Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 52–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:08:42

Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде

© 1997 г. В. И. Афанасьев

Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями, m_n — условное математическое ожидание ξ_n относительно случайной среды. Доказана теорема о сходимости последовательности случайных процессов $\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \xi_n > 0\}$ при $n \rightarrow \infty$ по распределению в соответствующем функциональном пространстве.

1. Пусть последовательности случайных величин

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

одинаково распределены и независимы при разных n . Введем производящие функции

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ называется ветвящимся процессом в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, если

$$\mathbf{M}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(для простоты изложения будем считать, что $\xi_0 = 1$).

Ветвящиеся процессы в случайной среде классифицируются в зависимости от знака $\mathbf{M} \ln f'_0(1)$. В данной работе рассматривается критический случай, когда $\mathbf{M} \ln f'_0(1) = 0$. Пусть $T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения $\{\xi_n\}$. В работе [1] для критического ветвящегося процесса в случайной среде, который, как известно, вырождается с вероятностью 1, установлена следующая условная предельная теорема: при $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln \xi_{[nt]} / (\sigma \sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid T > n\} \Rightarrow \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (1)$$

где $W^+(t)$ — броуновская извилина [2], а знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость конечномерных распределений.

Важную роль при изучении ветвящихся процессов в случайной среде играет последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$, где

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = f''_{i-1}(1) / (2f'_{i-1}(1)^2), \quad i \in \mathbf{N},$$

и связанное с этой последовательностью случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

При этом существенное место в доказательстве занимают условные предельные теоремы для случайных блужданий.

В критическом случае случайное блуждание $\{S_n\}$ имеет нулевой снос, то есть $\mathbf{M}X_1 = 0$. Соотношение (1) установлено при выполнении условий:

- (а) конечны $\mathbf{M}X_1^2$, $\mathbf{M}\eta_1$, $\mathbf{M}X_1\eta_1$, причем $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2 > 0$;
- (б) производящие функции $f_n(s)$ дробно-линейны.

Соотношение (1) обобщил М. В. Козлов [3]. Им доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{\ln \xi_{[nt]} / (\sigma\sqrt{n}), t \in [0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (2)$$

где знак $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода [4], при этом не требуется выполнения условия (б), но в добавление к условию (а) предполагается, что $0 < \mathbf{M}|X_1|^r < \infty$ при любом $r \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{M}\exp\{-X_1\} < \infty$, $\mathbf{M}X_1 \exp\{-X_1\} < \infty$.

Рассмотрим произвольный ветвящийся процесс в случайной среде $\{\xi_n\}$. При фиксированной случайной среде $\{\pi_n\}$ процесс $\{\xi_n\}$ является неоднородным ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона, и, следовательно, случайная последовательность $\{\xi_n/m_n\}$, где $m_n = \mathbf{M}_\pi \xi_n = \exp S_n$ (символы $\mathbf{M}_\pi$ и $\mathbf{P}_\pi$ означают условное математическое ожидание и условную вероятность относительно случайной среды), образует неотрицательный мартингал. В силу этого нетрудно показать, что без фиксирования среды при любом $t > 0$ с вероятностью единица существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{[nt]}/m_{[nt]}$, не зависящий от t . Обозначим его W . В критическом случае $\{\xi_n\}$ вырождается с вероятностью 1 и, следовательно, $W = 0$ п.н. Поэтому естественно рассматривать последовательность условных случайных процессов $\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid T > n\}$, $n \in \mathbf{N}_0$. Для нее справедлива следующая функциональная предельная теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$, выполнены условия (а), (б), и $\mathbf{M}\exp\{-X_1\} < \infty$, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_{[nt]}/m_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (3)$$

где μ — случайный процесс, реализации которого есть положительные постоянные на $(0, 1]$, сходимость в (3) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода при любом фиксированном $u \in (0, 1)$.

По-видимому, результаты, аналогичные сформулированной теореме, справедливы для докритических и надкритических ветвящихся процессов в случайной среде. Несмотря на то, что эта теорема установлена в частном случае дробно-линейных производящих функций, некоторые части доказательства, как легко заметить, справедливы для произвольных ветвящихся процессов в случайной среде. Недостает по существу точной асимптотики вероятности невырождения (см. [5]).

Соотношение (3) является более сильным утверждением, чем соотношение (2). Вывод соотношения (2) из (3) в условиях сформулированной теоремы осуществляется в п. 5.

2. Нам потребуется несколько вспомогательных результатов для случайного блуждания с нулевым сносом. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты, то есть

$$\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}, \quad \tau_2 = \inf\{n > \tau_1: S_n < S_{\tau_1}\}, \dots$$

Положим

$$Y_n(t) = S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), \quad t \in [0, \infty), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Лемма 1. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$. Тогда при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}, \quad (4)$$

где $W^+(t)$ при $t > 1$ означает стандартное броуновское движение, начинающееся из $W^+(1)$; сходимость в (4) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[0, \infty)$ с топологией Скорохода [5].

Доказательство. В лемме 2 из [1] установлена слабая сходимость конечномерных распределений:

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \Rightarrow \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}. \quad (5)$$

Для функции $f \in D[u, v]$, $0 \leq u < v < \infty$, введем модуль непрерывности

$$w_f(\delta, u, v) = \sup |f(s) - f(t)|,$$

где супремум берется по всем s, t таким, что $s, t \in [u, v]$, $|t - s| < \delta$, $\delta \in (0, \infty)$. Поскольку траектории $W^+(t)$ непрерывны п.н. на $[0, \infty)$, ввиду соотношения (5) необходимым и достаточным условием справедливости соотношения (4) является следующее (см. [6, гл. VI, §3b]): при любом $v \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (6)$$

В работе [6] установлено соотношение (4) при $j = 0$. Следовательно, соотношение (6) справедливо при $j = 0$. Покажем справедливость (6) при любом $j \in \mathbf{N}$. Положим

$$S'_n = S_{\tau_j+n} - S_{\tau_j}, \quad \tau'_1 = \tau_{j+1} - \tau_j, \quad Y'_n(t) = S'_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}).$$

Последовательность случайных величин $\{S'_n\}$ образует точную вероятностную копию исходного случайного блуждания $\{S_n\}$ и не зависит от $S_1, \dots, S_{\tau_j}$. Случайная величина τ'_1 является первым строгим нижним лестничным моментом для $\{S'_n\}$. В условиях доказываемой леммы в работе [5] показано, что при любых фиксированных $j \in \mathbf{N}_0$, $\lambda \in (0, 1]$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \sim \frac{c_1}{\sqrt{\lambda n}}, \quad (7)$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от n, j, λ . Поэтому для справедливости соотношения (6) достаточно установить, что при любом $v \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n/2, n < \tau_{j+1}) = 0,$$

но

$$\{\tau_j \leq n/2, n < \tau_{j+1}\} \subset \{\tau_j \leq n/2, \tau'_1 > n/2\},$$

значит, достаточно показать, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon, \tau_j \leq n/2 \mid \tau'_1 > n/2) = 0, \quad (8)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $v > 1/2$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon, \tau_j \leq n/2 \mid \tau'_1 > n/2) \leq P_1(n, \delta) + P_2(n, \delta), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n, \delta) &= \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, \tau_j/n) \geq \varepsilon/2 \mid \tau'_1 > n/2), \\ P_2(n, \delta) &= \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, \tau_j/n, v) \geq \varepsilon/2, \tau_i/n \leq 1/2 \mid \tau'_1 > n/2). \end{aligned}$$

Ввиду независимости $S_1, \dots, S_{\tau_j}$ от τ'_1

$$P_1(n, \delta) = \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, \tau_j/n) \geq \varepsilon/2),$$

кроме того,

$$\mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, \tau_j/n) \geq \varepsilon/2) \leq \mathbf{P}\left(2 \max_{1 \leq i \leq \tau_j} |S_i|/(\sigma\sqrt{n}) \geq \varepsilon/2\right).$$

Последняя вероятность стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поскольку $\tau_j < \infty$ п.н. Таким образом,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_1(n, \delta) = 0. \quad (10)$$

Далее, поскольку $[ns] - [nt] \leq n(s - t) + 1$, при $\tau_j/n < v$

$$\begin{aligned} w_{Y_j}(\delta, \tau_j/n, v) &= \sup |S_{[ns]}/(\sigma\sqrt{n}) - S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n})| \\ &= \sup |S'_{[ns]-\tau_j}/(\sigma\sqrt{n}) - S'_{[nt]-\tau_j}/(\sigma\sqrt{n})| \leq w_{Y'_n}(\delta + 1/n, 0, v), \end{aligned}$$

где супремум берется по всем s, t таким, что $s, t \in [t_j/n, v]$, $|t - s| < \delta$. Пусть n для простоты изложения четно, тогда

$$w_{Y'_n}(\delta + 1/n, 0, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} w_{Y'_{n/2}}(2(\delta + 1/n), 0, 2v)$$

и, следовательно, при $\tau_j/n < v$

$$w_{Y_n}(\delta, \tau_j/n, v) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w_{Y'_{n/2}}(2(\delta + 1/n), 0, 2v).$$

Поэтому

$$P_2(n, \delta) \leq \mathbf{P}(w'_{Y_{n/2}}(2(\delta + 1/n), 0, 2v)/\sqrt{2} \geq \varepsilon/2 \mid \tau'_1 > n/2).$$

Откуда, ввиду справедливости соотношения (6) при $j = 0$, следует, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_2(n, \delta) = 0. \quad (11)$$

Из соотношений (9)–(11) получаем (6) при любом $j \in \mathbf{N}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть случайная величина X_1 имеет невырожденное распределение и $\mathbf{M}X_1 = 0$. Условие $\mathbf{M} \exp\{-S_{\tau_1}\} < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \exp\{-X_1\} < \infty$.

Доказательство. Запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{M}e^{-S_{\tau_1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_1}}, \tau_1 = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\mathbf{P}(S_{n-1} \leq x, \tau_1 > n-1) \int_{-\infty}^{-x} e^{-(x+y)} d\mathbf{P}(X_n \leq y). \end{aligned} \quad (12)$$

Если $\mathbf{M} \exp\{-X_1\} = \infty$, то для любого x

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{-y} d\mathbf{P}(X_n \leq y) = \infty,$$

откуда в силу соотношения (12) вытекает, что $\mathbf{M} \exp\{-S_{\tau_1}\} = \infty$.

Предположим теперь, что $\mathbf{M} \exp\{-X_1\} < \infty$. Из соотношения (12) находим, что

$$\mathbf{M}e^{-S_{\tau_1}} \leq \mathbf{M}e^{-X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(e^{-S_{n-1}}, \tau_1 > n-1).$$

Последний ряд в силу известного факторизационного тождества (см. [8, гл.18])

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{M}(e^{-\lambda S_n}, \tau_1 > n) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\mathbf{P}(S_n \leq x) \right\}, \quad |s| < 1, \lambda \geq 0,$$

и тауберовой теоремы для степенных рядов (см. [8, гл.13]) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-x} d\mathbf{P}(S_n \leq x).$$

Очевидно,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} d\mathbf{P}(S_n \leq x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \mathbf{P}(k \leq S_n < k+1). \quad (13)$$

Известно (см. [9, гл.3, §2]), что если случайная величина X_1 имеет невырожденное распределение, то при любых $k \in \mathbf{N}_0$, $n \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}(k \leq S_n < k+1) \leq \frac{c}{\sqrt{n}}, \quad (14)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от k, n . Из соотношений (13)–(14) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-x} d\mathbf{P}(S_n \leq x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \frac{c}{\sqrt{n}} = \frac{c}{1 - e^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Наряду с последовательностью случайных величин X_i , $i \in \mathbf{N}$, рассмотрим последовательность неотрицательных случайных величин η_i , $i \in \mathbf{N}$, предполагая при этом, что пары $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. Положим

$$a_n = e^{-S_n}, \quad b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}, \quad b_0 = 0, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

В работе [1] установлено, что если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнено условие (а), то при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{a_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \Rightarrow 0, \quad (15)$$

$$\{b_{[nt]}, t \in (0, 1] \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \Rightarrow \nu_j, \quad (16)$$

где ν_j — случайный процесс, реализации которого есть постоянные на $(0, 1]$, причем процессы $\{a_{[nt]}, t \in (0, 1]\}$, $\{b_{[nt]}, t \in (0, 1]\}$ и $\{Y_n(t), t \in [0, \infty)\}$, рассматриваемые при условии $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$, асимптотически независимы при $n \rightarrow \infty$ (в смысле конечномерных распределений).

Лемма 3. Пусть $\mathbf{M}X_1 = 0$, выполнено условие (а) и $\mathbf{M} \exp\{-X_1\} < \infty$, тогда при любых фиксированных $j \in \mathbf{N}_0$, λ, t таких, что $0 < \lambda < t < 1$, справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(a_n - a_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Положим при $n \in \mathbf{N}_0$

$$\eta'_n = \eta'_{\tau_j + n}, \quad a'_n = e^{-S'_n}, \quad b'_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta'_{i+1} e^{-S'_i}, \quad b'_0 = 0.$$

Поскольку $0 < \lambda < t < 1$, при $\tau_j \leq \lambda n$ справедливо соотношение

$$b_n - b_{[nt]} = e^{-S_{\tau_j}} (b'_{n-\tau_j} - b'_{[nt]-\tau_j}).$$

Исходя из этого, запишем представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(b_k - b_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\ &= (\mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}))^{-1} \sum_{k=j}^{[\lambda n]} \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_j}} (b'_{n-k} - b'_{[nt]-k}), \tau_j = k, \tau'_1 > n - k). \end{aligned} \quad (19)$$

Случайные величины со штрихами распределены так же, как соответствующие случайные величины без штрихов, и не зависят от случайного вектора (τ_j, S_{τ_j}) , поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_j}}(b'_{n-k} - b'_{[nt]-k}), \tau_j = k, \tau'_1 > n - k) \\ = \mathbf{M}(e^{-S_{\tau_j}}, \tau_j = k) \mathbf{M}(b_{n-k} - b_{[nt]-k}, \tau_1 > n - k). \end{aligned} \quad (20)$$

В лемме 1 из [5] установлено, что если $\mathbf{M}X_1 = 0$ и выполнено условие (а), то

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_m \mid \tau_1 > n) = 0. \quad (21)$$

Из соотношения (21) видно, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \infty)$ существует такое $n_0 \in \mathbf{N}$, что при всех $n > n_0$ и $k \leq \lambda n$ справедливо соотношение

$$\mathbf{M}(b_{n-k} - b_{[nt]-k} \mid \tau_1 > n - k) \leq \varepsilon. \quad (22)$$

Из соотношений (19), (20), (22) следует, что при $n > n_0$

$$\mathbf{M}(b_n - b_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \leq \frac{\varepsilon \mathbf{M} \exp\{-S_{\tau_j}\} \mathbf{P}(\tau_1 > n(1 - \lambda))}{\mathbf{P}(\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1})}.$$

Откуда, учитывая соотношение (7), получаем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(b_n - b_{[nt]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \leq \frac{\varepsilon \mathbf{M} \exp\{-S_{\tau_j}\}}{\sqrt{1 - \lambda}}.$$

Ввиду леммы 2 и произвольности ε это приводит к соотношению (17). Соотношение (18) вытекает из (17), если положить $\eta_i \equiv 1$, $i \in \mathbf{N}$. Лемма 3 доказана.

3. Доказательству теоремы предположим ряд лемм, касающихся ветвящихся процессов в случайной среде, но доказываемых при более слабых ограничениях.

Лемма 4. Пусть $\{\xi_n\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и пусть с вероятностью 1 случайные величины x_1, η_1 конечны, тогда при любых $m, k \in \mathbf{N}_0$, $m \geq k$, справедливо соотношение

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_m e^{-S_m} - \xi_k e^{-S_k})^2 = 2(b_m - b_k) + a_m - a_k.$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_m e^{-S_m} - \xi_k e^{-S_k})^2 = \sum_{i=k}^{m-1} \zeta_{i+1} e^{-S_i}, \quad (23)$$

где $\zeta_i = 2\eta_i + e^{-X_i} - 1$, $i \in \mathbf{N}$. В свою очередь, соотношение (23) установим сначала для $k = 0$. Очевидно,

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_m e^{-S_m} - 1)^2 = \mathbf{M}_\pi(\mathbf{M}_\pi((\xi_m e^{-S_m} - 1)^2 \mid \xi_{m-1})). \quad (24)$$

Случайная величина ξ_m при условии, что фиксирована среда и известна случайная величина ξ_{m-1} , представляет собою сумму ξ_{m-1} независимых случайных величин

с производящей функцией $f_{m-1}(s)$ и, следовательно, математическим ожиданием $f'_{m-1}(1) = \exp X_m$ и дисперсией

$$f''_{m-1}(1) + f'_{m-1}(1) - f'_{m-1}(1)^2 = 2\eta_m e^{2X_m} + e^{X_m} - e^{2X_m} = \zeta_m e^{2X_m},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\pi((\xi_m e^{-S_m} - 1)^2 \mid \xi_{m-1}) &= \mathbf{M}_\pi(((\xi_m e^{-S_m} - \xi_{m-1} e^{-S_{m-1}}) + (\xi_{m-1} e^{-S_{m-1}} - 1))^2 \mid \xi_{m-1}) \\ &= \mathbf{M}_\pi((\xi_m e^{-S_m} - \xi_{m-1} e^{-S_{m-1}})^2 \mid \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1} e^{-S_{m-1}} - 1)^2 \\ &= e^{-2S_m} \mathbf{M}_\pi((\xi_m - \xi_{m-1} e^{X_m})^2 \mid \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1} e^{-S_{m-1}} - 1)^2 \\ &= \xi_{m-1} e^{-2X_m} \zeta_m e^{2X_m} + (\xi_{m-1} e^{-S_{m-1}} - 1)^2. \end{aligned}$$

Отсюда, вспоминая соотношение (24), получаем, что

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_m e^{-S_m} - 1)^2 = \mathbf{M}_\pi(\xi_{m-1} e^{-S_{m-1}} - 1)^2 + \zeta_m e^{-S_m},$$

что доказывает соотношение (23) при $k = 0$. Пусть теперь $k \in \mathbf{N}$. Очевидно,

$$\mathbf{M}_\pi(\xi_m e^{-S_m} - \xi_k e^{-S_k})^2 = \mathbf{M}_\pi(\mathbf{M}_\pi((\xi_m e^{-S_m} - \xi_k e^{-S_k})^2 \mid \xi_k)). \quad (25)$$

Случайная величина ξ_m при условии, что фиксирована среда и известна случайная величина ξ_k , представляет собой сумму ξ_k независимых случайных величин, каждая из которых имеет такое же распределение, как и число потомков в m -м поколении, появившихся от одной частицы из k -го поколения, и, следовательно, математическое ожидание $\exp\{S_m - S_k\}$ и дисперсию (см. доказанное при $k = 0$ соотношение (23))

$$e^{2(S_m - S_k)} \sum_{i=k}^{m-1} \zeta_{i+1} e^{-(S_i - S_k)}.$$

В силу сказанного

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\pi((\xi_m e^{-S_m} - \xi_k e^{-S_k})^2 \mid \xi_k) &= e^{-2S_m} \mathbf{M}_\pi((\xi_m - \xi_k e^{S_m - S_k})^2 \mid \xi_k) \\ &= \xi_k e^{-S_k} \sum_{i=k}^{m-1} \zeta_{i+1} e^{-S_i}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из соотношений (25), (26) следует соотношение (23) при произвольном $k \in \mathbf{N}$. Осталось заметить, что

$$\sum_{i=k}^{m-1} \zeta_{i+1} e^{-S_i} = 2 \sum_{i=k}^{m-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} + \sum_{i=k}^{m-1} (e^{-S_{i+1}} - e^{-S_i}) = 2(b_m - b_k) + a_m - a_k.$$

Лемма 4 доказана.

Положим

$$X_n(t) = \xi_{[nt]} e^{-S_{[nt]}}, \quad t \in (0, 1], \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Лемма 5. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и выполнено условие (а), тогда при любых фиксированных $j \in \mathbf{N}_0$, $t \in (0, 1]$, $x \in (0, \infty)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}),$$

если хотя бы один из этих пределов существует.

Доказательство. Если $t = 1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $t < 1$. Запишем представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_n(t) > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ &= \mathbf{P}(X_n(t) > x, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) + \mathbf{P}(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Для справедливости леммы достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0. \quad (27)$$

Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n) \\ &= \sum_{k > x \exp S_{[nt]}} \mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x, \xi_{[nt]} = k) \tilde{\mathbf{P}}_\pi(T \leq n - [nt])^k \end{aligned} \quad (28)$$

(тильда над знаком вероятности означает, что рассматривается ветвящийся процесс, начинающийся с одной частицы из $[nt]$ -го поколения). В лемме 2 из [10] установлено, что если с вероятностью 1 случайные величины X_1, η_1 конечны, то

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) \geq \frac{1}{a_n + 2b_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_\pi(T \leq n - [nt]) &\leq 1 - \left(e^{-(S_n - S_{[nt]})} + 2 \sum_{i=0}^{n-[nt]-1} \eta_{[nt]+i+1} e^{-(S_{[nt]+i} - S_{[nt]})} \right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{a_{[nt]}}{a_n + 2(b_n - b_{[nt]})}. \end{aligned}$$

Отсюда при $k > x \exp S_{[nt]}$ получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_\pi(T \leq n - [nt])^k &\leq \left(1 - \frac{a_{[nt]}}{a_n + 2(b_n - b_{[nt]})} \right)^{x \exp\{S_{[nt]}\}} \\ &\leq \exp\{-x/(a_n + 2(b_n - b_{[nt]}))\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (28), (29) следует, что

$$\mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n) \leq \exp\{-x/(a_n + 2(b_n - b_{[nt]}))\}.$$

Поскольку $x > 0$, выражение под знаком экспоненты отрицательно с вероятностью единица, отсюда в силу соотношений (15), (16) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\exp\{-x/(a_n + 2(b_n - b_{[nt]}))\} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0,$$

что влечет соотношение (27), ибо

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{P}(X_n(t) > x, [nt] < T \leq n \mid \tau_j < n < \tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

В [5] для критического ветвящегося процесса в случайной среде при выполнении условий (а), (б) установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (30)$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от n .

Лемма 6. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и выполнены условия (а), (б). Пусть $\{A_n\}$ — такая последовательность событий, что при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = a_j, \quad (31)$$

тогда существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Доказательство. Запишем представление

$$\mathbf{P}(A_n \mid T > n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(\tau_j \leq n < \tau_{j+1})}{\mathbf{P}(T > n)} \mathbf{P}(A_n, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}).$$

Пусть $S_m(n)$ — сумма первых m слагаемых последнего ряда, а $R_m(n)$ — соответствующий остаток ряда. Тогда

$$\mathbf{P}(A_n \mid T > n) = S_m(n) + R_m(n). \quad (32)$$

В силу соотношений (7), (30), (31)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_m(n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{m-1} a_j.$$

Очевидно, $S_m(n) \leq 1$ при всех $n, m \in \mathbf{N}$, поэтому существует конечный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_m(n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j. \quad (33)$$

В [5] в условиях доказываемой леммы показано, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{P}(T > n)} \sum_{j=m}^{\infty} \mathbf{P}(T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0,$$

поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_m(n) = 0. \quad (34)$$

Из соотношений (32), (33) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n \mid T > n) \\ &\leq \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} R_m(n), \end{aligned}$$

откуда, учитывая (34), получаем утверждение леммы 6.

Лемма 7. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n\}$ и выполнены условия (а), (b), тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, \infty)\},$$

где $Y_n(t)$ — случайный процесс, определенный в начале раздела 2.

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$,

$$t_1, x_1, \dots, t_m, x_m, \quad 0 < t_1 < \dots < t_m < \infty, \quad x_i \in (-\infty, \infty), \quad i = 1, \dots, m.$$

В [10] показано, что при условии (b) справедливо соотношение

$$\mathbf{P}_\pi(T > n) = \frac{1}{a_n + b_n}, \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{M} \left(\frac{1}{a_n + b_n} \chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

(χ_A — индикатор события A). Ввиду соотношений (15), (16), леммы 1 и асимптотической независимости при $n \rightarrow \infty$ процессов $a_{[nt]}$, $b_{[nt]}$, $Y_n(t)$, рассматриваемых при условии $\tau_j \leq n < \tau_{j+1}$, находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\frac{1}{a_n + b_n} \chi_{\{Y_n(t_i) \leq x_i, i=1, \dots, m\}} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left(\frac{1}{a_n + b_n} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) \\ = \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (36)$$

Из соотношений (35), (36) и леммы 6 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid T > n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} \mathbf{P}(W^+(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m). \quad (37)$$

Приведенные рассуждения справедливы и в случае, когда $x_i = \infty, i = 1, \dots, m$, поэтому

$$\frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} = 1. \quad (38)$$

Из соотношений (37), (38) получаем, что

$$\{Y_n(t), t \in [0, \infty) \mid T > n\} \Rightarrow \{W^+(t), t \in [0, \infty)\}. \quad (39)$$

Зафиксируем $v, \varepsilon \in (0, \infty)$. В силу леммы 1 при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}) = 0.$$

Из последнего соотношения и леммы 6 получаем, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Y_n}(\delta, 0, v) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (40)$$

Из соотношений (39), (40) вытекает (см. [6, гл.6, §3b]) утверждение леммы 7.

4. В этом разделе мы докажем теорему 1. В [1] установлено, что если выполнено условие (b), то при любых $n, k \in \mathbf{N}$ $\mathbf{P}_\pi(\xi_n = k) = p_n q_n^k$, где $p_n = a_n b_n^{-1} (a_n + b_n)^{-1}$, $q_n = 1 - a_n b_n^{-1} (a_n + b_n)^{-1}$. Зафиксируем $t \in (0, 1]$, $x \in [0, \infty)$. Очевидно,

$$\mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x) = \frac{p_{[nt]} q_{[nt]}^{[x \exp S_{[nt]}]}}{1 - q_{[nt]}} = \frac{1}{a_{[nt]} + b_{[nt]}} \left(1 - \frac{a_{[nt]}}{a_{[nt]} + b_{[nt]}} \right)^{[x/a_{[nt]}]}.$$

Поскольку последнее выражение ограничено единицей, при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$ в силу соотношений (15), (16) (в [1] показано, что $\nu_j > 0$ п. н.) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{P}_\pi(X_n(t) > x) \mid \tau_j < n \leq \tau_{j+1}) = \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} \exp\{-x/\nu_j\}.$$

Но математическое ожидание в левой части равно $\mathbf{P}(X_n(t) > x \mid \tau_j < n \leq \tau_{j+1})$, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x \mid \tau_j < n \leq \tau_{j+1}) = \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} \exp\{-x/\nu_j\}. \quad (41)$$

Из соотношения (41), лемм 5 и 6 находим, что при $x \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > x \mid T > n) = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M} \frac{1}{\nu_j} \exp\{-x/\nu_j\}. \quad (42)$$

Поскольку $\mathbf{P}(X_n(t) > 0 \mid T > n) = 1$ при любом $n \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n(t) > 0 \mid T > n) = 1. \quad (43)$$

Соотношения (38), (42), (43) означают, что при любом $t \in (0, 1]$ последовательность случайных величин $\{X_n(t) \mid T > n\}$ сходится по распределению к одной и той же положительной случайной величине. Обозначим ее μ .

Рассмотрим случайный процесс, сопоставляющий каждому $t \in (0, 1]$ именно эту случайную величину μ . Обозначим его той же буквой и установим для него следующее соотношение: при любом $u \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{X_n(t), t \in [u, 1] \mid T > n\} \Rightarrow \mu. \quad (44)$$

В силу сказанного для справедливости (44) достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid T > n \right) = 0. \quad (45)$$

По лемме 6 это соотношение справедливо, если при любом фиксированном $j \in \mathbf{N}_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = 0,$$

что вследствие (7) эквивалентно соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) = 0, \quad (46)$$

где $\lambda = u/2$. Поскольку случайная последовательность $\{\xi_n e^{-S_n}\}$, рассматриваемая при фиксированной случайной среде, является мартингалом, в силу неравенства Дуба

$$\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M}_\pi (X_n(1) - X_n(u))^2.$$

Отсюда, учитывая лемму 4, получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) \\ &= \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \varepsilon \right) \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} (\mathbf{M}_\pi (X_n(1) - X_n(u))^2 \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{M} (2(b_n - b_{[nu]}) + a_n - a_{[nu]} \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}). \end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 3, приходим к соотношению (46) и, следовательно, к (45). Таким образом, соотношение (44) доказано.

Заметим далее, что при любых фиксированных $u \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{X_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0 \quad (47)$$

в силу соотношения (45) и включения

$$\{w_{X_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon\} \subset \left\{ \sup_{t \in [u, 1]} |X_n(t) - X_n(u)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Утверждение теоремы следует из соотношений (44), (47) ввиду теорем 15.1 и 15.5 из [4].

5. В заключение покажем, как в условиях доказанной теоремы из соотношения (3) выводится соотношение (2). Слабая сходимость конечномерных распределений (см. (1)) установлена в [1]. Приведем новое доказательство, опирающееся на доказанную теорему. Зафиксируем $m \in \mathbf{N}$ и $t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_m, x_m$ такие, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$, $x_i \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, \dots, m$. Возьмем произвольное $u \in (0, t_1)$. В силу теоремы 1 при любых a_1, a_2 , $a_1 < a_2$, таких, что $\mathbf{P}(\mu = a_1) = \mathbf{P}(\mu = a_2) = 0$, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(a_1 \leq \inf_{t \in [u, 1]} X_n(t) \leq \sup_{t \in [u, 1]} X_n(t) \leq a_2 \mid T > n) = \mathbf{P}(a_1 \leq \mu \leq a_2).$$

Зафиксируем $p \in (0, 1)$. Поскольку $0 < \mu < \infty$ п.н., подберем конечные положительные a_1, a_2 и $n_0 \in \mathbf{N}$ так, чтобы при всех $n > n_0$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{P}(a_1 \leq X_n(t) \leq a_2 \mid T > n) > 1 - p. \quad (48)$$

Положим при $T > n$

$$Z_n(t) = \ln \xi_{[nt]} / (\sigma \sqrt{n}), \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}.$$

При $T > n$, $t \in [0, 1]$

$$Z_n(t) = Y_n(y) + \ln X_n(t) / (\sigma \sqrt{n}), \quad (49)$$

поэтому из соотношения (48) следует, что при всех $n > n_0$

$$\mathbf{P}\left(Y_n(t) + \frac{\ln a_1}{\sigma \sqrt{n}} \leq Z_n(t) \leq Y_n(t) + \frac{\ln a_2}{\sigma \sqrt{n}} \mid T > n\right) > 1 - p \quad (50)$$

и

$$\mathbf{P}\left(w_{Y_n}(\delta, u, 1) - \frac{\ln(a_2/a_1)}{\sigma \sqrt{n}} \leq w_{Z_n}(\delta, u, 1) \leq w_{Y_n}(\delta, u, 1) + \frac{\ln(a_1/a_2)}{\sigma \sqrt{n}} \mid T > n\right) > 1 - p. \quad (51)$$

Из соотношения (50) видно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(Y_n(t_i) \leq x_i - \frac{\ln a_2}{\sigma\sqrt{n}}, i = 1, \dots, m \mid T > n \right) - p \\ \leq \mathbf{P}(Z_n(t_i) \leq x_i, i = 1, \dots, m \mid T > n) \\ \leq \mathbf{P} \left(Y_n(t_i) \leq x_i - \frac{\ln a_1}{\sigma\sqrt{n}}, i = 1, \dots, m \mid T > n \right) + p. \end{aligned}$$

Переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $p \rightarrow 0$ и учитывая лемму 7, получаем соотношение (1). Аналогично из соотношения (51) находим, что при любых $u \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (52)$$

Покажем, что при любом $\varepsilon \in (0, \infty)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) = 0. \quad (53)$$

Очевидно, при любом $u \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, 1) \geq \varepsilon \mid T > n) \\ \leq \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, u) \geq \varepsilon/2 \mid T > n) + \mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, u, 1) \geq \varepsilon/2 \mid T > n). \end{aligned} \quad (54)$$

Поскольку (см. (49)) при $T > n$, $u \in [0, 1]$

$$w_{Z_n}(\delta, 0, u) \leq \sup_{t \in [0, u]} Z_n(t) \leq \sup_{t \in [0, u]} Y_n(t) + \left(\ln \sup_{t \in [0, u]} X_n(t) \right) / (\sigma\sqrt{n}),$$

то

$$\mathbf{P}(w_{Z_n}(\delta, 0, u) \geq \varepsilon/2 \mid T > n) \leq Q_1(n, u) + Q_2(n, u), \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(n, u) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} Y_n(t) \geq \frac{\varepsilon}{4} \mid T > n \right), \\ Q_2(n, u) &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} X_n(t) \geq \exp\{\varepsilon\sigma\sqrt{n}/4\} \mid T > n \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, u) = \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} W^+(t) \geq \frac{\varepsilon}{4} \right),$$

откуда, учитывая непрерывность траекторий $W^+(t)$ и соотношение $W^+(0) = 0$, получаем, что

$$\lim_{u \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, u) = 0. \quad (56)$$

В силу неравенства Дуба для произвольных $u \in [0, 1]$, $j \in \mathbf{N}_0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} X_n(t) \geq \exp\{\varepsilon \sigma \sqrt{n}/4\} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ \leq \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \xi_i e^{-S_i} \geq \exp\{\varepsilon \sigma \sqrt{n}/4\} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ = \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_\pi \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \xi_i e^{-S_i} \geq \exp\{\varepsilon \sigma \sqrt{n}/4\} \right) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) \\ \leq \exp\{-\varepsilon \sigma \sqrt{n}/4\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, u]} X_n(t) \geq \exp\{\varepsilon \sigma \sqrt{n}/4\} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right) = 0.$$

Применяя теперь лемму 6, находим, что при любом $u \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_2(n, u) = 0. \quad (57)$$

Из соотношений (52), (54)–(57) вытекает (53). Из соотношений (1), (53) в силу теорем 15.1 и 15.5 из [4] следует соотношение (2).

Список литературы

1. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.
2. Durrett R. T., Iglehart D. L., Miller D. R. Weak convergence to brownian meander and brownian excursion. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №1, 117–129.
3. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Докл. РАН* (1995) **344**, №1, 12–15.
4. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
5. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813 – 825.
6. Жакод Ж., Ширяев А. Н. *Предельные теоремы для случайных процессов*, т.1, Наука, Москва, 1994.
7. Hooghiemstra G. Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the M/G/1 queue. *J. Appl. Probab.* (1983) **20**, №3, 675–688.
8. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т.2, Мир, Москва, 1984.
9. Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
10. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12** №1, 39–46.

Статья поступила 09.02.1996.

Переработанный вариант поступил 21.05.1997.