Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лозин, О минимальных универсальных графах для наследственных классов, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 106–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:17:10

О минимальных универсальных графах для наследственных классов

© 1997 г. В. В. Лозин

Рассматриваются универсальные графы для наследственных классов с ненулевой энтропией. Для бесконечной серии таких классов, содержащей, в частности, все k -дольные графы, построены асимптотически минимальные универсальные графы.

1. Введение

Универсальным графом для некоторого класса графов X называется граф U , содержащий все графы из X , как порожденные подграфы. При построении универсальных графов интерес, как правило, представляют графы с определенными заданными свойствами. Так, например, в [4] описаны сильно симметричные универсальные графы, в [2] рассматриваются k -дольные универсальные графы, в [5] представлены универсальные графы, реализуемые конечными группами. Фундаментальной проблемой экстремальной теории графов является поиск универсальных графов, обладающих минимальным числом вершин. В [6] описаны минимальные графы, универсальные для класса всех обыкновенных графов. В [7] эта проблема рассматривается для класса планарных графов и некоторых его подклассов. В [8] описаны минимальные универсальные турниры.

В настоящей работе рассматриваются универсальные графы для наследственных классов с ненулевой энтропией. Для бесконечной серии таких классов построены асимптотически минимальные универсальные графы. Используя полученные результаты, можно, в частности, построить универсальные графы, описанные в [6].

2. Основные понятия и обозначения

Обозначим через $\mathcal{G}_n$ класс всех обыкновенных графов с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$. Положим

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n.$$

Множество вершин графа $G \in \mathcal{G}$ обозначается через VG , подграф графа G , порожденный множеством вершин $U \subseteq VG$, обозначается через $G\langle U \rangle$, $|G| = |VG|$ — порядок G .

Пусть $G \in \mathcal{G}_n$, $H \in \mathcal{G}_k$, где $n \leq k$.

Вложением графа G в граф H называется инъективное отображение $\varphi: VG \rightarrow VH$, при котором G изоморфен $H\langle\varphi(VG)\rangle$. Будем говорить, что G вложим в H , если существует вложение G в H .

Класс графов $X \subseteq \mathcal{G}$ называется наследственным, если любой граф, вложимый в граф из X , также содержится в X . Через X_n обозначается $X \cap \mathcal{G}_n$.

Для произвольного наследственного класса X граф UX_n назовем n -универсальным X -графом, если всякий граф из X_n вложим в UX_n .

Пусть $G \in X_n$. Список номеров вершин графа UX_n , порождающих G , назовем вершинным кодом графа G относительно UX_n [3]. Таким образом, в двоичном представлении вершинный код графа G имеет длину $n \log |UX_n|$. Отсюда, из мощностных соображений следует, что

$$\log |X_n| \leq n \log |UX_n|$$

(здесь и далее логарифм берется по основанию 2).

Последовательность универсальных X -графов $UX = \{UX_n, n = 1, 2, \dots\}$ будем называть асимптотически оптимальной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log |UX_n|}{\log |X_n|} = 1.$$

В [1] показано, что для всякого бесконечного наследственного класса графов X существует энтропия

$$h(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |X_n|}{\binom{n}{2}}.$$

Из этого, в частности, следует, что $|X_n| = 2^{n^2 h(X)/2 + o(n^2)}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для всякого наследственного класса X с энтропией $h = h(X)$, отличной от нуля, последовательность универсальных X -графов

$$UX = \{UX_n, n = 1, 2, \dots\}$$

является асимптотически оптимальной в том и только том случае, если

$$|UX_n| = 2^{nh/2 + o(n)}.$$

Универсальный граф UX_n будем называть правильным, если множество его вершин может быть разбито на n классов таким образом, что для любого графа $G \in X_n$ существует такое вложение G в UX_n , при котором образы различных вершин принадлежат различным классам. Данное разбиение назовем правильным, а классы правильного разбиения секторами. Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что каждый сектор порождает в UX_n пустой подграф.

Лемма 2. Если для некоторого наследственного класса X с энтропией $h = h(X)$, отличной от нуля, существует асимптотически оптимальная последовательность универсальных X -графов, то для X существует асимптотически оптимальная последовательность правильных универсальных X -графов.

Доказательство. Для произвольного графа G через $G^{(k)}$ обозначим граф, матрица смежности которого состоит из k^2 блоков, причем диагональные блоки являются нулевыми, а все остальные совпадают с матрицей смежности графа G . Тогда, очевидно, если UX_n — n -универсальный X -граф, то $UX_n^{(n)}$ — правильный n -универсальный X -граф. Если последовательность $\{UX_n, n = 1, 2, \dots\}$ асимптотически оптимальна, то, в силу леммы 1, $|UX_n| = 2^{nh/2+o(n)}$. Учитывая, что $|UX_n^{(n)}| = n|UX_n|$, получаем, что $|UX_n^{(n)}| = 2^{nh/2+o(n)}$. Таким образом, по лемме 1, последовательность $\{UX_n^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ асимптотически оптимальна, что и требовалось доказать.

Лемма 2 позволяет в дальнейшем при построении асимптотически оптимальных универсальных графов для наследственных классов с ненулевой энтропией ограничиться изучением только правильных универсальных графов.

Обозначим $G = (V_1, V_2, E)$ двудольный граф с долями V_1, V_2 , и пусть D_{n_1, n_2} — множество всех двудольных графов с долями мощности $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$,

$$D_n = \bigcup_{n_1+n_2=n} D_{n_1, n_2}, \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Пусть X^1, X^2 — наследственные классы графов, $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ — произвольные графы такие, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset, H = (V_1, V_2, E_3) \in D$. Обозначим через $H(G_1, G_2)$ граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$, через $D(X^1, X^2)$ класс всех графов вида $H(G_1, G_2)$, где $G_1 \in X^1, G_2 \in X^2, H \in D$. Заметим, что предполагается существованием графа K_0 с пустым множеством вершин, принадлежащий любому наследственному классу. Класс $D(X^1, X^2)$ будем называть композицией классов X^1, X^2 .

Определим по индукции класс $\mathcal{E}_{i,j}$. Пусть $\mathcal{E}_{1,0} = 0$ — класс всех пустых графов, $\mathcal{E}_{0,1} = K$ — класс всех полных графов. Пусть, для определенности, $i > 1$, тогда $\mathcal{E}_{i,j} = D(\mathcal{E}_{1,0}, \mathcal{E}_{i-1,j})$. Например, $\mathcal{E}_{2,0} = D(0, 0)$ — класс двудольных графов, $\mathcal{E}_{0,2} = D(K, K)$ — класс графов, дополнительных к двудольным, $\mathcal{E}_{1,1} = D(0, K)$ — класс расщепляемых графов. В [2] установлено, что если k — наибольшее число, при котором в наследственном классе X содержится хотя бы один из классов $\mathcal{E}_{i,j}$ с $i+j = k$, то $h(X) = 1 - 1/k$. Параметр k называется индексом класса и обозначается $c(X)$.

3. Лемма об индексах

Пусть X, Y — бесконечные наследственные классы графов, $Z = D(X, Y)$.

Лемма 3. *Справедливо равенство $c(Z) = c(X) + c(Y)$.*

Доказательство. Очевидно, что если $\mathcal{E}_{i,j} \subseteq X, \mathcal{E}_{k,l} \subseteq Y$, то $\mathcal{E}_{i+k, j+l} \subseteq D(X, Y)$. Следовательно, $c(Z) \geq c(X) + c(Y)$.

Покажем теперь, что $c(Z) \leq c(X) + c(Y)$. Обозначим $u = c(X), v = c(Y)$ (для определенности $u \leq v$), $w = u + v + 1$, $G_{i,j}$ — граф из $\mathcal{E}_{i,j}$. По условию для любого $0 \leq i \leq u + 1$ существует $G_{i, u+1-i}^X \notin X$, и для любого $0 \leq j \leq v + 1$ существует $G_{j, v+1-j}^Y \notin Y$. Покажем, что для любого $0 \leq l \leq w$ существует $G_{l, w-l}^Z \notin Z$.

Z . Доказательство проведем для $l = w$. Другими словами, построим w -дольный граф, не принадлежащий Z .

Будем называть (k, d) -графом k -дольный граф с d вершинами в каждой доле. Если в каждой доле k -дольного графа выбраны t вершин, то порожденный всеми выбранными вершинами подграф назовем t -подграфом. Будем говорить, что k -дольный граф является d -универсальным, если среди его d -подграфов встречается любой (k, d) -граф.

Обозначим через $S_{k,m}$ такой (k, n) -граф, для которого $n = 2^m$ и вершины каждой доли помечены различными двоичными словами длины m . Вершины с метками $(x_1, \dots, x_m)$ и $(y_1, \dots, y_m)$ из разных долей объявляются смежными тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \equiv m \pmod{2}.$$

Введем функцию $T(k, d, m)$ как наименьшее t , при котором любой t -подграф графа $S_{k,m}$ является d -универсальным. В [2] показано, что для любых k и d существует такое $M(k, d)$, что при всех $m > M(k, d)$ функция $T(k, d, m)$ определена, причем $T(k, d, m) = o(2^m)$ при фиксированных k и d .

Обозначим через d порядок наибольшего графа из множества

$$\{G_{i,u+1-i}^X, G_{j,v+1-j}^Y \mid 0 \leq i \leq u+1, 0 \leq j \leq v+1\}$$

и выберем m таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$m > M(u+1, d), \quad m > M(v+1, d),$$

$$T(u+1, d, m) \leq 2^{m-1}, \tag{1}$$

$$T(v+1, d, m) \leq 2^{m-1}. \tag{2}$$

Покажем, что $S_{w,m} \notin Z$. Пусть $\{A, B\}$ — некоторое разбиение множества вершин графа $S_{w,m}$ на две части. Каждая часть, в свою очередь, разбивается долями графа $S_{w,m}$ на классы.

Если в разбиении каждой из частей A и B найдется $u+1$ класс, каждый из которых состоит не менее, чем из 2^{m-1} вершин, то, в силу (1), каждая из частей содержит $(u+1)$ -дольный подграф, являющийся d -универсальным. Следовательно, $S_{w,m}\langle A \rangle$ и $S_{w,m}\langle B \rangle$ содержат в качестве порожденного графа $G_{u+1,0}^X$, т. е. $S_{w,m}\langle A \rangle, S_{w,m}\langle B \rangle \notin X$.

В противном случае одна из частей, для определенности A , содержит, по крайней мере $v+1$ класс мощности, не меньшей чем 2^{m-1} . Следовательно, в силу (2), часть A содержит $(v+1)$ -дольный подграф, являющийся универсальным. Таким образом, учитывая, что $u \leq v$, получаем, что $S_{w,m}\langle A \rangle$ содержит в качестве порожденных графов $G_{u+1,0}^X$ и $G_{v+1,0}^Y$, т. е. $S_{w,m}\langle A \rangle \notin X, Y$.

Следовательно, не существует разбиения $S_{w,m}$ на две части, одна из которых порождает граф из X , а другая граф из Y , т. е. $S_{w,m} \notin Z$. Значит, $\mathcal{E}_{w,0}$ не содержится в Z .

Аналогично можно показать, что любой класс $\mathcal{E}_{i,j}$ с $i+j = w$ не содержится в Z . Для этого достаточно рассмотреть граф $S_{(i,j),m}$, получающийся из $S_{w,m}$ заменой любых j пустых долей полными. Очевидно, что если некоторый $(u+1)$ -дольный подграф графа $S_{(i,j),m}$ является d -универсальным и имеет r пустых долей, то он содержит в качестве порожденного графа $G_{r,u+1-r}^X$, а всякий $(v+1)$ -дольный подграф

графа $S_{(i,j),m}$, являющийся d -универсальным и имеющий r пустых долей, содержит в качестве порожденных графы $G_{r,u+1-r}^X$ и $G_{r,v+1-r}^Y$. Таким образом, $S_{(i,j),m} \notin Z$, т. е. $\mathcal{E}_{i,j}$ не содержится в Z при $i + j = w$. Следовательно, $c(Z) \leq u + v$, что и требовалось доказать.

4. Универсальные двудольные графы

Построим n -универсальный двудольный граф UD_n следующим образом. Каждому разбиению $n = n_1 + n_2$ поставим в соответствие компоненту UD_{n_1, n_2} графа UD_n , содержащую в качестве порожденных подграфов все графы из D_{n_1, n_2} .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \{1, \dots, n\}, & N &= \langle n_1 \rangle \times \langle n_2 \rangle, \\ N_{k,*} &= \{(i, j) \mid (i, j) \in N, i = k\}, & N_{*,k} &= \{(i, j) \mid (i, j) \in N, j = k\}. \end{aligned}$$

Разобьем множество N произвольным образом на две части, A и B , и положим

$$A_{i,*} = A \cap N_{i,*}, \quad B_{*,j} = B \cap N_{*,j}. \quad (3)$$

Очевидно, семейство $S = \{A_{i,*}, B_{*,j} \mid i \in \langle n_1 \rangle, j \in \langle n_2 \rangle\}$ образует разбиение множества N на классы. Пронумеруем элементы каждого класса из S и обозначим через $F(i, j)$ порядковый номер пары $(i, j) \in N$ в содержащем ее классе. Другими словами,

$$F(i, j) = \begin{cases} k, & \text{если } A_{i,*}(k) = (i, j), (i, j) \in A, \\ k, & \text{если } B_{*,j}(k) = (i, j), (i, j) \in B, \end{cases} \quad (4)$$

где через $A_{i,*}(k)$, $B_{*,j}(k)$ обозначаются k -е элементы соответствующих классов.

Множество вершин компоненты UD_{n_1, n_2} состоит из n секторов $V_1^1, \dots, V_{n_1}^1, V_1^2, \dots, V_{n_2}^2$. Для каждого $i \in \langle n_1 \rangle$ сектор V_i^1 содержит $2^{|A_{i,*}|}$ вершин, помеченных различными двоичными словами длины $|A_{i,*}|$, и для каждого $j \in \langle n_2 \rangle$ сектор V_j^2 содержит $2^{|B_{*,j}|}$ вершин, помеченных словами длины $|B_{*,j}|$. Доли

$$V^1 = \bigcup_{i \in \langle n_1 \rangle} V_i^1, \quad V^2 = \bigcup_{j \in \langle n_2 \rangle} V_j^2$$

порождают в UD_{n_1, n_2} пустые подграфы. Обозначим через $v_{i,j}^\alpha$ вершину из V_i^j , помеченную словом α . Тогда элемент матрицы смежности, соответствующий вершинам $v_{i,1}^\alpha, v_{j,2}^\beta$, определяется следующим образом:

$$M(v_{i,1}^\alpha, v_{j,2}^\beta) = \begin{cases} \alpha(F(i, j)), & (i, j) \in A, \\ \beta(F(i, j)), & (i, j) \in B, \end{cases} \quad (5)$$

где $\alpha(i)$ обозначает i -й символ слова α .

Лемма 4. *Граф UD_n , построенный по формулам (3)–(5), является универсальным двудольным графом.*

Доказательство. Пусть $G = (V_1, V_2, E) \in D_{n_1, n_2}$. Пронумеруем произвольным образом вершины из V_1 от 1 до n_1 , а вершины из V_2 от 1 до n_2 и обозначим через $\bar{M}$ приведенную матрицу смежности графа G , т. е. матрицу, строки которой соответствуют вершинам из V_1 , а столбцы вершинам из V_2 .

Для каждого $i \in \langle n_1 \rangle$ построим двоичное слово η_i длины $|A_{i,*}|$ и для каждого $j \in \langle n_2 \rangle$ двоичное слово μ_j длины $|B_{*,j}|$, полагая

$$\begin{aligned}\eta_i(k) &= \bar{M}(A_{i,*}(k)), & k &= 1, \dots, |A_{i,*}|, \\ \mu_j(k) &= \bar{M}(B_{*,j}(k)), & k &= 1, \dots, |B_{*,j}|,\end{aligned}\quad (6)$$

где $A_{i,*}$ и $B_{*,j}$ определены формулами (3). Тогда подграф, порождаемый вершинами $v_{i,1}^{\eta_i}$, $i = 1, \dots, n_1$, $v_{j,2}^{\mu_j}$, $j = 1, \dots, n_2$, компоненты UD_{n_1, n_2} графа UD_n , изоморфен G . Действительно, пусть, для определенности, $(i, j) \in A$. Используя (4)–(6), получаем, что

$$M(v_{i,1}^{\eta_i}, v_{j,2}^{\mu_j}) = \eta_i(F(i, j)) = \bar{M}(A_{i,*}(F(i, j))) = \bar{M}(i, j).$$

Таким образом, компонента UD_{n_1, n_2} универсальна относительно множества D_{n_1, n_2} . Что и требовалось доказать.

Величина компоненты UD_{n_1, n_2} зависит, очевидно, от способа разбиения множества $N = \langle n_1 \rangle \times \langle n_2 \rangle$ на классы. Следующая лемма описывает разбиение данного множества, используемое в дальнейшем для построения асимптотически оптимальных универсальных графов.

Лемма 5. Для любых чисел $s \geq 0$ и $t \geq 0$, удовлетворяющих соотношению

$$sn_1 + tn_2 = n_1n_2,$$

существует такое разбиение множества $N = \langle n_1 \rangle \times \langle n_2 \rangle$ на две части A и B , что выполняются неравенства

$$\begin{aligned}|A_{i,*}| &\leq \lceil s \rceil, & i &= 1, \dots, n_1, \\ |B_{*,j}| &\leq \lceil t \rceil, & j &= 1, \dots, n_2.\end{aligned}$$

Доказательство. Проведем индукцию по $n = n_1 + n_2$.

Для $n_1 = n_2 = 1$ утверждение леммы очевидно.

Пусть теперь $n > 2$, $n_1 + n_2 = n$, $n_1, n_2 > 0$ и для определенности $n_1 \geq n_2$. Рассмотрим два случая.

Пусть $n_1 = n_2 = m$. В этом случае $s + t = m$. Обозначим через L латинский квадрат порядка m , т. е. квадратную матрицу, содержащую каждое число из $\langle m \rangle$ точно один раз в каждой строке и каждом столбце. Положим

$$A = \{(i, j) \mid 1 \leq L(i, j) \leq \lceil s \rceil\}, \quad B = N - A.$$

Таким образом, по построению $|A_{i,*}| = |A_{*,j}| = \lceil s \rceil$ для всех $(i, j) \in N$, где $A_{*,j} = A \cap N_{*,j}$. Поскольку $|A_{*,j}| + |B_{*,j}| = |N_{*,j}| = m$, то $|B_{*,j}| = m - \lceil s \rceil = \lceil t \rceil$.

Пусть теперь $n_1 > n_2$. Обозначим $m = n_1 - n_2$. Разобьем N на два класса $M_1 = \langle n_2 \rangle \times \langle n_2 \rangle$ и $M_2 = N - M_1$.

Класс M_1 согласно предыдущему пункту можно разбить на две части $A(M_1)$ и $B(M_1)$ таким образом, что $|A_{i,*}(M_1)| = \lceil s \rceil$, $|B_{*,j}(M_1)| = n_2 - \lceil s \rceil$ для всех $(i, j) \in M_1$.

Класс M_2 , очевидно, имеет мощность mn_2 , причем $m + n_2 < n$. Положим $t_1 = m(n_2 - s)/n_2$. Тогда по предположению индукции M_2 можно разбить на две части $A(M_2)$ и $B(M_2)$ таким образом, что $|A_{i,*}(M_2)| \leq \lceil s \rceil$, $|B_{*,j}(M_2)| \leq \lceil t_1 \rceil$ для всех $(i, j) \in M_2$.

Положим

$$B_{*,j} = B_{*,j}(M_1) \cup B_{*,j}(M_2), \quad B = \bigcup_{j \in \langle n_2 \rangle} B_{*,j}, \quad A = N - B.$$

Тогда $A_{i,*} = A_{i,*}(M_1)$ при $1 \leq i \leq n_2$, $A_{i,*} = A_{i,*}(M_2)$ при $n_2 < i \leq n_1$,

$$\begin{aligned} |B_{*,j}| &= |B_{*,j}(M_1)| + |B_{*,j}(M_2)| \leq n_2 - \lceil s \rceil + \lceil m(n_2 - s)/n_2 \rceil \\ &\leq \lceil n_2 - s + m(n_2 - s)/n_2 \rceil = \lceil n_1(n_2 - s)/n_2 \rceil = \lceil t \rceil, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Разбиение множества $N = \langle n_1 \rangle \times \langle n_2 \rangle$, описанное в лемме 5, будем называть (s, t) -разбиением.

5. Универсальные графы композиций

Пусть X^1, X^2 — бесконечные наследственные классы графов, UX^1, UX^2, UD — последовательности универсальных графов для X^1, X^2, D соответственно. Построим теперь последовательность универсальных графов для композиции $X = D(X^1, X^2)$.

Для каждого разбиения $n = n_1 + n_2$ граф UX_n включает компоненту UX_{n_1, n_2} , содержащую в качестве порожденных подграфов все графы из X_n вида $G = H(G_1, G_2)$, где $G_1 \in X_{n_1}^1, G_2 \in X_{n_2}^2, H \in D_{n_1, n_2}$. Обозначим через

$$\{W_i^j \mid i = 1, 2, \dots, n_j\}$$

множество секторов универсального графа $UX_{n_j}^j, j = 1, 2$, через

$$\{V_i^j \mid j = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n_j\}$$

множество секторов графа UD_{n_1, n_2} и через

$$\{U_i^j \mid j = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n_j\}$$

— секторы графа UX_{n_1, n_2} . Положим

$$U_i^j = W_i^j \times V_i^j, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, n_j. \quad (7)$$

Пусть $w_i^j \in W_i^j, v_i^j \in V_i^j, u_i^j = (w_i^j, v_i^j) \in U_i^j$. Обозначим через $M^1, M^2, M^{1,2}, M$ матрицы смежности графов $UX_{n_1}^1, UX_{n_2}^2, UD_{n_1, n_2}, UX_{n_1, n_2}$ соответственно. Тогда элемент матрицы смежности M , соответствующий паре вершин $u_{i_1}^{j_1}, u_{i_2}^{j_2}$ из разных секторов, определяется следующим образом:

$$M(u_{i_1}^{j_1}, u_{i_2}^{j_2}) = \begin{cases} M^j(w_{i_1}^j, w_{i_2}^j), & j_1 = j_2 = j, \\ M^{1,2}(v_{i_1}^{j_1}, v_{i_2}^{j_2}), & j_1 \neq j_2. \end{cases} \quad (8)$$

Теорема 1. Граф UX_n , построенный по формулам (7), (8), является n -универсальным X -графом, где $X = D(X^1, X^2)$.

Доказательство. Пусть $G \in X_n$, причем $G = H(G_1, G_2)$, где $G \in X_{n_1}^1$, $G_2 \in X_{n_2}^2$, $H \in D_{n_1, n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

Обозначим через φ_j вложение графа G_j в граф $UX_{n_j}^j$, $w_i^j = \varphi_j(VG_j) \cap W_i^j$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n_j$. Таким образом, порядок на множестве секторов графа $UX_{n_j}^j$ порождает порядок на множестве вершин $V_j = VG_j$. Обозначим через α_i^j прообраз вершины w_i^j при отображении φ_j . Из доказательства леммы 4 следует, что при любой нумерации вершин в долях V_1 и V_2 существует такое вложение $\varphi_{1,2}$ графа H в граф UD_{n_1, n_2} , что $v_i^j = \varphi_{1,2}(\alpha_i^j) \in V_i^j$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n_j$. Тогда последовательность вершин $\{(w_i^j, v_i^j) \mid j = 1, 2, i = 1, 2, \dots, n_j\}$ порождает в UX_{n_1, n_2} подграф, изоморфный G . Это непосредственно следует из построения UX_{n_1, n_2} и может быть легко проверено с использованием (7), (8). Теорема доказана.

Теперь рассмотрим условия, являющиеся достаточными для асимптотической оптимальности построенной выше последовательности универсальных графов $UX = \{UX_n, n = 1, 2, \dots\}$. Введем обозначения

$$h_1 = h(X^1) = 1 - 1/k_1, \quad h_2 = h(X^2) = 1 - 1/k_2, \quad h = h(X) = 1 - 1/k.$$

Предполагается, что при построении компоненты UD_{n_1, n_2} универсального графа UD_n используется (s, t) -разбиение множества $N = \langle n_1 \rangle \times \langle n_2 \rangle$ с параметрами $s = s(n_1, n_2)$ и $t = n_1(n_2 - s)/n_2$.

Теорема 2. Пусть $X = D(X^1, X^2)$. Если

$$|UX_n^1| = 2^{nh_1/2 + o(n)}, \quad |UX_n^2| = 2^{nh_2/2 + o(n)}, \quad S(n_1, n_2) = \frac{nh}{2} - \frac{n_1 h_1}{2},$$

то последовательность универсальных графов $UX = \{UX_n, n = 1, 2, \dots\}$, построенных по формулам (7), (8), является асимптотически оптимальной.

Доказательство. По построению

$$|UX_n| = \sum_{i=0}^n |UX_{i, n-1}|, \quad |UX_{i, n-1}| = \sum_{j=1}^i |U_j^1| + \sum_{j=1}^{n-i} |U_j^2|, \quad |U_j^k| = W_j^k * |V_j^k|, \quad k = 1, 2.$$

По условию

$$|W_j^1| \leq |UX_i^1| = 2^{ih_1/2 + \varphi_1(i)}, \quad |W_j^2| \leq |UX_{n-i}^2| = 2^{(n-i)h_2/2 + \varphi_2(n-i)},$$

где $\varphi_1(n) = o(n)$, $\varphi_2(n) = o(n)$. Кроме того, согласно лемме 5

$$|V_j^1| \leq 2^{\lceil s \rceil}, \quad |V_j^2| \leq 2^{\lceil t \rceil},$$

где по условию

$$s = nh/2 - ih_1/2, \quad t = i(n - i - s)/(n - i).$$

Таким образом,

$$|U_j^1| \leq 2^{ih_1/2 + \varphi_1(i) + nh/2 - ih_1/2 + 1} \leq 2^{nh/2 + \varphi'_1(n)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi'_1(n) &= \max_{0 \leq i \leq n} \varphi_1(i) + 1, \\ |U_j^2| &\leq 2^{(n-i)h_2/2 + i(n-i-nh/2 + ih_1/2)/(n-i) + \varphi'_2(n)}, \\ \varphi'_2(n) &= \max_{0 \leq i \leq n} \varphi_2(n-i) + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что показатель степени в (10) достигает максимума при $i = nk_1/(k_1 + k_2)$. Таким образом, учитывая, что $k_1 + k_2 = k$ (лемма 3), получаем, что $|U_j^2| \leq 2^{nh/2 + \varphi'_2(n)}$. Следовательно,

$$|UX_{i,n-i}| \leq i2^{nh/2 + \varphi'_1(n)} + (n-i)2^{nh/2 + \varphi'_2(n)} \leq 2^{nh/2 + \varphi_3(n)},$$

где

$$\varphi_3(n) = \max\{\varphi'_1(n), \varphi'_2(n)\} + \log n = o(n).$$

В результате, окончательно получаем, что $|UX_n| \leq 2^{nh/2 + o(n)}$. Поскольку индексы бесконечных классов X^1, X^2 не равны нулю, то $k = k_1 + k_2 \geq 2$, т. е. $h \geq 1/2$. Учитывая, что $|X_n| = 2^{n^2h/2 + o(n^2)}$, находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log |UX_n|}{\log |X_n|} = 1.$$

Теорема доказана.

6. Примеры

6.1. Асимптотически оптимальные универсальные двудольные графы

Очевидно, $D = D(O, O)$, $|O_n| = 1$. Следовательно, $h(O) = 0$, $h(D) = 1/2$. Положим $UO_n = O_n$. Тогда, применяя теорему 2 при $s = n/4$, получаем асимптотически оптимальную последовательность универсальных графов $UD = \{UD_n, n = 1, 2, \dots\}$.

6.2. Асимптотически оптимальные универсальные $\mathcal{E}_{i,j}$ -графы

Оптимальные универсальные графы $U\mathcal{E}_{0,2}, U\mathcal{E}_{1,1}$ строятся аналогично UD . Предположим теперь, что построены все оптимальные графы $U\mathcal{E}_{i,j}$ с $i + j < k$. Пусть для определенности $i > 1$. Тогда, очевидно, $\mathcal{E}_{i,k-i} = D(\mathcal{E}_{1,0}, \mathcal{E}_{i-1,k-i})$, где $\mathcal{E}_{1,0} = O$. Теперь, применяя теорему 2 при $s = n(1 - 1/k)/2$, получаем асимптотически оптимальную последовательность универсальных графов $U\mathcal{E}_{i,k-i}$.

6.3. Асимптотически оптимальные универсальные $\mathcal{G}$ -графы

Нетрудно видеть, что $\mathcal{G}_n = D_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}(\mathcal{G}_{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathcal{G}_{\lceil n/2 \rceil})$, $h(\mathcal{G}) = 1$. Положив $U\mathcal{G}_1 = K_1$ и применяя теорему 2 при $s = n/2 - \lfloor n/2 \rfloor/2$, по индукции получаем последовательность универсальных графов $\{U\mathcal{G}_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Список литературы

1. Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов. *Проблемы киберн.* (1982) **39**, 151–164.
2. Алексеев В. Е. Область значений энтропии наследственных классов графов. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 148–157.
3. Лозин В. В. Вершинное кодирование графов при автоматном декодировании. В кн.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*. Изд-во ГГУ, Горький, 1986, с.73–83.
4. Parsons T. D., Pisanski T. Exotic n -universal graphs. *J. Graph Theory* (1988) **12**, 155–158.
5. Pisanski T. Universal commutator graphs. *Discrete Math.* (1989) **78**, 155–156.
6. Moon J. W. On minimal n -universal graphs. *Proc. Glasgow Math. Soc.* (1965) **7**, 32–33.
7. Chung F. R. K. Universal graphs and induced-universal graphs. *J. Graph Theory* (1990) **14**, 443–454.
8. Beineke L. W., Wilson R. T. A survey of recent results on tournaments. In: *Recent Advances in Graph Theory. Proc. Prague Symp.* 1975, pp. 31–48.

Статья поступила 11.05.1994.