Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мельников, Реализация гиперграфов деревьями минимального диаметра, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 91–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:46:53

Реализация гиперграфов деревьями минимального диаметра

© 1997 г. О. И. Мельников

Предлагается алгоритм построения реализации гиперграфа $H = (VH, EH)$ деревом минимального диаметра трудоемкости

$$O \left(\max \left(|VH|^3, |VH| \sum_{e_i \in EH} |e_i|^2 \right) \right).$$

Пусть задан гиперграф $H = (VH, EH)$. Реализацией гиперграфа H называется [4] любой граф G такой, что $VG = VH$, любое ребро графа G содержится в некотором гиперребре гиперграфа H и для любого гиперребра $e \in EH$ порожденный подграф $G(e)$ является связным. В дальнейшем будем рассматривать гиперграфы, не содержащие петель.

Задачи построения планарных и минимальных по числу ребер реализаций гиперграфов часто возникают в микроэлектронике при проектировании и изготовлении интегральных схем [3, 5].

Как показано в [1, 2, 10], обе эти задачи являются NP-полными. Поэтому возникает вопрос о выделении таких классов гиперграфов, для которых эти задачи полиномиально разрешимы. Один из таких классов образуют так называемые древовидные гиперграфы — гиперграфы, для которых существует реализация деревом. Необходимые условия такой реализации были получены в [6, 7, 9], а достаточные в [8, 11]. Эти условия сформулированы ниже в теореме 1.

Реберным графом гиперграфа H называется граф $L(H)$, множество вершин которого совпадает с множеством гиперребер гиперграфа H , при этом две вершины графа $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им гиперребра гиперграфа.

Граф называется триангулированным, если ни один из его порожденных подграфов не является простым циклом длины $l \geq 4$.

Говорят, что множество $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ попарно смежных гиперребер удовлетворяет условию Хелли, если

$$\bigcap_{i=1}^k e_i \neq \emptyset.$$

Если любое множество попарно смежных гиперребер гиперграфа H удовлетворяет условию Хелли, то говорят, что гиперграф удовлетворяет условию Хелли.

Теорема 1 ([4]). *Реализация связного гиперграфа H деревом существует тогда и только тогда, когда гиперграф H удовлетворяет условию Хелли, а граф $L(H)$ — триангулированный.*

Известен полиномиальный алгоритм [3] проверки возможности построения реализации гиперграфа деревом. Трудоемкость этого алгоритма $O(n^2m)$, где $n = |VH|$, $m = |EH|$.

В настоящей работе предлагается алгоритм, решающий эту задачу за время

$$O\left(\max\left(n^3, n \sum_{e_i \in EH} |e_i|^2\right)\right).$$

В некоторых случаях эта оценка будет лучше, чем $O(n^2m)$. Это, в частности, произойдет, если мощность гиперребер гиперграфа ограничена, а их число растет быстрее, чем число вершин. Кроме того, предлагаемый алгоритм строит дерево наименьшего диаметра.

Рассмотрим вершину $v \in VH$. Через $E(v)$ будем обозначать множество гиперребер, инцидентных вершине v , через $\bar{V}(v)$ — множество вершин, принадлежащих этим гиперребрам, т.е.

$$\bar{V}(v) = \bigcup_{e_i \in E(v)} e_i.$$

Вершина $u \in VH$ будет называться предвисячей, если существует вершина $v \in \bar{V}(v)$, $u \neq v$, такая, что $E(u) \subseteq E(v)$. В этом случае вершина u будет называться вершиной, соседней с предвисячей вершиной. Множество вершин, соседних с v , будем обозначать через $V(v)$.

Очевидно, что если гиперграф H реализуется деревом T , то в H существует предвисячая вершина. Такой вершиной будет, например, любая вершина дерева T , смежная с висячей вершиной.

Пусть v — предвисячая вершина гиперграфа H и $\{u_1, \dots, u_p\}$ — множество вершин, соседних с ней. Рассмотрим гиперграф $H(v) = (VH(v), EH(v))$, где

$$\begin{aligned} VH(v) &= VH \setminus \{u_1, \dots, u_p\}, \\ EH(v) &= \{e'_i\} = \{e'_i = e_i \setminus \{u_1, \dots, u_p\}, e_i \in EH, |e'_i| \neq 1\}. \end{aligned}$$

Будем говорить, что гиперграф $H(v)$ получается из гиперграфа H с помощью преобразования γ , примененного к вершине v .

Теорема 2. *Пусть v — некоторая предвисячая вершина гиперграфа H . Реализация гиперграфа H деревом существует тогда и только тогда, когда существует реализация деревом гиперграфа $H(v)$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть существует реализация гиперграфа H деревом. Тогда для гиперграфа выполняются условия теоремы 1. Если после выполнения преобразования γ получившиеся гиперребра имеют мощность не менее двух, то $L(H) = L(H(v))$. Если же после удаления вершин получилось гиперребро, состоящее из одной вершины, то оно удаляется из гиперребра. Это приводит к удалению из $L(H)$ соответствующей вершины. Но эта вершина смежна лишь с

вершинами, соответствующими гиперребрам $e_i \in E(v)$, т.е. принадлежит лишь одной максимальной клике графа $L(H)$. Следовательно, удаление вершины из $L(H)$ не нарушит триангулируемости реберного графа.

Аналогично можно показать, что для гиперграфа $H(v)$ выполняется условие Хелли.

Докажем достаточность. Пусть существует реализация гиперграфа $H(v)$ деревом T . Тогда реализация гиперграфа H деревом получается добавлением к T всех вершин, соседних с v , и соединением каждой из них ребром с вершиной v .

Теорема доказана.

Следствие 1. *Реализация гиперграфа H деревом существует тогда и только тогда, когда существует такая последовательность гиперграфов $H = H_0, H_1, \dots, H_p$, что*

- каждый из гиперграфов H_i , $i = 0, \dots, p$, имеет предвисячую вершину v_i ;
- каждый из гиперграфов H_i , $i = 0, \dots, p$, получается из гиперграфа H_{i-1} с помощью преобразования γ , примененного к вершине v_{i-1} ;
- после удаления из гиперграфа H_p вершин, соседних с вершиной v_p , получается граф K_1 .

Из следствия 1 вытекает алгоритм проверки возможности реализации гиперграфа H деревом.

Алгоритм А.

- (0) Положить $\tilde{H} = H$.
- (1) Если $\tilde{H} = \emptyset$, то гиперграф H допускает реализацию деревом. Иначе 2.
- (2) Найти в гиперграфе $\tilde{H}$ предвисячую вершину $\tilde{v}$. Если такой вершины не существует, то гиперграф H нельзя реализовать деревом. Иначе 3.
- (3) Найти в гиперграфе $\tilde{H}$ все вершины, соседние с вершиной $\tilde{v}$ и применить к ней преобразование γ . Положить $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{v})$. Далее 1.

Подсчитаем трудоемкость алгоритма А. Пусть гиперграф задается двумя списками: списком гиперребер, инцидентных каждой вершине, и списком вершин, содержащихся в каждом гиперребре. Кроме того, для каждой вершины v вычислена степень $\deg v$, количество гиперребер, содержащих эту вершину.

Оценим трудоемкость проверки существования предвисячей вершины. Рассмотрим вершину v_1 и множество гиперребер $E(v_1) = \{e_1, \dots, e_k\}$. Положим $\bar{v}_1 = 0, \dots, \bar{v}_n = 0$. Пройдем последовательно списки вершин, содержащихся в каждом гиперребре e_j , $j = 1, \dots, k$. Если вершина $v_i \in e_j$, то полагаем, $\bar{v}_i := \bar{v}_j + 1$. Если после просмотра всех гиперребер из $E(v_1)$ окажется, что $\bar{v}_i = 0$ для некоторого $i = 1, \dots, n$, то вершина $v_i \notin \bar{V}(v_1)$. Если $\bar{v}_i = \deg v_i$ и $v_i \neq v_1$, то v_i принадлежит только гиперребрам из $E(v_1)$ и, следовательно, вершина v_1 является предвисячей. Такие вершины v_i образуют множество $V(v_1)$. Если для любой вершины $v_i \in \bar{V}(v_1)$ выполняется неравенство $\bar{v}_i \neq \deg v_i$, то вершина v_1 не является предвисячей.

В том случае, если вершина v_1 не оказалась предвисячей, описанную процедуру нужно провести для вершины v_2 и т.д. Таким образом каждое гиперребро будет

просматриваться столько раз, сколько в нем вершин. Для проверки неравенств $\bar{v}_i \neq \deg v_i$ требуется еще $O(n^2)$ операций. Поэтому общая трудоемкость поиска предвисячей вершины есть

$$O\left(\sum_{e_i \in EH} |e^i|^2 + n^2\right).$$

Тогда трудоемкость отыскания предвисячих вершин во всех гиперграфах H_i есть

$$O\left(\max\left(n^3, n \sum_{e_i \in EH} |e^i|^2\right)\right).$$

Оценим трудоемкость перехода от гиперграфа H_i к гиперграфу H_{i+1} . Эта операция заключается в удалении из гиперребер лишних вершин и в удалении получившихся одновершинных гиперребер. Так как из каждого гиперребра e_i нужно удалить $|e_i|$ вершин, общая трудоемкость построения гиперграфов H_i есть

$$O\left(\sum_{e_i \in EH} |e^i|^2\right).$$

Таким образом, общая трудоемкость проверки условий существования реализации гиперграфа деревом есть

$$O\left(\max\left(n^3, n \sum_{e_i \in EH} |e^i|^2\right)\right).$$

С помощью алгоритма A можно построить последовательности гиперграфов H_i , предвисячих вершин v_i и списков вершин $u_1^i, \dots, u_{l_i}^i$, соседних с каждой из предвисячих вершин v_i . Следующий алгоритм позволяет строить реализацию гиперграфа H деревом.

Алгоритм B .

- (0) Положить $T_{p+1} = K_1$.
- (1) Пусть построено дерево T_i . Если $i = 0$, то T_0 — реализация гиперграфа H . Иначе 2.
- (2) Построить дерево T_{i-1} по правилу

$$\begin{aligned} VT_{i-1} &= VT_i \cup \{u_1^{i-1}, \dots, u_{l_{i-1}}^{i-1}\}, \\ ET_{i-1} &= ET_i \cup \{(v_{i-1} u_1^{i-1}), \dots, (v_{i-1} u_{l_{i-1}}^{i-1})\}. \end{aligned}$$

Далее 1.

Поскольку построение реализации заключается в добавлении ребер, соединяющих предвисячую вершину каждого гиперграфа H_i с соседними с ней вершинами, алгоритм B имеет трудоемкость $O(n)$ операций.

Лемма 1. Пусть $H = (VH, EH)$ — гиперграф, T — его реализация деревом и v — некоторая предвисячая вершина. Тогда существует реализация гиперграфа H деревом $\tilde{T}$, в котором каждая вершина, соседняя с вершиной v , является висячей.

Доказательство. Предположим, что существует вершина w , соседняя с вершиной v , которая не является висячей вершиной дерева T . Рассмотрим цепь $L = (v, \dots, t, w)$ дерева T . Так как вершина w принадлежит только гиперребрам $E(v)$, то смежные с ней в дереве вершины $x_1, \dots, x_k$ (отличные от t) также принадлежат некоторым гиперребрам из $E(v)$. Пусть $x_i \in e_i$, $e_i \in E(v)$, $i = 1, \dots, l$. Поскольку $v \in e_i$, то и каждая вершина цепи $L_i = (v, \dots, t, w, x_i)$ принадлежит e_i , $i = 1, \dots, l$. Поэтому дерево

$$T' = T - (wt) - (wx_1) - \dots - (wx_k) + (tx_1) + \dots + (tx_k) + (wv)$$

также является реализацией гиперграфа H . В этом дереве вершина w является висячей. Прделав последовательность подобных преобразований, можно получить дерево $\tilde{T}$, которое будет реализацией гиперграфа H , и все вершины, соседние с предвисячей вершиной v , будут висячими вершинами дерева.

Лемма доказана.

Лемма 2. Цепь L является единственной реализацией гиперграфа H деревом тогда и только тогда, когда для гиперграфов $H_0, H_1, \dots, H_p$ выполняются условия:

- любой гиперграф H_i , $i = 0, \dots, p-1$, имеет ровно две предвисячие вершины a_i и b_i , причем $|V(a_i)| = 1$, $|V(b_i)| = 1$;
- $H_p = P_3$.

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Пусть гиперграф H_i реализуется цепью P_k , $k \geq 4$. Если для какой-нибудь предвисячей вершины a существует более одной соседней с ней вершины, то по лемме 1 существует реализация гиперграфа H_i деревом, у которого вершина a будет смежна со всеми своими соседними вершинами и эти вершины будут висячими, т. е. дерево не будет цепью.

Далее рассмотрим все возможные случаи.

1. Гиперграф H_i имеет три такие предвисячие вершины v_1, v_2, v_3 , что $v_k \in V(v_l)$ и $V(v_k) \neq V(v_l)$, $k, l = 1, \dots, 3$. В этом случае из леммы 1 вытекает возможность реализации гиперграфа H_i деревом, отличным от цепи.

2. Гиперграф H_i имеет три предвисячие вершины v_1, v_2, v_3 и $V(v_1) = V(v_3) = w$.

Рассмотрим реализацию гиперграфа H_i цепью T_i , в которой w — висячая вершина, а v_1 — вершина, смежная с ней. По определению соседней вершины любое гиперребро e , которое содержит вершины w и v_1 , содержит и вершину v_3 . Это значит, что в (w, v_3) -подцепи цепи T_i любая вершина u принадлежит гиперребру e . Поэтому дерево

$$T'_i = T_i - (wv_1) + (wu)$$

является реализацией гиперграфа H_i , но T'_i не будет цепью.

3. Гиперграф H_i имеет три предвисячие вершины v_1, v_2, v_3 и $V(v_1) = v_3$.

Так как v_3 предвисячая вершина, то существует вершина $w \in V(v_3)$. Пусть $w \neq v_1$. Поскольку v_3 — вершина, соседняя с v_1 , любое гиперребро, содержащее v_3 и w , содержит и v_1 . Следовательно, вершина $w \in V(v_1)$, что противоречит условию $|V(v_1)| = 1$. Поэтому $w = v_1$. Рассмотрим реализацию гиперграфа H_i цепью T_i , в которой v_3 — висячая вершина, v_1 — вершина, смежная с ней и с некоторой вершиной a . Тогда вершины v_3, v_1 и a принадлежат некоторому гиперребру $e \in E(v_1)$, $e \in E(v_3)$. Поэтому дерево $T'_i = T_i - (v_3 v_1) + (v_3 a)$, которое не является цепью, будет реализацией гиперграфа H_i .

Лемма доказана.

Предвисячая вершина называется наибольшей, если она имеет наибольшее количество соседних с ней вершин среди всех предвисячих вершин гиперграфа.

Теорема 3. Пусть T — дерево, построенное с помощью алгоритмов A и B , на каждом шагу которых выбирались наибольшие предвисячие вершины, $\bar{T}$ — любое его поддереву, $H(\bar{T})$ — гиперграф, порожденный множеством вершин $V\bar{T}$. Тогда дерево $\bar{T}$ является реализацией гиперграфа $H(\bar{T})$ деревом с наименьшим диаметром.

Доказательство. Пусть построена последовательность деревьев $K_1 = T_{p+1}, T_p, \dots, T_1$. Для дерева T_p утверждение верно, так как T_p является звездой. Пусть утверждение верно для дерева T_{i+1} , докажем его для дерева T_i . Рассмотрим любое поддерево $\bar{T}_i$ дерева T_i и гиперграф $H(\bar{T}_i)$. Теорема очевидна, если $\bar{T}_i$ не содержит вершину v_i или эта вершина не является смежной с некоторой висячей вершиной диаметальной цепи $L = (a_1, a_2, \dots, b_2, b_1, v_i, c)$ дерева $\bar{T}_i$.

В противном случае рассмотрим дерево $\bar{T}_{i+1} = T_i \setminus \{u_1^i, \dots, u_{k_i}^i\}$, где $\{u_1^i, \dots, u_{k_i}^i\}$ — множество вершин, соседних с вершиной v_i , $u_1^i = c$. Цепь $L' = (a_1, a_2, \dots, b_2, b_1, v_i)$ длины d будет диаметальной цепью этого дерева. Рассмотрим гиперграф H' , порожденный вершинами цепи L' , и гиперграф H'' , порожденный вершинами $VL' \cup \{u_1^i, \dots, u_{k_i}^i\}$. Так как утверждение теоремы верно для гиперграфа T_{i+1} , гиперграф H' нельзя реализовывать деревом меньшего диаметра. Покажем, что и гиперграф H'' нельзя реализовать деревом диаметра, меньшего, чем $d + 1$.

По лемме 2 вершины a_2 и b_1 являются единственными предвисячими вершинами гиперграфа H' . Среди гиперребер, принадлежащих $E(v_i)$, обязательно существует гиперребро, не принадлежащее $E(b_1)$, так как в противном случае $|V(b_1)| > |V(v_i)|$, что противоречит выбору наибольшей вершины на i -м шаге алгоритма. По этой же причине гиперграф H'' имеет в качестве предвисячих только вершины a_2 и v_i . Аналогично с помощью леммы 2 доказывается, что гиперграф, порожденный множеством вершин $VH'' \setminus \{a_1, \dots, a_{k-1}b_1, \dots, b_{l-1}, v_i\}$, будет иметь ровно две предвисячие вершины, a_{k+1} и b_{l+1} , а порожденный множеством $VH'' \setminus \{a_1, \dots, a_{k-1}b_1, \dots, b_{l-1}, v_i\}$ вершины a_{k+1} и b_{l+1} . Это означает, что выбор любой последовательности предвисячих вершин приводит к одному и тому же дереву.

Теорема доказана.

Следствие 2. Если на каждом шаге алгоритмов A и B выбирать наибольшую предвисячую вершину, то построенное дерево будет иметь наименьший диаметр.

Выбор наибольшей предвисячей вершины для каждого гиперграфа H_i требует еще $O(n)$ операций и не увеличивает трудоемкости алгоритмов A и B .

Список литературы

1. Азаренок А. С., Сарванов В. И. Экстремальные реализации гиперграфов. *ДАН БССР* (1986) **30**, №10, 887–889.
2. Азаренок А. С., Сарванов В. И. О сложности планарной реализации гиперграфов. *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук* (1987) №4, 10–12.
3. Амбарян С. Л., Мовсесян А. А., Пилипосян Т. Э. О минимальных реализациях гиперграфов. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ* (1981) **16**, 37–42.
4. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.
5. Петренко А. И., Тетельбаум А. Я., Шрамченко Б. Л. *Автоматизация проектирования электронной аппаратуры (топологический аспект)*. Вища школа, Киев, 1980.
6. Berge C. *Graphs and Hypergraphs*. Amsterdam, 1973.
7. Buneman P. A characterization of rigid circuit graphs. *Discrete Math.* (1974) **9**, №3, 236–242.
8. Flament C. Hypergraphs arbores. *Discrete Math.* (1978) **21**, №3, 223–227.
9. Gavril F. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *J. Comb. Theory* (1974) **16**, 47–56.
10. Johnson D. S., Pollak H. O. Hypergraph planarity and the complexity of drawing Venn diagrams. *J. Graph Theory* (1987) **11**, №3, 309–325.
11. Slater P. A characterization of SOFT hypergraphs. *Canad. Math. Bull.* (1978) **21**, №3, 335–337.

Статья поступила 16.11.1994.