетерминированности и выходной полугруппы для преобразователей. Так, например, доказана разрешимость проблемы $(\mathcal{L}_4, \mathcal{B}_4)$ -эквивалентности, где $\mathcal{B}_4$ — класс машин Тьюринга ограниченного режима с выходной полугруппой $S(\Delta)$, являющейся свободным произведением конечного числа конечно определенных коммутативных полугрупп или прямым произведением конечного числа свободных конечно порожденных полугрупп. Эти результаты также основываются на работе [9]. Заметим, что случай, когда выходная полугруппа $S(\Delta)$ есть прямое произведение n свободных полугрупп, дает соответствующие результаты по разрешимости проблемы $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ -эквивалентности для преобразователей с n выходными лентами. При получении обобщений на недетерминированные преобразователи накладываются естественные ограничения (однозначность, конечно-недетерминированность, конечно-неоднозначность). Необходимость таких ограничений связана с неразрешимостью проблемы эквивалентности для последовательностных преобразователей с двухбуквенным входным и однобуквенным выходным алфавитами [18, 19]. Кроме того, неразрешима проблема равенства древоязыков, распознаваемых ΣTC -преобразователями и даже проблема равенства KC -языков, распознаваемых МП-автоматами с одноповоротным счетчиком [20].

Параграф 5 связан с открытым вопросом о разрешимости проблемы $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ -эквивалентности для случая конечных подстановок (последовательностных преобразователей с одним состоянием) относительно входного регулярного языка. Указанная проблема разрешима для конечных подстановок с однобуквенным выходным алфавитом [32]. Этот результат усиливается следующим образом: разрешима проблема включения для конечных подстановок с выходной конечно определенной коммутативной полугруппой относительно входного ΣTC -порождаемого языка. В то же время неразрешима проблема включения для конечных подстановок относительно регулярного языка [29]. Доказательство последнего результата связано с вышеуказанными работами [18, 19] и неразрешимостью проблемы надежности для недетерминированных систем защиты [27].

1. Определения

Полное бинарное дерево D^2 есть множество $\{0, 1\}^*$ всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, называемых также вершинами и связанных ребрами так, что каждая вершина v связана ребром с каждой из вершин $v0, v1$. Пустое слово ε называется корнем дерева D^2 . Отношение $u \preceq v$ означает, что u — левое подслово слова v . Непустое множество $V \subseteq D^2$ называется деревом, если для любых вершин u, v из $u \preceq v$, $v \in V$, следует, что $u \in V$. Оно называется стандартным деревом, если для любого v из $v0 \in V$ следует, что $v1 \in V$, и наоборот. Для конечного стандартного дерева V множество $Q = \{v \mid v \in V, v0 \notin V\}$ называется кроной дерева V . Условимся, что смещение с v на $v0$ есть смещение вверх и влево, а смещение с v на $v1$ есть смещение вверх и вправо.

Выделим специальные символы Z_0 (маркер) и λ (пустой символ). Для любого конечного алфавита Σ назовем Σ -разметкой любую функцию $\mu: \{0, 1\}^* \rightarrow \Sigma$ такую, что $\mu(x) = Z_0 \leftrightarrow x = \varepsilon$ при $Z_0 \in \Sigma$. Если μ есть Σ -разметка, $x \in \Delta^*$, то $\mu(x)$ — метка вершины x . Вместо термина Σ -разметка употребляется термин Σ -дерево. В данной работе в случае, когда речь идет о Σ -разметке, предполагается, что $\{Z_0, \lambda\} \subseteq \Sigma$. Σ -разметка μ называется пустой, если $\mu(\varepsilon) = Z_0$ и $\mu(x) = \lambda$ в остальных случаях.

Множество всех Σ -разметок обозначается через $\mathfrak{M}(\Sigma)$. Для любых Σ -разметки μ , слова $v \in \{0, 1\}^*$ и метки $\sigma \in \Sigma$ положим, что $\mu_{(v, \sigma)}$ — Σ -разметка, $v \downarrow$ — слово, где

$$\mu_{(v, \sigma)}(x) = \begin{cases} \sigma, & \text{при } x = v \wedge x \neq \varepsilon \wedge \sigma \neq Z_0, \\ \mu(x) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$v \downarrow = \begin{cases} u, & \text{при } v \in \{u0, u1\}, \\ \varepsilon, & \text{при } v = \varepsilon. \end{cases}$$

$\Sigma T'$ -преобразователем называется упорядоченная восьмерка

$$A = (K, \Sigma, \Sigma', \Delta, H, Z_0, q^*, q^*),$$

в которой указаны конечные множество состояний K , множество $\Sigma \subseteq \Sigma'$, множество меток Σ' , множество выходных символов Δ , маркер $Z_0 \in \Sigma$, начальное состояние $q_0 \in K$, заключительное состояние $q^* \in K$ и конечное множество команд H вида $q\sigma \rightarrow p\delta aT$, где $q \in K \setminus \{q^*\}$, $\sigma, \delta \in \Sigma'$, $p \in K$, $a \in \Delta \cup \{\varepsilon\}$, $T \in \{D, L, R, S\}$, причем выполняются условия

(a) $\delta = Z_0$, если и только если $\sigma \in Z_0$;

(b) $T \neq D$, если $\Sigma = Z_0$.

Множество $K \times \mathfrak{M}(\Sigma') \times \{0, 1\}^* \times \Delta^*$ называется множеством конфигураций $\Sigma T'$ -преобразователя A . Конфигурация (q, μ, v, z) означает, что управляющая головка $\Sigma T'$ -преобразователя A находится в состоянии q и обозревает вершину v , текущая Σ' -разметка есть μ , а на выходной ленте записано слово z . Конфигурация $\nu = (p, \mu', v', z')$ непосредственно выводима (получается за один такт работы) из конфигурации $\pi = (q, \mu, v, z)$ (обозначение $\pi \vdash \nu$), если есть команда $q\sigma \rightarrow p\delta aT$ такая, что $\mu(v) = \sigma$, $\mu' = \mu_{(v, \delta)}$, $z' = za$, v' равно $v \downarrow, v0, v1, v$ соответственно, если T равно D, L, R, S . Отношение выводимости $\models$ есть рефлексивно-транзитивное замыкание отношения непосредственной выводимости $\vdash$.

Фактически здесь определяется понятие $\Sigma T'$ -преобразователя над размеченными бинарными деревьями. В общем случае $\Sigma T'$ -преобразователь работает над размеченными полными n -арными деревьями $\mu: E_n^* \rightarrow \Sigma$, где $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, а команда имеет вид $q\sigma \rightarrow p\delta aT$, где $T \in \{D, R_1, \dots, R_n, S\}$. При $T = R_i$ происходит сдвиг с обозреваемой вершины v на вершину ve_i .

Поведение $\Sigma T'$ -преобразователя A над Σ -разметкой μ с начальной вершиной u есть конечная или бесконечная последовательность конфигураций $\rho = \langle \pi_0, \pi_1, \dots \rangle$, где $\pi_0 = (q_0, \mu, u, \varepsilon)$, а каждая конфигурация π_{i+1} получается из π_i за один такт работы преобразователя A . Пусть $\rho = \langle \pi_0, \dots, \pi_k \rangle$ — поведение $\Sigma T'$ -преобразователя A , где $\pi_i = (g_i, \mu_i, v_i, z_i)$, $0 \leq i \leq k$. Будем говорить, что вершина v посещается n раз при поведении ρ , если она входит n раз в последовательность $v_1, \dots, v_k$. Если при этом любая вершина v посещается не более d раз, то будем говорить, что поведение ρ имеет ограниченный режим d . Поведение ρ называется завершенным, если $g_k = q^*$ — заключительное состояние. В этом случае определено значение $A(\mu, u, \rho)$, которое полагается равным z_k .

Для $\Sigma T'$ -преобразователя $A = (K, \Sigma, \Sigma', \Delta, H, Z_0, q_0, q^*)$ определяются множества $O(A)$, $L(A)$ и $W(A)$, где

$$O(A) = \{(\mu, z) \mid \mu \text{ — } \Sigma\text{-разметка и существует завершенное}$$

$$\text{поведение } \rho \text{ преобразователя } A \text{ такое, что } z = A(\mu, \varepsilon, \rho)\}$$

— отображение, задаваемое преобразователем A ;

$$L(A) = \{\mu \mid (\mu, z) \in O(A) \text{ для некоторого } z\}$$

— множество Σ -деревьев, распознаваемое преобразователем A ;

$$W(A) = \{z \mid (\mu, z) \in O(A) \text{ для некоторого } \mu\}$$

— множество слов, порождаемое преобразователем A .

$\Sigma T'$ -преобразователь A называется детерминированным, если для любых $\sigma' \in \Sigma'$, $q \in K \setminus \{q^*\}$ существует не более одной команды вида $q\sigma \rightarrow p\delta aT$ из H . Полагаем, что $\Sigma T'$ -преобразователь A имеет ограниченный режим d , если каждое его поведение ρ на любой разметке μ имеет ограниченный режим d .

ΣT -преобразователем называется $\Sigma T'$ -преобразователь ограниченного режима.

В [9] были введены понятия $\Sigma TC'$ -преобразователя и ΣTC -преобразователя. $\Sigma TC'$ -преобразователь $A = (K, \Sigma, \Sigma', \Delta, H, Z_0, q_0, q^*, s, r)$ есть $\Sigma T'$ -преобразователь, обогащенный s счетчиками, по каждому из которых он может совершить не более r поворотов при любом поведении ρ на Σ -разметке μ , завершающемся попаданием в заключительное состояние. Поворотом считается переход от возрастания значения счетчика к его убыванию или наоборот. ΣTC -преобразователем называется $\Sigma TC'$ -преобразователь ограниченного режима. Будем иногда использовать нижний индекс n для указания арности обрабатываемых преобразователем размеченных деревьев. При отсутствии этого индекса он считается равным 2.

Опуская в определении $\Sigma TC'$ -преобразователя параметр Δ , получаем определение $\Sigma TC'$ -распознавателя. Аналогично получаем определения ΣTC -, $\Sigma T'$ - и ΣT -распознавателя.

2. ΣT -распознаватель протоколов

Пусть Σ — произвольное конечное множество, где $Z_0, \lambda \in \Sigma$ и $E, F \subseteq \Sigma \times \Sigma$ — произвольные фиксированные множества (множества согласований). Σ -разметка μ называется (E, F) -протоколом, если существует стандартное конечное дерево $V \subseteq D^2$ с кроной Q такое, что $\mu(x) = \lambda$ для всех $x \in Q$, а если $x \in V \setminus Q$, то $\mu(x) \neq \lambda$, $(\mu(x), \mu(x0)) \in E$, $(\mu(x), \mu(x1)) \in F$.

Лемма 1. *Существует ΣT -распознаватель B_1 , который распознает множество всех (E, F) -протоколов.*

Доказательство. Следующая система команд обеспечивает рекурсивный обход размеченного бинарного дерева слева направо с проверкой (E, F) -согласованности меток соседних вершин:

$$q_0 Z_0 \rightarrow q_{Z_0}^0 Z_0 L \text{ (далее } i \in \{0, 1\}, \sigma, \xi \in \Sigma),$$

$$q_\sigma^i \xi \rightarrow q_\xi^i(\xi, 1) L \text{ при } (\sigma, \xi) \in E, \xi \neq \lambda,$$

$$q_\sigma^i \lambda \rightarrow q_\lambda^i \lambda D \text{ при } (\sigma, \lambda) \in E,$$

$$q_\xi^i(\sigma, 1) \rightarrow q^i(\sigma, 2) R,$$

$$q_\xi^i \xi \rightarrow q_\xi^i(\xi, 1)L \text{ при } \xi \neq \lambda, q^i \lambda \rightarrow q_\lambda^i \lambda D,$$

$$q_\xi^i(\sigma, 2) \rightarrow q_\sigma^i \sigma D \text{ при } (\sigma, \xi) \in F,$$

$$q_\xi^0 Z_0 \rightarrow q^1 Z_0 R, q_\sigma^1 Z_0 \rightarrow q^* Z_0 S \text{ при } (Z_0, \sigma) \in F.$$

Заметим, что ΣT -распознаватель B_1 , построенный в лемме 1, по каждому ребру делает не более двух проходов.

ΣT -порождаемым языком называется любой язык вида $W(A)$, где A есть ΣT -преобразователь.

Теорема 1. *Любой контекстно-свободный язык L есть ΣT -порождаемый язык.*

Доказательство. Пусть язык L порождается KC -грамматикой G в нормальной форме Хомского [21]. Тогда для любого слова w из L его дерево вывода в грамматике G есть конечное размеченное дерево. Последнее, очевидно, вложимо в (E, F) -протокол, где E и F — множества, определяемые грамматикой G . По лемме 1 возьмем соответствующий ΣT -распознаватель B_1 . По нему строим ΣT -преобразователь B_2 , который выполняет те же действия, что и B_1 , и, кроме того, попадая на вершины, помеченные символами в терминальном алфавите грамматики G , выдает их на выход. Тогда получим $W(B_2) = L$.

Разметка $\mu: \{0, 1\}^* \rightarrow \Sigma''$ называется протоколом поведения ρ ΣT -преобразователя A , если $\mu(\varepsilon) = Z_0$, $\mu(1) = 0$ и для любой вершины v , которая посещалась хотя бы один раз при поведении ρ , метка $\mu(10v)$ содержит информацию о ситуациях и командах, связанных с посещениями вершины v при поведении ρ . В этом случае метка $\mu(10v)$ содержит n компонент, в остальных случаях $\mu(x) = \lambda$.

Понятие протокола поведения ρ ΣT -преобразователя A нетрудно уточнить. Покажем частично как это можно сделать. Допустим, что при поведении ρ преобразователь A совершает некоторые $(t-1)$ -й и t -й такты работы так, что на $(t-1)$ -м такте он i -й раз посещает вершину v_1 , каким-то образом изменяет метку этой вершины, переходит в состояние q и его управляющая головка сдвигается на вершину v_2 , причем в результате наступает j -е посещение вершины v_2 ; на t -м такте управляющая головка изменяет метку σ вершины v_2 на метку δ , состояние q на состояние p , выдает на выход символ $a \in \Delta \cup \{\varepsilon\}$ и сдвигается на вершину v_3 , причем в результате наступает k -е посещение вершины v_3 .

Пусть $t \geq 2$. Тогда описанная ситуация выражается цепочкой $\pi = (i, j, k)T^1 q \sigma \delta a p T^2 m$, где T^α равно соответственно D, L, R, S , если $v_\alpha \in v_{\alpha+1}\{0, 1\}$, $v_{\alpha+1} = v_\alpha 0$, $v_{\alpha+1} = v_\alpha 1$, $v_{\alpha+1} = v_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Если символ, выдаваемый на выход на t -м такте есть первый (но не последний) непустой символ, выдаваемый на выход при поведении ρ , то $m = 1$. Если он есть последний (но не первый) непустой символ, то $m = 2$. Если это первый и последний непустой символ, то $m = 3$. В остальных случаях $m = 0$.

Тогда для протокола μ поведения ρ цепочка π будет j -й компонентой метки $\mu(10v_2)$ и будем говорить, что в j -м ярусе метки $\mu(10v_2)$ записана цепочка π .

Протоколом ΣT -преобразователя A называется протокол любого его завершеного поведения.

Лемма 2. По любому ΣT-преобразователю A можно эффективно построить ΣT-распознаватель B такой, что $L(B)$ — множество всех протоколов ΣT-преобразователя A .

Доказательство леммы 2 громоздко, но аналогично доказательству леммы 1. Поэтому оно здесь не приводится.

Теорема 2. Пусть A — любой ΣT-преобразователь. Тогда в классе (детерминированных) машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой разрешима проблема эквивалентности относительно входного языка $W(A)$.

Доказательство. Для любого слова $w \in W(A)$ оно размещается посимвольно в метках вершин размеченного дерева, являющегося протоколом ΣT-преобразователя A . В протоколе процесса ΣT-порождения слова w имеется достаточное число указателей на направления сдвигов по размеченному дереву. Поэтому для любого вхождения символа a слова w сдвиг машины Тьюринга B по слову w влево или вправо относительно вхождения a можно промоделировать подходящим ΣT-преобразователем. В конечном счете для любых детерминированных машин Тьюринга B' и B'' ограниченного режима с выходной лентой проблема их эквивалентности относительно языка $W(A)$ сводится к проблеме эквивалентности для детерминированных ΣT-преобразователей. Последняя разрешима [9].

Из теоремы 2 можно получить ряд результатов, указывая конкретные подклассы класса ΣT-порождаемых языков.

Пусть $N = \{0, 1, \dots\}$. Для любого натурального числа m полулинейное множество $L \subseteq N^m$ есть конечное объединение линейных множеств [23]. При этом любое линейное множество $L \subseteq N^m$ задается в виде

$$L = L(c, P) = \left\{ x \mid x = c + \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i, \alpha_i \in N, 1 \leq i \leq k \right\},$$

где $c \in N^m$ — предпериод, $P = \{p_i \mid 1 \leq i \leq k\} \subseteq N^m$ — система периодов линейного множества L .

Для любого слова w в произвольном алфавите $\Delta = \{\delta_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ пусть

$$f_{\delta_1 \dots \delta_m}(w) = (x_1, \dots, x_m),$$

где x_i — число вхождений символа δ_i в слово w , $1 \leq i \leq m$. Для любого языка $L \subseteq \Delta^*$ пусть

$$f_{\delta_1 \dots \delta_m}(L) = \{f_{\delta_1 \dots \delta_m}(w) \mid w \in L\}.$$

Это множество называется образом Парика языка L .

Теорема 3. Пусть L — некоторый язык такой, что для любых гомоморфизма φ и регулярного языка R образ Парика языка $\varphi^{-1}(L) \cap R$ есть эффективно задаваемое полулинейное множество. Тогда в классе (детерминированных) машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой (и конечным числом конечно поворотных счетчиков) разрешима проблема эквивалентности на входном языке L .

Доказательство этой теоремы существенно не отличается от доказательства теоремы 5 из [5]. Последняя имеет несколько другую форму и сформулирована в [5] для класса двусторонних детерминированных последовательностных машин.

Образ Парика любого ΣTC -порождаемого языка есть эффективно задаваемое полулинейное множество [9]. Кроме того, класс ΣTC -порождаемых языков замкнут относительно операций обратного гомоморфизма, пересечения с регулярным языком и коммутативного замыкания.

3. Класс ΣT -порождаемых языков

В предыдущем параграфе было показано, что каждый KC -язык ΣT -порождаем. Продолжим исследование класса ΣT -порождаемых языков. Обозначим его через $\mathcal{L}_{\Sigma T}$. Известно, что полным абстрактным семейством языков (полным АСЯ) называется любое семейство языков замкнутое относительно операций объединения, конкатенации, итерации, гомоморфизма, обратного гомоморфизма и пересечения с регулярным языком [22].

Теорема 4. *Класс $\mathcal{L}_{\Sigma T}$ является полным абстрактным семейством языков.*

Доказательство состоит из очевидных построений по каждой из перечисленных операций.

Лемма 3. *Если язык $W(A)$ порождается ΣT_n -преобразователем A (над n -арными деревьями), $n > 2$, то он порождается подходящим ΣT -преобразователем B .*

Доказательство. Действительно, пусть $2^k \geq n$ и y_i , $1 \leq i \leq n$, — различные слова длины k в алфавите $\{0, 1\}$. Тогда легко построить моделирующий ΣT -преобразователь B , сопоставив каждой вершине $v \in \{e_1, \dots, e_n\}^*$, $v = e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_m}$, вершину $v' = y_{\alpha_1} \dots y_{\alpha_m}$. Соответственно передвижениям ΣT_n -преобразователя A по вершинам из $\{e_1, \dots, e_n\}^*$ соответствуют передвижения ΣT -преобразователя B по вершинам из $\{y_1, \dots, y_n\}^*$.

Лемма 4. *Любой язык, распознаваемый автоматом с магазинной памятью, является ΣT -порождаемым.*

Доказательство. Само это утверждение следует из теоремы 1, так как языки, распознаваемые МП-автоматами, — это в точности KC -языки. Однако здесь мы хотим показать как процесс распознавания, осуществляемый МП-автоматом, моделируется процессом ΣT -порождения. Кроме того, описываемая конструкция будет использоваться в дальнейшем. Возьмем произвольный МП-автомат

$$A' = (K, \Sigma, \Gamma, H, Z_{00}, q_{00}, q^*).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что он имеет команды двух видов

$$(q, a, \xi) \rightarrow (p, \eta\delta), \quad (q, a, \xi) \rightarrow (p, \varepsilon),$$

где $q \in K \setminus \{q^*\}$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $\xi, \eta, \delta \in \Gamma$, $p \in K$, ε — пустое слово. Согласно первой команде верхний магазинный символ ξ заменяется на $\eta\delta$ так, что δ становится верхним магазинным символом. Согласно второй команде верхний магазинный символ ξ стирается (в этом случае $\xi \neq Z_{00}$). Будем говорить, что первая команда задает магазинную операцию, а вторая — операцию стирания. В начале работы в магазине находится один символ Z_{00} (дно магазина). Здесь Z_0 (маркер) и Z_{00} — различные символы.

Построим ΣT-преобразователь B_3 так, что $W(B_3) = L(A')$ — язык, распознаваемый МП-автоматом A . ΣT-преобразователь B_3 на пустой разметке μ моделирует процесс распознавания МП-автоматом A любого слова $w \in L(A')$. Наполнение магазина МП-автомата A' , определяемое последовательным выполнением магазинных операций, моделируется размещением содержимого магазина в метках вершин из множества $0\{0\}^*$. При выходе на верхний магазинный символ ξ после выполнения операции стирания, при моделировании магазинной операции два верхних символа магазина η, δ уже смещаются по дереву вправо от той вершины, где был размещен ξ . В частности, многократный выход МП-автомата A' на дно магазина Z_{00} моделируется последовательным перемещением метки Z_{00} вправо по вершинам из множества $0\{1\}^*$.

Приведем строгое описание системы команд H' для ΣT-преобразователя B_3 . Система H' содержит две команды (установки)

$$q_0 Z_0 \rightarrow q_0^1 Z_0 L, \quad q_0^1 \lambda \rightarrow q_{00} Z_{00} S.$$

Если команда $(q, a, \xi) \rightarrow (p, \eta\delta)$ принадлежит H , то в H' ей соответствуют две группы команд

$$\begin{aligned} q\xi &\rightarrow f_p(\eta, 1)aL, & f_p\lambda &\rightarrow p\delta S; \\ q(\xi, 1) &\rightarrow f_p'2aR, & f_p'\lambda &\rightarrow f_p''(\eta, 1)L, & f_p''\lambda &\rightarrow p\delta S. \end{aligned}$$

Если же команда $(q, a, \xi) \rightarrow (p, \varepsilon)$ принадлежит H , то в H' ей соответствует группа команд

$$q\xi \rightarrow f_p'''2aD, \quad q(\xi, 1) \rightarrow f_p'''2aD, \quad f_p'''2 \rightarrow f_p'''2D, \quad f_p'''(\eta, 1) \rightarrow p(\eta, 1)S.$$

Других команд в H' нет. Состояний и меток, отличных от тех, что задействованы в H' , ΣT-преобразователь B_3 не имеет. Его заключительное состояние есть q^* .

Тогда по построению получаем, что $W(B_3) = L(A')$. Лемма доказана.

Более громоздкое доказательство этой леммы имеется в кандидатской диссертации В. А. Канивца [10].

Проанализируем описанный в доказательстве леммы 4 способ моделирования процесса МП-распознавания посредством процесса ΣT-порождения. Некоторое естественное расширение системы команд ΣT-преобразователя B_3 позволит описать моделирование процессов распознавания на моделях более мощных, чем МП-автоматы.

Путем расширения модели МП-автомата получим модель недетерминированной машины Тьюринга с входной лентой (МТ-машины), частным случаем которой служит модель стекового автомата. Управляющая головка МТ-машины может входить внутрь магазина и производить операции замены символов, размещенных

внутри магазина (кроме символа Z_{00}). МТ-машина A'' имеет множество магазинных символов Γ' , где $\lambda \notin \Gamma'$. Множество Γ' разбивается на множество Γ (множество немаркированных, или верхних символов) и множество $\Gamma_1 = \{(\xi, 1) \mid \xi \in \Gamma\}$ (множество маркированных символов). При записи символа $\xi \in \Gamma$ внутрь магазина, он маркируется (превращается в $(\xi, 1)$). При попадании его в дальнейшем, после выполнения операции стирания, в верхнюю ячейку магазина, маркировка 1 сразу же убирается. Операция снятия маркировки носит вспомогательный характер и подразумевается по умолчанию. С верхними символами связаны прежние операции стирания и магазинная операция, как и в случае МП-автомата. Новая операция замены задается командой третьего вида

$$(q, a, \xi) \rightarrow (p, \eta, T),$$

где $\xi, \eta \in \Gamma, T \in \{D, U\}$. По этой команде в обозреваемой ячейке происходит замена маркированного символа $(\xi, 1)$ или немаркированного символа ξ соответственно на символ $(\eta, 1)$ или η и в зависимости от T происходит сдвиг управляющей головки вниз ($T = D$) или вверх ($T = U$). Считаем, что в каждом состоянии q всегда указано, является обозреваемая ячейка верхней ячейкой магазина или нет. Соответственно нет команд сдвига вверх с верхнего символа или сдвига вниз с нижних символов $Z_{00}, (Z_{00}, 1)$. Стековый автомат есть МТ-машина, у которой должно быть $\xi = \eta$ для каждой команды третьего вида. Символы внутри стека могут просматриваться, но не могут изменяться.

МТ-машина A'' моделируется $\Sigma T'$ -преобразователем B_4 , который имеет систему команд H'' и является продолжением ΣT -преобразователя B_3 таким, что $H' \subseteq H''$. Вышеуказанной операции замены при $T = D, U$ в H'' соответствуют две группы команд

$$\begin{aligned} q\xi \rightarrow p\eta aD, \quad q(\xi, 1) \rightarrow p(\eta, 1)aD, \quad p2 \rightarrow p2D; \\ q(\xi, 1) \rightarrow f_p^4(\eta, 1)aL, \quad f_p^4 2 \rightarrow f_p^4 2R, \quad f_p^4 x \rightarrow pxS, \quad x \neq 2. \end{aligned}$$

Тогда $L(A'') = W(B_4)$, причем если МТ-машина A'' имеет ограниченный режим работы внутри магазина, то B_4 есть ΣT -преобразователь. Условие ограниченности режима (ОР-условие) для A'' уточняется следующим образом: ОР-условие состоит в том, что существует число d такое, что выполняется ОР(d)-условие, где ОР(d)-условие в свою очередь состоит в том, что для любого поведения ρ МТ-машины A'' , начинающегося на пустом магазине, для любых чисел i, t_1, t_2 , если в интервале между моментами времени $t_1 < t_2$ в i -й ячейке размещаются только внутренние символы, то число посещений i -й ячейки во временном интервале $[t_1, t_2]$ не превышает d .

Заметим, что ОР-условие для МТ-машин неразрешимо, а ОР(d)-условие разрешимо, так как оно сводится к разрешимой проблеме непустоты ΣT -преобразователя [9].

Рассмотрим другие расширения модели МП-автомата, а именно, модель гнездового стекового автомата (ГС-автомата) и модель гнездовой машины Тьюринга (ГМТ-машины).

В случае ГМТ-машины A''' ее множество команд H''' кроме команд МТ-машины содержит команды, задающие операции образования гнезда и удаления гнезда. Операция образования гнезда задается командой четвертого вида

$$(q, a, \xi) \rightarrow (p, 3\eta, S),$$

где $\xi \neq Z_0$. По этой команде вместо внутреннего магазинного символа $(\xi, 1)$ вставляются новый символ 3 и немаркированный (верхний) символ $\eta \in \Gamma$. Соответственно магазинная конфигурация $uq(\xi, 1)v$ превращается в $u3p\eta v$. Управляющая головка может свободно проходить вниз и вверх через символ 3, но согласно определению МТ-машины сдвиг с верхнего символа η далее вверх невозможен. Команды прохода через символ 3 имеют пятый вид

$$(q, \varepsilon, 3) \rightarrow (p, 3, T),$$

где $T = D$ или U , а q не является состоянием, в которое ГС-автомат A''' попадает в результате выполнения операции стирания. Операция образования гнезда может применяться многократно наряду с операцией сдвига по стеку, операций стирания и магазинной операцией. Операция стирания немаркированного символа в случае ГС-автомата может применяться внутри стека. То же касается магазинной операции. Операция удаления гнезда задается командой шестого вида

$$(q, \varepsilon, 3) \rightarrow (p, \xi, S).$$

Эта команда применяется сразу после выполнения операции стирания внутри стека. По этой команде заканчивается удаление одного внутреннего гнезда, а машинная конфигурация $uq3v$ превращается в $up(\xi, 1)v$.

ГМТ-машина A''' называется гнездовым стековым автоматом, если $\xi = \eta$ для каждой ее команды третьего вида. Если при любом поведении ρ ГМТ-машины A''' возникает не более, чем k последовательно вложенных друг в друга гнезд, то A''' называется k -гнездовой машиной Тьюринга. Соответственно получаем определение k -гнездового стекового автомата.

ГМТ-машина A''' моделируется $\Sigma T'$ -преобразователем B_5 , который имеет систему команд H^4 и является продолжением $\Sigma T'$ -преобразователя B_4 . Кроме команд из H'' в H^4 есть новые команды. Вышеуказанной операции образования гнезда в H^4 соответствуют команды

$$q(\xi, 1) \rightarrow f_p^5 3aR, \quad f_p^5 2 \rightarrow f_p^5 2R, \quad f_p^5 \lambda \rightarrow p\eta S.$$

Команде пятого вида ГС-автомата A''' в H^4 при $T = D$ соответствует команда $q3 \rightarrow p3D$, а при $T = U$ группа команд

$$\begin{aligned} q3 &\rightarrow f_p^6 3R, & f_p^2 &\rightarrow f_p^6 2R, \\ f_p^6 x &\rightarrow pxS, & x &\neq 2. \end{aligned}$$

Команде шестого вида в H^4 соответствует команда $q3 \rightarrow p\xi S$. Других команд в H^4 нет. Тогда по построению $L(A''') = W(B_5)$.

Исследуем условия, при которых определяемый указанным выше образом $\Sigma T'$ -преобразователь B_5 будет ΣT -преобразователем. Для этого по ГМТ-машине A''' построим аналогичную СГМТ-машину A_1''' (считающую ГМТ-машину) с бесконечным множеством рабочих символов

$$\Gamma'' = \Gamma \cup \{3\} \cup \{(\xi, i) \mid \xi \in \Gamma, i \in N\}.$$

Множество команд H_1''' машины A_1''' строится по множеству команд H''' машины A''' следующим образом.

Если $(q, a, \xi) \rightarrow (p, \eta\delta)$ принадлежит H''' , то команды

$$(q, a, \xi) \rightarrow (p, (\eta, 1)\delta), \quad (q, a, (\xi, i)) \rightarrow (p, (\eta, 1)\delta), \quad i \geq 1,$$

принадлежат H_1''' .

Если команда $(q, a, \xi) \rightarrow (p, \varepsilon)$ принадлежит H''' , то она принадлежит и H_1''' .

Если $(q, a, \xi) \rightarrow (p, \eta, T)$ принадлежит H''' , то

$$(q, a, (\xi, i)) \rightarrow (p, (\eta, i+1), T), \quad i \geq 1,$$

принадлежат H_1''' .

Если $(q, a, \xi) \rightarrow (p, 3\eta, S)$ принадлежит H''' , то

$$(q, a, (\xi, i)) \rightarrow (p, (3, i+1)\eta, S), \quad i \geq 1,$$

принадлежат H_1''' .

Если $(q, \varepsilon, 3) \rightarrow (p, 3, T)$ принадлежит H''' , то

$$(q, \varepsilon, (3, i)) \rightarrow (p, (3, i+1), T), \quad i \geq 1,$$

принадлежат H_1''' .

Если $(q, \varepsilon, 3) \rightarrow (p, \xi, S)$ принадлежит H''' , то

$$(q, \varepsilon, (3, i)) \rightarrow (p, (\xi, i+1), S), \quad i \geq 1,$$

принадлежат H_1''' .

ГМТ-машина A''' называется ГМТ-машиной ограниченного режима, если существует такое число d , что считающая ГМТ-машина A_1''' , начиная работу с пустым магазином и действуя аналогично ГМТ-машине A''' , при чтении любого входного слова w не может образовывать в своей магазинной памяти символы вида $(\xi, d+1)$, где $\xi \in \Gamma \cup \{3\}$.

Теорема 5. Пусть A''' есть ГМТ-машина ограниченного режима. Тогда существует ΣT -преобразователь B_5 , который порождает язык, распознаваемый ГМТ-машиной A''' .

Доказательство. Построение искомого ΣT -преобразователя B_5 приведено выше.

Замечание 1. Существует ГС-автомат ограниченного режима, не являющийся k -гнездовым ни для какого числа k .

Теорема 6. Пусть A есть гнездовая (недетерминированная) машина Тьюринга ограниченного режима с входной лентой. Тогда в классе (детерминированных) машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой разрешима проблема эквивалентности на входном языке $L(A)$, распознаваемом машиной A .

Это утверждение следует из теорем 2 и 5.

4. Обобщения

Доказательство теоремы 2 проводилось выше сведением к разрешимой проблеме эквивалентности для детерминированных ΣT -преобразователей. На самом деле разрешима проблема эквивалентности для детерминированных ΣTC -преобразователей (следствие 3 из [9]). Поэтому, сохраняя способ доказательства теоремы 2, непосредственно получаем ее обобщение.

Теорема 7. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь. Тогда в классе (детерминированных) машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой разрешима проблема эквивалентности относительно входного языка $W(A)$.

Следствие 1. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь. Тогда в классе двусторонних конечных преобразователей разрешима проблема эквивалентности на входном языке $W(A)$.

Лемма 5. Существует алгоритм, который по любым ΣTC -преобразователям A_i , $1 \leq i \leq m$, определяет, существуют ли разметка μ и поведения ρ_i соответственно преобразователей A_i , $1 \leq i \leq m$, такие, что все значения $A_i(\mu, \varepsilon, \rho_i)$ определены и

$$A_1(\mu, \varepsilon, \rho_1) \notin \{A_i(\mu, \varepsilon, \rho_i) \mid 2 \leq i \leq m\}.$$

При $m = 2$ это лемма 2 из [9]. При $m > 2$ доказательство аналогично.

ΣTC -преобразователь A называется однозначным, если однозначно задаваемое им отображение $O(A)$. Аналогично определяется понятие однозначной недетерминированной машины Тьюринга с выходной лентой. Будем говорить, что конечные системы $\{A_i^\alpha \mid 1 \leq i \leq m\}$, $\alpha = 1, 2$, недетерминированных машин Тьюринга с выходной лентой эквивалентны между собой на входном языке L , если для любого слова $w \in L$ верно равенство $M_1^w = M_2^w$, где

$$M_\alpha^w = \bigcup_{i=1}^m \{y \mid (w, y) \in O(A_i^\alpha)\}.$$

Из леммы 5 и способа доказательства теоремы 2 получаем такие ее обобщения.

Теорема 8. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь. Тогда разрешима проблема эквивалентности относительно входного языка $W(A)$ для конечных систем однозначных недетерминированных машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой.

Теорема 9. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь. Тогда разрешима проблема эквивалентности относительно входного языка $W(A)$ для конечных систем (детерминированных) машин Тьюринга ограниченного режима с выходной лентой, обогащенных конечным числом конечноповоротных счетчиков.

Для любого натурального числа k недетерминированная машина Тьюринга A с выходной лентой называется k -неоднозначной на входном языке L , если для любого слова $w \in L$ множество $\{y \mid (w, y) \in O(A)\}$ содержит не более k элементов. Аналогично определяется понятие k -неоднозначного последовательностного преобразователя [23]. При этом, если $L = \Sigma^*$, где Σ — входной алфавит, машина A называется k -неоднозначной.

Теорема 10. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь и k — фиксированное число. Тогда существует алгоритм, который по любой недетерминированной машине Тьюринга A ограниченного режима с выходной лентой определяет, является ли она k -неоднозначной на входном языке $W(A)$.

Эта теорема вытекает из леммы 5 и способа доказательства теоремы 2.

Последовательностный преобразователь A называется конечно неоднозначным, если он k -неоднозначный для некоторого числа k .

Теорема 11. Пусть A — любой ΣTC -преобразователь. Тогда существует алгоритм, который по любым конечно неоднозначным последовательностным преобразователям B_1 и B_2 определяет, эквивалентны ли они относительно входного языка $W(A)$.

Доказательство. По конечно неоднозначным последовательностным преобразователям B_i , $i = 1, 2$, можно эффективно построить [24] однозначные последовательностные преобразователи B_{ij} , $1 \leq j \leq m_i$, так, что

$$O(B_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} O(B_{ij}), \quad i = 1, 2.$$

Остается воспользоваться теоремой 8.

Из указанных выше способов моделирования МП-распознавания посредством ΣT -порождения, а также распознавания стековым автоматом, получаем такие обобщения.

Теорема 12. Пусть язык L распознается МП-автоматом, обогащенным конечным числом конечноповоротных счетчиков. Тогда он ΣTC -порождаем.

Теорема 13. Пусть язык L распознается стековым автоматом с конечноповоротным стеком, обогащенным конечным числом конечноповоротных счетчиков. Тогда он ΣTC -порождаем.

Пусть $\mathcal{L}$ — максимальный класс полугрупп такой, что для каждой полугруппы $S(\Delta)$ из $\mathcal{L}$ разрешима проблема эквивалентности для детерминированных ΣTC -преобразователей с выходной полугруппой $S(\Delta)$. В [9] показано, что класс $\mathcal{L}$ содержит все конечно определенные коммутативные полугруппы и замкнут относительно операций прямого и свободного произведений. Из способа доказательства теоремы 2 получаем такой результат.

Теорема 14. Пусть A — любой ΣTC-преобразователь. Тогда в классе детерминированных машин Тьюринга ограниченного режима (с конечноповоротными счетчиками) с выходной полугруппой $S(\Delta)$ из $\mathcal{L}$ разрешима проблема эквивалентности относительно входного языка $W(A)$.

Следствие 2. Пусть L — любой контекстно-свободный язык. Тогда разрешима проблема эквивалентности относительно языка L в классе детерминированных машин Тьюринга ограниченного режима с конечноповоротными счетчиками и выходной свободной частично коммутативной полугруппой [7].

Замечание 2. Пусть

$$L_1 = \{w \mid f_1(w) = f_2(w) = f_3(w), w \in \{a_1, a_2, a_3\}^*\},$$

где $f_i(w)$ — число вхождений буквы a_i в слово w , $1 \leq i \leq 3$. Тогда можно показать, что язык L_1 ΣTC-порождает, но не ΣT-порождает. В то же время язык

$$L_2 = \{wa_3^n \mid f_1(w) = f_2(w) = n, w \in \{a_1, a_2\}^*, n \geq 0\}$$

ΣT-порождает.

Открытой остается задача указать необходимое и достаточное условие бесконтекстности для языков вида $\varphi(L)$, где $\varphi(L)$ — коммутативное замыкание КС-языка L (см. [25, 26]).

5. Проблема эквивалентности для последовательностных преобразователей относительно регулярного языка

Проблема эквивалентности неразрешима для последовательностных преобразователей, имеющих 10 состояний [27]. Неразрешима также проблема эквивалентности относительно регулярного языка для последовательностных преобразователей с четырьмя состояниями [28]. Ниже показано, что уже для последовательностных преобразователей с двумя состояниями неразрешима проблема эквивалентности относительно регулярного языка. Более точно, доказан такой результат.

Теорема 15. Неразрешима проблема эквивалентности относительно регулярного языка $c\{0,1\}^+b$ для последовательностных преобразователей с одним состоянием (или, иначе, для конечных подстановок).

Тем же способом на основе неразрешимости проблемы надежности недетерминированной системы защиты [27] доказывается такой результат.

Теорема 16. Не существует алгоритма, который по любым гомоморфизму φ и конечной подстановке ξ определяет, верно ли, что $\varphi(x) \subseteq \xi(x)$ для всех слов x из регулярного языка $c\{0,1\}^+b$.

Введем необходимые определения, а затем докажем эти теоремы. Вначале будет доказана теорема 16.

Последовательностным преобразователем с одним состоянием, или, иначе, Π_1 -преобразователем, или конечной подстановкой, будем называть упорядоченную тройку $A = (\Sigma, \Delta, H)$, где Σ, Δ — конечные множества (входной и выходной алфавиты), $H \subseteq \Sigma \times \Delta^*$ — конечное множество (система команд). Π_1 -преобразователь, как и вообще последовательностный преобразователь (см. [23]), задает отображение $O(A) \subseteq \Sigma^+ \times \Delta^+$.

Опишем здесь постановку проблемы надежности для недетерминированной системы защиты из [27] в несколько упрощенной форме, достаточной для доказательства последующей теоремы. Будем называть ND -системой упорядоченную тройку $V = (K, H, q_1)$, где K — конечное множество состояний (или линий защиты),

$$K = \{q_j \mid 1 \leq j \leq s\}, \quad H \subseteq K \times \{0, 1\} \times K \times \{-1, 0, 1\} \times [0, 1].$$

ND -система V связана с задачей защиты линейно упорядоченной счетной системы узлов Z , где Z — множество всех целых чисел. Вначале защищен (с вероятностью 1) узел 0 по линии 1 (по состоянию q_1). По остальным линиям и узлам вначале защиты нет.

Действие ND -системы в [27] задается двумя матрицами переходов M_0 и M_1 . Для $a = 0, 1$ строка

$$M_a(k) = (p_{ak1}^{-1}, \dots, p_{aks}^{-1}, p_{ak1}^0, \dots, p_{aks}^0, p_{ak1}^1, \dots, p_{aks}^1)$$

матрицы M_a , $1 \leq k \leq s$, показывает, что при воздействии сигнала a защита с линии k каждого узла i переходит с вероятностью p_{akj}^z на линию j узла $i + z$, где $1 \leq j \leq s$, $z = -1, 0, 1$. Таким образом возникает счетная цепь Маркова со средой. Более точно, тогда

$$H = \{(q_k, a, q_j, z, p_{akj}^z) \mid a = 0, 1, 1 \leq k, j \leq s, z = -1, 0, 1\}.$$

ND -система V называется надежной, если не существует конечной последовательности сигналов $\gamma \in \{0, 1\}^+$ такой, что после ее воздействия для всех чисел $1 \leq k \leq s$ вероятность защиты нулевого узла по линии k равна нулю.

Лемма 6. *Не существует алгоритма, который по любой ND -системе V определяет, надежна ли она.*

Эта лемма есть переформулировка теоремы 1 из [27].

Для любой ND -системы $V = (K, H, q_1)$ положим

$$P_V = \{(k, a, j, z) \mid (q_k, a, q_j, z, \alpha) \in H \text{ для некоторого } \alpha > 0\}.$$

Доказательство теоремы 16. В силу леммы 5 достаточно показать, что по любой ND -системе $V = (K, H, q_1)$ можно эффективно построить гомоморфизм φ и конечную подстановку ξ так, что $\varphi(x) \subseteq \xi(x)$ для всех $x \in c\{0, 1\}^+b$ тогда и только тогда, когда ND -система V надежна. Для ND -системы V сохраним указанные выше обозначения. Пусть $w = 010010001 \dots 10^{s+1}1$. Возьмем гомоморфизм φ так, что $\varphi(c) = 1$, $\varphi(a) = ww$ при $a = 0, 1$ и $\varphi(b) = w$. Для $1 \leq k \leq j \leq s + 1$ пусть $w_{kj} = v_k v_{k+1} \dots v_j$, где $v_i = 0^i 1$, $1 \leq i \leq s + 1$. Считаем, что

$$w^0 = \varepsilon, \quad w^1 = w, \quad w^2 = ww, \quad \xi(c) = \{1w_{11}, 1\}.$$

Для $a = 0, 1$ положим, что $\xi(a)$ содержит слово $w_{k+1,s+1}w_{1j}^{z+1}$, если в множестве P_V есть четверка (k, a, j, z) . Кроме того $\xi(a)$ содержит ww . Других слов в множестве $\xi(a)$ нет. Положим

$$\xi(b) = \{w_{i,s+1} \mid 2 \leq i \leq s+1\}.$$

Нетрудно проверить, что гомоморфизм φ и конечная подстановка ξ удовлетворяют вышеуказанному условию.

Доказательство теоремы 15. Используем предыдущее доказательство. Пусть конечная подстановка ξ' такова, что $\xi(a) \subseteq \xi'(a)$ для $a = 0, 1$ и, кроме того, если $\gamma \in \xi(a)$ и $\gamma = w_{k+1,s+1}w_{1j}^{z+1}$, то в множестве $\xi(a)$ есть слова $w_{t,s+1}\gamma, \delta = \gamma w_{j+1,s+1}w_{t,s+1}$ и $w_{m,s+1}\delta$ для любых чисел $2 \leq m, t \leq s+1$. Положим

$$\begin{aligned}\xi'(c) &= \{w_{11}\} \cup \{ww_{t,s+1} \mid 2 \leq t \leq s+1\}, \\ \xi'(b) &= \{w\} \cup \{w_{t,s+1}w \mid 2 \leq t \leq s+1\}.\end{aligned}$$

Пусть конечная подстановка φ' такова, что $\varphi'(x) = \xi'(x)$ при $x = 0, 1, b$ и $\varphi'(c) = \xi'(c) \cup \{w\}$. Нетрудно проверить, что $\varphi'(x) = \xi'(x)$ для всех $x \in c\{0, 1\}^+b$ тогда и только тогда, когда ND -система V надежна. Остается воспользоваться леммой 5.

Следствие 3 ([29]). *Неразрешима проблема включения для конечных подстановок относительно регулярного языка.*

Однако при унарном выходном алфавите эта проблема разрешима, что показано ниже в общей форме. При этом используется следующая лемма из [30].

Лемма 7. *Класс регулярных событий любой конечно определенной коммутативной полугруппы образует конструктивную булеву алгебру.*

Теорема 17. *Разрешима проблема включения для отображений, задаваемых Π_1 -преобразованиями с выходной конечно определенной коммутативной полугруппой $S(\Delta)$ относительно любого входного регулярного языка R .*

Доказательство. Пусть

$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}, \quad \Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}, \quad \Sigma \cap \Delta = \emptyset,$$

и необходимо проверить включение $M_1 \subseteq M_2$, где

$$M_i = (R \times S(\Delta)) \cap \tilde{O}(A_i), \quad i = 1, 2,$$

причем $\tilde{O}(A_i) \subseteq \Sigma^+ \times S(\Delta)$ — отображение, определяемое Π_1 -преобразованием $A_i = (\Sigma, \Delta, H_i)$, $i = 1, 2$. Пусть

$$H_i = \bigcup_{r=1}^k H_i^r,$$

где

$$H_i^r = \{(a_r, v_{rs}^i) \mid 1 \leq s \leq m_{ir}\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть S_1 — свободная коммутативная полугруппа с множеством образующих Σ и $\tilde{R} \subseteq S_1$ — регулярное событие в полугруппе S_1 , определяемое регулярным языком R (см. [31]). Возьмем коммутативную полугруппу $S_2 = S_1 \times S(\Delta)$ и регулярные языки

$$L_i = \{a_r v_{rs_r}^i \mid 1 \leq s_r \leq m_{ir}, 1 \leq r \leq k\}^+, \quad i = 1, 2.$$

Последние определяют регулярные события $\tilde{L}_i$ в полугруппе S_2 , $i = 1, 2$.

Включение $M_1 \subseteq M_2$ эквивалентно следующему отношению для регулярных событий в конечно определенной коммутативной полугруппе S_2 :

$$\tilde{L}_1 \cap (\tilde{R} \times S(\Delta)) \subseteq \tilde{L}_2 \cap (\tilde{R} \times S(\Delta)).$$

Разрешимость этого отношения следует из леммы 6.

Теорема 18. *Разрешима проблема включения для конечных подстановок с выходной конечно определенной коммутативной полугруппой $S(\Delta)$ относительно любого входного ΣTC -порождаемого языка R .*

Доказательство. В силу леммы 1 из [9] образ Парика ΣTC -порождаемого языка R есть полулинейное множество. Отсюда $\tilde{R}$ — регулярное событие свободной коммутативной полугруппы S_1 и можно воспользоваться доказательством теоремы 17.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 18 видно, что она будет верна относительно любого языка R , если его образ Парика есть полулинейное множество.

Следствие 4. *Разрешима проблема эквивалентности относительно любого регулярного языка для конечных подстановок с унарным выходным алфавитом [32].*

6. Распознаватели, моделирующие выводы в индексных грамматиках

Индексные грамматики были введены Ахо. Класс языков, порожденных индексными грамматиками, совпадает с классом языков, распознаваемых гнездовыми стековыми автоматами (см. [21, 33]). В данном разделе показано, что произвольной индексной грамматике G , удовлетворяющей некоторым дополнительным несущественным условиям, можно поставить в соответствие детерминированный $\Sigma T'$ -распознаватель $\mathfrak{R}_1$, посредством которого можно осуществлять синтаксический анализ языка $L(G)$, порожденного грамматикой G . Поведение $\Sigma T'$ -распознавателя $\mathfrak{R}_1$ задается программой P , указанной ниже. Она осуществляет обработку размеченных бинарных деревьев и распознает так называемые совершенные размеченные деревья, которые служат формой представления выводов в индексной грамматике G . В то же время программу P нетрудно промоделировать машиной Тьюринга с линейно ограниченной памятью, или, иначе, детерминированным линейно ограниченным автоматом. Ахо показал, что любой индексный язык распознается недетерминированным линейно ограниченным автоматом [33]. Используя описанную

ниже программу P , можно получить более сильный результат: каждый индексный язык распознается детерминированным линейно ограниченным автоматом.

Пусть $G = (K, \Delta, V, P, q_0)$ — индексная грамматика, где K, Δ, V, P — соответственно множества нетерминальных символов, терминальных символов, флагов, продукций и q_0 — начальный нетерминальный символ. Возьмем произвольные конечные автоматы

$$A_i = (K, V, H_i, q_0, F_i), \quad i = 1, 2,$$

и множества $M_1 \subseteq K \times \Delta$, $M_2 \subseteq K^3$. Пусть $\Sigma = K \cup V \cup \Delta \cup C$, где $C = \{Z_0, \lambda, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и предполагается, что множества K, V, Δ, C попарно не пересекаются. Приведем операциональное определение понятия совершенного Σ -дерева. Заметим, что есть также другое определение, в котором указываются некоторые одиннадцать свойств, которым должно удовлетворять бинарное Σ -дерево для того, чтобы быть совершенным.

Совершенным размеченным деревом с условием (A_1, A_2, M_1, M_2) -регулярности (сокращенно, совершенным Σ -деревом) называется любое полное бинарное Σ -дерево, к которому применима программа P . В случае, когда A_1, A_2, M_1, M_2 определены по грамматике G , имеем

$$M_1 = \{(x, y) \mid x \in K, y \in \Delta, x \Rightarrow y\}, \quad M_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in K, x \Rightarrow yz\},$$

где $\Rightarrow$ — отношение выводимости, определенное грамматикой G . Кроме того, для любых $p, q \in K$, $f \in V$ условия $(pf \rightarrow q) \in H_i$, $i = 1, 2$, эквивалентны соответственно условиям $p \Rightarrow qf$ и $pf \Rightarrow q$. Предполагается также, что в грамматике G есть правило вывода $q_0 \rightarrow \xi_1 \xi_2$ (единственное правило, содержащее символ q_0), где $\xi_1, \xi_2 \in K$ и языки $L_i = \{w \mid \xi_i \Rightarrow w, w \in \Delta^*\}$, $i = 1, 2$, не содержат пустого слова. Пусть $\Delta = \{a_i \mid 1 \leq i \leq m\}$.

Программа P есть $[P_1; P_2; P_3]$. В указанных трех подпрограммах программы P используются также подпрограммы $P'_2, P'_3, Q_0, Q_1, Q_2, \text{CASE}, \text{LEFTUP}(a, b)$. В этих подпрограммах используются программистские конструкции, определяющие действия управляющей головки на размеченном бинарном дереве такие, как операторы сдвига U_0, U_1, D цикла $\{a, S\}$, условные операторы (α, S_1, S_2) и (α, S) , переключатели $\bigvee_{i=1}^n [\alpha_i, R_i]$ (выполнить R_i , если верно α_i), составные операторы $[R_1; \dots; R_n]$, оператор замены символа E_c и некоторые другие известные конструкции. Ниже указаны все подпрограммы.

Программа P_1 .

$U_0; (\sigma \neq \lambda, \text{STOP-}, D);$

$U_1; (\sigma \neq q_0, \text{STOP-});$

$U_0; (\sigma \neq \lambda, \text{STOP-}, D);$

$U_1; (\sigma \neq 2, \text{STOP-}, U_0).$

Программа P_2 .

$\{\sigma \neq Z_0, [\{\sigma \notin \Delta, P'_2\};$

$U_0; (\sigma \neq \lambda, \text{STOP-}, D);$

$U_1; (\sigma \neq \lambda, \text{STOP-}, D);$

$v := \mu(\sigma); D; (\sigma \neq 5, \text{STOP-}, D); u := \mu(\sigma);$

$((u, v) \notin M_1, \text{STOP-});$

$\{\sigma \notin \{2, Z_0\}, D\};$

$(\sigma = 2, [D; u := \mu(\sigma); U_1;$
 $U_0; v_1 := \mu(\sigma); D;$
 $U_1; v_2 := \mu(\sigma); D;$
 $((u, v_1, v_2) \notin M_2, \text{STOP-}); E_1; U_1]))\}$

Программа Q_0 .

$[D; x := \mu(\sigma); U_1; U_1; F := \{\mu(\sigma)\}; D].$

Программа P'_2 .

$(\sigma = 5, [U_1; \sigma \notin \Delta, \text{STOP-}); D]); Q_1; Q_2;$
 $(\sigma = 4, [U_1; U_1; (\sigma \neq 5, \text{STOP-}); D; D; E_3]);$
 $(\sigma = 2, U_0, [U_0; (\sigma \neq \lambda, \text{STOP-}); D; U_1]).$

Программа Q_1 .

$(\sigma = 3, [U_1; \{\sigma \notin \{\lambda, 2, 3, 4, 5\}, U_1\};$
 $(\sigma \neq 2, \text{STOP-}); \{\sigma \neq 3, D\})).$

Программа Q_2 .

$(\sigma \in K, [x := \mu(\sigma); U_1;$
 $(\sigma \notin \{2, 3, 4, 5\}, [\{\sigma \notin K, [\text{CASE}; U_1]);$
 $(x \neq \mu(\sigma), \text{STOP-}); U_1;$
 $(x \notin \{2, 6\}, \text{STOP-}); D; D;$
 $\{\sigma \notin K, D\}]); D)).$

Программа CASE.

$\bigvee_{i=1}^m [\sigma = a_i \wedge (xa_i \rightarrow p) \in H, x := p].$

Программа LEFTUP $\langle a, b \rangle$.

$\{\sigma \notin \{1, 3\}, [(\sigma = a, E_b); (\sigma = 2, U_0, U_1)]\}.$

Считаем, что LEFTUP есть программа LEFTUP $\langle 1, 1 \rangle$.

Программа P_3 .

$M_1: \text{LEFTUP};$
 $M_2: (\sigma = 1, [P'_3; (\sigma = Z_0, \text{STOP}, [E_5, U_1; \text{GO TO } M_1]))];$
 $M_3: Q_0; E_4; D;$
 $M_4: \{\sigma \notin \{7, Z_0\}, [\text{CASE}; D];$
 $(\sigma = 7, (x \notin F, [E_8; D; \text{GO TO } M_4]$
 $[E_6; \text{LEFTUP}(8, 9); (\sigma = 1, \text{GO TO } M_2, \text{GO TO } M_3))]);$
 $\{\sigma \notin \{1, 3\}, \text{LEFTUP}(8, 7)\};$
 $\{\sigma \neq 4, D\}; E_3; D;$
 $\{\sigma \notin \{4, Z_0\}, D\}; (\sigma = Z_0, \text{STOP-}); Q_0; z := 1; D;$
 $\{z > 0, [\text{CASE}; (\sigma = 4, z := z + 1); (\sigma = 6, z := z - 1);$
 $(z = 1, (\sigma = 9, E_8)); D]\}; E_8; \text{GO TO } M_4.$

Программа P'_3 .

$\{\sigma \notin \{2, 4, Z_0\}, [D; (\sigma = 4, [E_3; z := 1; D;$
 $\{z > 0, [(\sigma = 4, z := z + 1); (\sigma = 6, z := z - 1);$
 $(z = 1, (\sigma = 9, E_7)); D]); E_7; LEFTUP]]\}$.

Особенностью программы P является то, что используя ее, можно построить детерминированный линейно ограниченный автомат $\mathfrak{A}_2$, который распознает язык, порожденный индексной грамматикой G .

Список литературы

1. Culik K., Salomaa A. On the decidability of homomorphism equivalence for languages. *J. Comp. Syst. Sci.* (1978) **17**, 163–175.
2. Culik K., Richier J. L. Homomorphism equivalence on ETOL languages. *Intern. J. Comput. Math.* (1979) **7**, 43–51.
3. Greibach S. A. One-way finite visit automata. *Theor. Comp. Sci.* (1978) **6**, 175–221.
4. Gurari E. M., Ibarra O. H. The complexity of decision problems for finite-turn multicounter machines. *J. Comp. Syst. Sci.* (1981) **22**, 220–229.
5. Ibarra O. H. $2DST$ mappings on languages and related problems. *Theor. Comp. Sci.* (1982) **19**, 219–227.
6. Culik K., Karhumaki J. The equivalence problem for single-valued two-way transducers (on NPDTOL languages) is decidable. *SIAM J. Comput.* (1987) **16**, 221–230.
7. Лисовик Л. П. Машины Тьюринга ограниченного режима над размеченными деревьями. *Тезисы IX Всесоюз. конф. по матем. логике*. Наука, Ленинград, 1988, с. 93.
8. Лисовик Л. П., Канивец В. А. Об относительной эквивалентности отображений. *Тезисы IX Всесоюз. конф. "Проблемы теоретической кибернетики"*, Ч. 1 (2), Волгоградский гос. ун-т, Волгоград, 1990, с. 44.
9. Лисовик Л. П. К проблеме эквивалентности для преобразователей над Σ -деревьями с конечноповоротными счетчиками. *Кибернетика* (1984) №5, 19–24.
10. Канивец В. А. Алгоритмические вопросы теории преобразователей над размеченными деревьями. *Канд. диссертация*. Киевский гос. ун-т, Киев, 1991.
11. Cremers A. B., Mayer O. On vector languages. *J. Comp. Syst. Sci.* (1974) **8**, №2, 158–166.
12. Rajlich V. Absolutely parallel grammars and two-way finite state transducers. *J. Comp. Syst. Sci.* (1972) **6**, 324–342.
13. Ibarra O. H. Simple matrix languages. *Inform. and Control.* (1970) **17**, 359–394.
14. Ibarra O. H. Controlled pushdown automata. *Information Sci.* (1973) №6, 327–342.
15. Siromoney R. Finite-turn checking automata. *J. Comp. Syst. Sci.* (1971) **5**, 549–559.
16. Ibarra O. H. Reversal-bounded multicounter machines and their decision problems. *J. Assoc. Comp. Mach.* (1978) **25**, 116–133.
17. Редько В. Н., Лисовик Л. П. Проблема эквивалентности для конечноповоротных счетчиковых машин. *Кибернетика* (1980) №4, 26–28.
18. Ibarra O. H. The unsolvability of the equivalence problem for ε -free NGSMS's unary input (output) alphabet and applications. *SIAM J. Comput.* (1978) **7**, 524–532.
19. Лисовик Л. П. Проблемы тождества регулярных событий над прямым произведением свободной и циклической полугрупп. *Докл. АН УССР. Сер. А* (1979) №6, 410–413.

20. Грейбах Ш. Одна бесконечная иерархия контекстно-свободных языков. В кн.: *Сложность вычислений и алгоритмов*. Мир, Москва, 1974, 85–106.
21. Ахо А., Ульман Дж. *Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1. Синтаксический анализ*. Мир, Москва, 1978.
22. Гинзбург С., Грейбах Ш. Абстрактные семейства языков. В кн.: *Языки и автоматы*. Мир, Москва, 1975, 233–281.
23. Гинзбург С. *Математическая теория контекстно-свободных языков*. Мир, Москва, 1970.
24. Анисимов А. В., Лисовик Л. П. Проблемы эквивалентности конечно-автоматных отображений в свободную и коммутативную полугруппы. *Кибернетика* (1978) №3, 1–7.
25. Лисовик Л. П. Коммутативное замыкание контекстно-свободных языков. *Кибернетика* (1978) №4, 23–28.
26. Beauquier J., Blattner M., Latteux M. On commutative context-free languages. *J. Comp. Syst. Sci.* (1987) **35**, №3, 311–320.
27. Лисовик Л. П. О неразрешимой проблеме для счетных цепей Маркова. *Кибернетика* (1991) №2, 1–8.
28. Канивец В. А., Лисовик Л. П. О проблеме эквивалентности отображений относительно языков. В сб.: *Методы представления знаний и доказательное программирование*. АН УССР, Ин-т кибернетики им В. А. Глушкова, Киев, 1990, 95–100.
29. Turakainen P. On some transducer equivalence problems for families of languages. *Intern. J. Comput. Math.* (1988) **23**, 99–124.
30. Лисовик Л. П. Множества, выражимые в теориях коммутативных полугрупп. *Докл. АН УССР. Сер. А* (1981) №8, 80–83.
31. Редько В. Н., Лисовик Л. П. Регулярные события в полугруппах. *Проблемы киберн.* (1980) **37**, 155–184.
32. Maon Y. On the equivalence of some transductions involving letter to letter morphisms on regular languages. *Acta Informatica* (1986) **23**, 585–596.
33. Aho A. V. Indexed grammars — an extension of context-free grammars. *J. ACM* (1968) **15**, 647–671.

Статья поступила 05.05.1994.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 1997, ТОМ 9, ВЫПУСК 2

Заведующая редакцией Л. М. Барыкина
Технический редактор Н. Н. Беляева

Сдано в набор 12.05.97.	Подписано к печати 20.05.97.	Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,3	Усл. кр.-отт. 5,0 тыс.	Уч.-изд. л. 12,9. Бум. л. 5,0.
Тираж 359 экз.		Заказ №1732.

Адрес редакции: 117966 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 37 00.

Отпечатано в Московской типографии №2 РАН
121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.