Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Михеев, О регрессивных пересчетах, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 116–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:24:12

О регрессивных пересчетах

© 1997 г. В. Л. Михеев

В работе показывается, что каждое регрессивное множество может иметь либо только один, либо счетное число регрессивных пересчетов (с точностью до эквивалентности), и описаны множества, имеющие только один регрессивный пересчет.

1. Напомним некоторые понятия из [1–3].

Множество α называется регрессивным, если существует пересчет $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ множества α и частично-рекурсивная функция (ч.р.ф.) p такие, что $\alpha \subseteq \delta p$, где δp — область определения функции p , и $p(a_0) = a_0$, $p(a_{n+1}) = a_n$ для всякого $n \geq 0$.

Функция $a(x) = a_x$ называется регрессивным пересчетом множества α (или регрессивной функцией), а функция p функцией, регрессирующей функцию a . Ясно, что δa для регрессивной функции a будет начальным множеством $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ или натуральным рядом чисел $\mathbf{N}$ (такая функция называется начальной). С функцией p связаны ч.р.ф. p^* и $\hat{p}$, определяемые соотношениями

$$p^*(x) = \mu_n(p^{n+1}(x) = p^n(x)),$$

где $p^0(x) = x$, $p^{n+1}(x) = p(p^n(x))$ для всех $n \geq 0$;

$$\hat{p}(x) = \{p^0(x), p^1(x), \dots, p^{p^*(x)}(x)\}.$$

Если a_n, b_n — две начальные разнозначные функции, то $a_n \leq^* b_n$, если $\delta a \subseteq \delta b$ и существует ч.р.ф. p такая, что $p(a_n) = b_n$ для всех n .

Следующее определение обобщает понятие из [2].

Определение 1. Регрессивная функция a_n с регрессирующей функцией p называется редкозначной (или редкой) и множество ее значений $pa = \alpha$ редким, если для всякой ч.р.ф. q

$$\alpha \not\subseteq \delta q \vee q(\alpha) \not\subseteq \alpha \vee \exists m \forall n (n \geq m \Rightarrow p^*q(a_n) \leq n).$$

В дальнейшем мы рассматриваем только регрессивные изолированные (т.е. конечные или иммунные) множества. Нетрудно понять, что если регрессивное множество α конечно мощности n , то оно имеет 2^n регрессивных пересчетов, и если α иммунно, то счетное число регрессивных пересчетов.

Множества α и β рекурсивно эквивалентны, если существует разнозначная ч.р.ф. p такая, что $\alpha \subseteq \delta p$ & $p(\alpha) = \beta$ (в таком случае мы пишем $\alpha \simeq \beta$).

2. Дадим определение эквивалентных функций.

Определение 2. Регрессивные функции a_n, b_n называются эквивалентными, если существует такое m , что

$$\forall n(n \geq m \Rightarrow a_n = b_n).$$

Все регрессивные пересчеты регрессивного множества α разбиваются на классы эквивалентных пересчетов. Возникает вопрос о том, сколько классов эквивалентности пересчетов может существовать у регрессивного множества.

Если α конечно, то ясно, что у него только один класс эквивалентных регрессивных пересчетов. Для бесконечных α этот вопрос решает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть α — иммунное регрессивное множество. Тогда α имеет либо один, либо счетное число классов эквивалентных регрессивных пересчетов. При этом α имеет один с точностью до эквивалентности регрессивный пересчет тогда и только тогда, когда α — редкое множество.

Доказательство. Пусть α — редкое множество, a_n и a'_n — два регрессивных пересчета α , p и p' — соответствующие регрессирующие функции. Определяем ч. р. ф. q следующим образом.

По $x \in \delta p$ находим $\hat{p}(x)$ и для каждого $y \in \hat{p}(x)$ находим $\hat{p}'(y)$. Пусть z таково, что

$$p^*(z) = \max\{p^*(v) \mid \exists y(y \in \hat{p}(x) \& v \in \hat{p}'(y))\}.$$

Положим $q(x) = z$. Очевидно,

$$\alpha \subseteq \delta q \& q(\alpha) \subseteq \alpha.$$

Поэтому существует m такое, что

$$\forall n(n \geq m \Rightarrow p^*q(a_n) = n).$$

Но это означает, что $q(a_n) = a_n$ для всякого $n \geq m$. По построению получаем, что $\{p^*(v) \mid \exists y(y \in \hat{p}(a_n) \& v \in \hat{p}'(y))\} = \{0, 1, \dots, n\} = \{p'^*(v) \mid \exists y(y \in \hat{p}(a_n) \& v \in \hat{p}'(y))\}$.

Отсюда следует, что $a_{m+1} = a'_{m+1}, a_{m+2} = a'_{m+2}, \dots$, т.е. пересчеты a_n и a'_n эквивалентны.

Пусть a_n — не редкая регрессивная функция, $ra = \alpha$, p — регрессирующая для a_n ч.р.ф. Существует ч.р.ф. q такая, что

$$\alpha \subseteq \delta q \& q(\alpha) \subseteq \alpha \& \forall m \exists n(n \geq m \& p^*q(a_m) > m).$$

Можно считать, что $q(x) \geq x$ для всех x и если

$$\varepsilon_q = \{n \mid p^*q(a_n) = n\} = \{n \mid q(a_n) = a_n\},$$

то для всякого $n \in \mathbb{N} \setminus \varepsilon_q$ найдется такое $m \in \varepsilon_q$, что $q(a_n) = a_m$.

Так как множество α иммунно, ε_q бесконечно; пусть e_n — пересчет ε_q в порядке возрастания, $c(x, y)$ — канторовская нумерация пар натуральных чисел. Так как

существует бесконечно много n таких, что $e_{n+1} - e_n > 1$, пусть d_n — следующая функция:

$$d_0 = e_{z_0}, \quad d_1 = e_{z_0+1},$$

где $z_0 = \mu_n(e_{n+1} - e_n > 1)$,

$$d_{2m} = e_{z_m}, \quad d_{2m+1} = e_{z_m+1},$$

где $z_m = \mu_n(n > z_{m-1} \& e_{n+1} - e_n - 1)$ для $m > 0$. Положим $f(n) = e(d(n))$.

В $a_0, \dots, a_n, \dots$ меняем местами числа из пар вида $(a_{f(2c(i,k))+1}, a_{f(2c(i,k)+1)})$ в отрезке

$$a_{f(2c(i,k))+1}, a_{f(2c(i,k))+2}, \dots, a_{f(2c(i,k)+1)}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Получаем пересчет $b_i(0), b_i(1), \dots, b_i(n), \dots$. Нетрудно показать, что этот пересчет регрессивен для всякого $i \geq 0$.

Пересчеты $b_i(n)$ и $b_j(n)$ не эквивалентны при $i \neq j$. Таким образом, существует не менее $\aleph_0$ классов эквивалентности регрессивных пересчетов множества α . Так как количество всех пересчетов множества α равно $\aleph_0$, получаем, что α имеет в точности $\aleph_0$ неэквивалентных регрессивных пересчетов.

3. Пусть a_n, b_n — начальные разнозначные функции. Тогда a_n рекурсивно эквивалентна b_n (пишем $a_n \simeq b_n$), если существует ч.р.ф. p такая, что $\rho a \subseteq \delta p$ и $p(a_n) = b_n$ для всех n .

Из [1] следует, что для начальных разнозначных функций a_n, b_n имеет место следующий факт:

$$a_n \simeq b_n \iff a_n \leq^* b_n \& b_n \leq^* a_n.$$

Определение 3. Графиком функции p назовем множество

$$\Gamma_p = \{c(x, y) \mid x \in \delta p \& p(x) = y\}.$$

В [1] показано, что если a_n — регрессивная функция и $a_n \simeq b_n$, то b_n — регрессивная функция. Следующая теорема показывает, когда две регрессивные функции рекурсивно эквивалентны.

Теорема 2. Пусть a_n, b_n — два регрессивных пересчета. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $a_n \simeq b_n$;

(b) $\rho a \simeq \rho b$;

(c) $\Gamma_a \simeq \Gamma_b$.

Доказательство. Покажем, что (b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\rho a \simeq \rho b$ посредством ч.р.ф. r , p и q — регрессирующие ч.р.ф. для a_n и b_n , соответственно.

Если дано a_n , то находим

$$\gamma_n = \bigcup \{ \hat{q}(z) \mid \exists y (y \in \hat{p}(a_n)) \& z = r(y) \}.$$

Пусть $x \in \gamma_n$ таково, что

$$q^*(x) = \max \{ q^*(z) \mid z \in \gamma_n \}.$$

Тогда $b_n = q^{q^*(x)-n}(x)$. Поэтому по a_n эффективно находится значение функции $f'(a_n) = b_n$ и, следовательно, f' имеет ч.р. продолжение f . Получаем, что $a_n \leq^* b_n$.

В силу симметрии $b_n \leq^* a_n$. Следовательно, $a_n \simeq b_n$.

Покажем, что (с) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\Gamma_a \simeq \Gamma_b$ посредством ч.р.ф. r , p — функция, регрессирующая a_n . Положим

$$q(x) = c_1(r(c(p^*(x), x))),$$

где $c_1(c(x, y)) = y$. Тогда q — ч.р.ф. и $\rho a \simeq \rho b$ посредством q .

Наконец, покажем, что (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $a_n \simeq b_n$ посредством ч.р.ф. r . Положим

$$q(c(x, y)) = c(x, r(y)).$$

Тогда q — разностная ч.р.ф. и $\Gamma_a \simeq \Gamma_b$ посредством q .

Следствие 1. Если a_n, b_n — два регрессивных пересчета одного и того же множества, то они сами и их графики рекурсивно эквивалентны.

4. Рассмотрим вопрос о сводимости графиков регрессивных пересчетов.

Теорема 3. Пусть a_n, b_n — два регрессивных пересчета, $\rho a \simeq \rho b$. Если $N \setminus \rho a$ рекурсивно перечислимо, то $\Gamma_a \leq_1 \Gamma_b$.

Доказательство. Пусть p — ч.р.ф., регрессирующая функцию a . Тогда

$$c(x, y) \in N \setminus \Gamma_a \iff y \in N \setminus \rho a \vee p^*(y) \notin x.$$

Поэтому дополнение до Γ_a рекурсивно перечислимо. Согласно [4] $\Gamma_a \leq_1 \Gamma_b$.

Следствие 2. Графики любых двух регрессивных пересчетов изолированного множества с рекурсивно перечислимым дополнением 1-эквивалентны.

Доказательство. Если a_n и b_n — два регрессивных пересчета множества α с рекурсивно перечислимым дополнением, то $\Gamma_a \equiv_1 \Gamma_b$ по теореме 3.

Таким образом, графики регрессивных пересчетов регрессивного множества с рекурсивно перечислимым дополнением 1-эквивалентны.

Автору неизвестно, может ли регрессивное множество иметь регрессивные пересчеты, графики которых не 1-эквивалентны.

Список литературы

1. Dekker J. C. E. The minimum of two regressive isol. *Math. Z.* (1964) **83**, №4, 345–366.
2. Ellentuck E. On the degrees of universal regressive isol. *Math. Scand.* (1973) **32**, №2, 145–164.
3. Роджерс Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. Мир, Москва, 1972.
4. Mikheev V. L. Algorithmical isol structure. In: *VIII International Congress of Log., Method and Philos. of Sciences, Vol.5, Part 1*, Москва, 1987, с.158–160.

Статья поступила 22.11.1994.