Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Орлов, О полноте систем конечных автоматов, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 2, 74–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:33:39

О полноте систем конечных автоматов

© 1996 г. В. А. Орлов

Для произвольного алфавита A построено рекурсивное множество базисов из автоматов, имеющих один выход и не более двух входов, с алгоритмически неразрешимой проблемой выявления их полноты. Так как базисы автоматов с одним входом и одним выходом неполны, то результат в этом смысле является окончательным.

Под базисом будем понимать конечную систему конечных автоматов. Для простоты изложения всюду в дальнейшем будем рассматривать инициальные автоматы. Схемой в базисе называется логическая сеть, построенная из элементов базиса при помощи операций суперпозиции и обратной связи (если она применима) [1]. Известно, что каждая схема реализует некоторый ограниченно-детерминированный (о.-д.) оператор.

Базис в алфавите A называется полным, если любой о.-д. оператор в алфавите A можно реализовать схемой в этом базисе. Базис, в котором максимальное число входов (выходов) его элементов равно r (j), назовем (r, j) -базисом. Как известно [2], задача выявления полноты автоматных базисов алгоритмически неразрешима. В [3] построено рекурсивное множество $(3, 1)$ -базисов, в котором подмножество всех полных базисов не рекурсивно.

Основной целью работы является доказательство изложенного в [4] результата о существовании для произвольного алфавита множества $(2, 1)$ -базисов с не рекурсивным подмножеством всех полных базисов. Результат в этом смысле окончательный, так как $(1, 1)$ -базисы неполны.

В работе используется существование систем продукций Поста с алгоритмически неразрешимыми проблемами выводимости (см., например, [5]).

Система продукций Поста задается своим алфавитом $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_h\}$ и системой базисных продукций Pr_i

$$P_i W \rightarrow W R_i, \quad 1 \leq i \leq t,$$

где P_i, R_i — некоторые слова, а W — произвольное слово в алфавите A_1 . Произвести над произвольным словом Q с префиксом P_i продукцию Pr_i — это значит отбросить префикс P_i слова Q и к оставшейся части приписать суффикс R_i . Считается, что к не имеющему префикса P_i слову продукция Pr_i неприменима.

Говорят, что слово U выводимо из слова V , если существует конечная цепочка $V, V_1, \dots, V_r, U$ слов таких, что каждое слово получается из предыдущего применением некоторой продукции.

Справедливо следующее утверждение ([5], стр. 310).

Предложение 1. Существуют система productions Поста и слово R_0 такие, что множество всех выводимых из R_0 слов является нерекурсивным.

Отметим, что существуют системы productions Поста с алгоритмически неразрешимой проблемой выводимости, у которых все слова P_i и Q_i непустые. В дальнейшем будем рассматривать такую систему productions и слово, выводимое из слова R_0 , будем называть просто выводимым.

Поведение автомата будем задавать посредством системы команд вида

$$q_i x \rightarrow q_j y,$$

где q_i, q_j — состояния автомата, x — входной набор, y — выходной набор. Команды имеют следующий смысл. Пусть в некоторый момент времени автомат находится в состоянии q_i и воспринимает входной набор x . Тогда в соответствии с командой $q_i x \rightarrow q_j y$ автомат выдаст набор y и в следующий момент времени перейдет в состояние q_j .

Для сокращения записи системы команд примем следующее соглашение: не выписанные явно команды имеют одинаковую правую часть, ее будем указывать после символа $\Rightarrow$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать автоматы с одним выходом. Пусть K и L — произвольные автоматы. Назовем sK -цепочкой ($s \geq 0$) схему, состоящую из s автоматов K , выход каждого из которых (кроме последнего) соединен с первым входом последующего. Первый вход первого элемента sK -цепочки назовем ее главным входом. Выход sK -цепочки соединим с главным входом jL -цепочки. Полученную таким образом схему назовем (sK, jL) -цепочкой.

Символом $a_{i,Q}$ будем обозначать i -ю букву произвольного слова Q , а символом $|Q|$ его длину. Бесконечную последовательность букв будем называть сверхсловом. Периодическое сверхслово $PQQ \dots Q \dots$ будем обозначать через $PQ\sim$.

Вначале, рассмотрим моделирование вывода слов в системе productions Поста в $(1, 1)$ -базисах.

Пусть $A_2 = A_1 \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. В этой части будем рассматривать автоматы в алфавите A_2 .

Сверхслово $\alpha^j R \beta\sim$, где R — произвольное слово в алфавите A_1 и $j \geq 1$, назовем j -кодом слова R . Кодом слова R назовем его j -код при любом j . Любое сверхслово вида $P\delta\sim$, где P — слово в алфавите A_2 , назовем δ -сверхсловом.

Автомат с r входами будем называть r -автоматом; r -автомат с k состояниями будем называть (r, k) -автоматом.

Пусть D_0 — автономный $(0, |R_0| + 2)$ -автомат, реализующий 1-код слова R_0 .

Productions $P\Gamma_i$, $1 \leq i \leq t$, сопоставим $(1, |P_i| + |R_i| + 3)$ -автомат D_i , определяемый следующей системой команд:

$$\begin{aligned} q^0 \alpha &\rightarrow q_0 \alpha; & q_0 \alpha &\rightarrow q_0 \alpha; & q_{j-1} a_{j, P_i} &\rightarrow q_j \alpha, & 1 \leq j \leq |P_i|; \\ q_{|P_i|} a_s &\rightarrow q_{|P_i|} a_s, & 1 \leq s \leq h; \\ q_{|P_i|} \beta &\rightarrow q_{|P_i|+1} a_{1, R_i}; & q_{|P_i|+t} \beta &\rightarrow q_{|P_i|+t+1} a_{t+1, R_i}, & 1 \leq t \leq |R_i| - 2; \\ q_{|P_i|+|R_i|-1} \beta &\rightarrow q_{|P_i|+|R_i|} a_{|R_i|, R_i}; & q_{|P_i|+|R_i|} \beta &\rightarrow q_{|P_i|+|R_i|} \beta; & \Rightarrow q^* \delta. \end{aligned}$$

Отметим, что в состоянии, отличном от состояния q^* , автомат D_i реализует функцию, существенно зависящую от входной переменной. В любом своем состоянии автомат D_i буквы γ и δ преобразует в букву δ и переходит (или остается) в "плохое" состояние q^* . Из состояния q^* автомат D_i выйти не может.

Любой из автоматов D_i , $1 \leq i \leq t$, будем обозначать через D .
Легко проверить, что имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Автомат D преобразует сверхслово, содержащее букву γ или δ , в δ -сверхслово.

Лемма 2. Автомат D_i , $1 \leq i \leq t$, преобразует код произвольного слова R в алфавите A_1 либо в код слова, получающегося из слова R применением продукции P_{r_i} , либо в δ -сверхслово.

Отметим, что первый случай имеет место, когда слово R имеет префикс P_i .

Из лемм 1 и 2 индукцией по длине (D_0, sD) -цепочки доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Выходное сверхслово (D_0, sD) -цепочки есть либо код выводимого слова, либо δ -сверхслово.

Буквы произвольного алфавита занумеруем числами от 0 до $k - 1$, где k — мощность этого алфавита, и в дальнейшем будем рассматривать алфавиты E_k из этих чисел.

Вначале рассмотрим булев алфавит E_2 .

Пусть V , N и Z — булевы автоматы, реализующие дизъюнкцию, отрицание и единичную задержку, соответственно. Отметим, что базис $\{V, N, Z\}$ является полным.

Буквам алфавита A_2 сопоставим булевы наборы длины $h + 2$. Букве a_i (буквам α , β) сопоставим набор, $(i + 1)$ -я ($(h + 2)$ -я, 1-я) компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны 0. Букве δ сопоставим набор, все компоненты которого равны 1. Букве γ сопоставим все оставшиеся наборы. Букву γ , все компоненты которой равны нулю, будем называть нулевой. В дальнейшем такие булевы наборы будем называть соответствующими им буквами.

Через B_0 и B_i будем обозначать булевы 1-автоматы с поведением аналогичным поведению автоматов D_0 и D_i , соответственно, с учетом описанной выше кодировки букв алфавита A_2 .

Любой из автоматов B_i , $1 \leq i \leq t$, будем обозначать через B .

Произвольному слову R в алфавите A_1 сопоставим булев 2-автомат N_R (Z_R) со следующими свойствами. Если сверхслово на его первом входе является кодом слова R , то он эквивалентен автомату N (Z). В противном случае автомат N_R (Z_R) переходит в “плохое” состояние и выдает δ -сверхслово.

За техническими подробностями построения автоматов B_0 , B_i , N_R и Z_R отсылаем к [6] и [7].

Отсюда и из леммы 3 получаем следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть слово R не является выводимым. Тогда при любом s выходное сверхслово (B_0, sB, N_R) -цепочки $((B_0, sB, Z_R)$ -цепочки) является δ -сверхсловом.

Из кодировки букв алфавита A_2 и свойства дизъюнкции вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Если сверхслово на главном входе (sV)-цепочки не содержит нулевой буквы, то выходное сверхслово этой цепочки совпадает с входным или содержит букву γ или δ .

Произвольному слову R в алфавите A_1 сопоставим $(2, 1)$ -базис BSR , состоящий из автоматов $B_0, B_i, 1 \leq i \leq t, V, N_R$ и Z_R .

Теорема 1. Базис BSR полон тогда и только тогда, когда слово R выводимо.

Доказательство. Пусть слово R выводимо. Тогда существует (B_0, sB) -цепочка G , выходное сверхслово которой есть код слова R . Соединим первые входы автоматов N_R и Z_R с выходом цепочки G . Из определения автоматов N_R и Z_R и полноты базиса $\{V, N, Z\}$ следует полнота базиса BSR .

Пусть теперь слово R не является выводимым и пусть S — произвольная схема в базисе BSR , реализующая автономный автомат с выходным сверхсловом, являющимся кодом слова R . В схеме S выделим содержащую выходной элемент максимальную цепочку G , в которой первый вход каждого элемента соединен с выходом предыдущего.

Первый элемент цепочки G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) он является автоматом B_0 ;
- (2) его первый вход e присоединен к некоторому входу d системы S ;
- (3) вход e присоединен к выходу некоторого элемента цепочки G .

Базис BSR выбран так, что случай 3 не имеет места.

В случае 2 на вход d подадим δ -сверхслово. Отсюда и из лемм 4 и 5 следует, что выходное сверхслово схемы S либо является кодом выводимого слова, либо содержит букву γ или δ . Полученное противоречие с определением схемы S доказывает неполноту базиса BSR .

Теорема доказана.

Замечание 1. Функциональную часть базисов BSR можно расширить, добавив, например, реализующий импликацию элемент.

В случае произвольного алфавита E_k буквы a_i, α, β и δ алфавита A_2 будем кодировать числами 0 и $k - 1$ аналогично булеву случаю, заменяя 1 на $k - 1$. Булевы автоматы V, N и Z заменим автоматами M, N_k, Z_k в алфавите E_k , реализующими функции $\max(x, y), x + k - 1 \pmod k$ и единичную задержку в алфавите E_k , соответственно. Отметим, что базис $\{M, N_k, Z_k\}$ является полным. Дальнейшее доказательство аналогично булеву случаю.

Замечание 2. Небольшие изменения вышеизложенного позволяют для произвольного алфавита строить рекурсивные множества $(2, 1)$ -базисов с алгоритмически неразрешимой проблемой выявления их аппроксимационной полноты [8].

Список литературы

1. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.
2. Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Докл. АН СССР* (1964) **155**, №1, 35–37.
3. Орлов В. А. Простое доказательство алгоритмической неразрешимости некоторых задач о полноте автоматных базисов. *Кибернетика* (1973), №4, 109–113.
4. Орлов В. А. О полноте автоматных базисов. В кн.: *Методы и системы технической диагностики*. Саратовский ун-т. Саратов, 1993, 134.
5. Мальцев А. И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1965.
6. Орлов В. А. Алгоритмическая неразрешимость задачи нахождения асимптотического поведения функции Шеннона при реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в произвольном базисе. *Докл. АН СССР* (1971) **196**, №5, 973–977.
7. Орлов В. А. О сложности реализации ограниченно-детерминированных операторов схемами в автоматных базисах. *Пробл. киберн.* (1972) **26**, 141–182.
8. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А.С. *Элементы теории автоматов*. Изд-во МГУ, Москва, 1978.

Статья поступила 15.06.1994.