Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Вереникин, Э. Э. Гасанов, Об автоматной детерминизации множеств сверхслов, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 84–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:58:19

Об автоматной детерминизации множеств сверхслов

© 2006 г. А. Г. Вереникин, Э. Э. Гасанов

В работе вводится понятие детерминирующего автомата, который для каждого поданного ему на вход сверхслова из заданного множества, начиная с некоторого шага, в каждый момент t выдает значение входного слова в момент $t + 1$, то есть предугадывает входное сверхслово. Получен критерий детерминируемости заданного множества сверхслов — множества, для которого существует детерминирующий автомат. Приведен наилучший по порядку метод построения детерминирующего автомата для произвольного детерминируемого множества сверхслов. Для некоторых детерминируемых множеств построены оптимальные и асимптотически оптимальные детерминирующие автоматы.

1. Введение

Пусть дано некоторое множество сверхслов в алфавите $\{0, 1\}$. Автомат детерминирует это множество, если для каждого входного слова из этого множества автомат с некоторого момента времени начинает на своем выходе предугадывать значение входного слова в следующий момент. Множество сверхслов детерминируемо, если существует детерминирующий его автомат. Показано, что детерминируемы только множества, состоящие из периодических слов с ограниченным периодом. Под сложностью детерминирующего автомата понимается число его состояний. Для произвольного детерминируемого множества получен порядок сложности детерминирующего его автомата. Для множества сверхслов с фиксированным периодом получено асимптотическое поведение функции сложности детерминирующего автомата.

Авторы выражают благодарность В. Б. Кудрявцеву за помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Будем использовать следующие обозначения:

$\{0, 1\}^n$ — множество всех слов длины n в алфавите $\{0, 1\}$,

$\{0, 1\}^*$ — множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, по определению будем считать, что пустое слово Λ принадлежит $\{0, 1\}^*$,

$\{0, 1\}^\infty$ — множество всех сверхслов в алфавите $\{0, 1\}$,

$|a|$ — длина слова $a \in \{0, 1\}^*$, по определению $|\Lambda| = 0$,

$a(n)$ — n -й элемент слова или сверхслова a ,

$a|_n$ — префикс a длины n , то есть $a|_n = a(1) \dots a(n)$,

${}_n a$ — суффикс слова a длины n , то есть ${}_n a = a(|a| - n + 1) \dots a(|a|)$,

ab — конкатенация слов a и b ,

$a^n = \underbrace{a \dots a}_n$ — конкатенация n слов a , здесь n — натуральное число и может быть равно ∞ ,

$\hat{a}$ — слово a , записанное в обратном порядке, то есть $\hat{a} = a(|a|)a(|a| - 1) \dots a(1)$,

$m | n$ означает, что m — делитель n , здесь m, n — натуральные числа.

В статье рассматриваются конечные автоматы следующего вида:

$$V = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \psi, \varphi),$$

где $\{0, 1\}$ — входной алфавит, Q — множество состояний, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счётного множества, $\{0, 1\}$ — выходной алфавит, $\psi: \{0, 1\} \times Q \rightarrow Q$ — функция переходов, $\varphi: 0, 1 \times Q \rightarrow \{0, 1\}$ — функция выходов. $V(q_0)$ — инициальный автомат с начальным состоянием q_0 . Таким образом, если на вход автомату $V(q_0)$ подается сверхслово x , на выходе получается сверхслово y , и q_t означает состояние автомата в момент времени t , то

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi(x(t), q_{t-1}), \\ q_t &= \psi(x(t), q_{t-1}). \end{aligned}$$

Расширим функции ψ и φ на $\{0, 1\}^* \times Q$, а именно, если на вход автомату $V(q_0)$ подается слово или сверхслово x , то $\psi(x|_t, q_0)$, $\varphi(x|_t, q_0)$ означают состояние, в котором находится автомат, и выходное значение в момент времени t , соответственно.

Будем говорить, что инициальный автомат $V(q_0)$ детерминизирует множество сверхслов $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$, если для любого $a \in \mathcal{A}$ существует такое N , что для любого $t \geq N$ выполняется равенство $\varphi(a|_t, q_0) = a(t + 1)$.

Множество сверхслов $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$ называется детерминизируемым, если существует детерминирующий его автомат.

Введем следующие обозначения:

$\omega(V)$ — число состояний автомата V ,

$\mathbb{G}(\mathcal{A})$ — множество всех конечных инициальных автоматов, детерминирующих множество сверхслов $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$,

$\omega(\mathcal{A}) = \min_{G \in \mathbb{G}(\mathcal{A})} \omega(G)$ — минимальное число состояний, достаточное автомату, чтобы детерминизировать $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$, если $\mathbb{G}(\mathcal{A}) = \emptyset$, то полагаем, что $\omega(\mathcal{A}) = \infty$,

$\mathcal{A}^* = \{0, 1\}^* \mathcal{A} = \{ba : b \in \{0, 1\}^*, a \in \mathcal{A}\}$ — множество, полученное прибавлением к $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$ всевозможных начальных отрезков конечной длины,

$\langle a \rangle$ — множество, состоящее из всех циклических сдвигов слова $a \in \{0, 1\}^*$,

$$\langle A \rangle = \bigcup_{a \in A} \langle a \rangle, \text{ где } A \subset \{0, 1\}^*,$$

$T(a), T'(a) \in \{0, 1\}^*$ — периодическая и предпериодическая части сверхслова $a \in \{0, 1\}^\infty$ минимальной длины такие, что $a = T'(a)(T(a))^\infty$,

$T(\mathcal{A}) = \{T(a) : a \in \mathcal{A}\}, T'(\mathcal{A}) = \{T'(a) : a \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{A}$ — некоторое множество периодических сверхслов,

$\tau(a), \tau'(a)$ — соответственно, период и предпериод минимальной длины сверхслова $a \in \{0, 1\}^\infty$, в указанных выше обозначениях $\tau(a) = |T(a)|$ и $\tau'(a) = |T'(a)|$.

$\|\mathcal{A}\|_\gamma = |\{a \in \langle T(\mathcal{A}) \rangle : a(1) = \gamma\}|$, где $\mathcal{A}$ — некоторое множество периодических сверхслов, $\gamma \in \{0, 1\}$, иными словами $\|\mathcal{A}\|_\gamma$ — суммарное число вхождений буквы γ в слова из $T(\mathcal{A})$,

$$\|\mathcal{A}\| = \max_{\gamma \in \{0, 1\}} \|\mathcal{A}\|_\gamma.$$

Определим три параметрических множества сверхслов:

$\mathcal{A}_{\tau|n} = \{a \in \{0, 1\}^\infty : \tau(a) \mid n, \tau'(a) = 0\}$ — множество периодических сверхслов с периодом n и нулевым предпериодом,

$\mathcal{A}_{\tau=n} = \{a \in \{0, 1\}^\infty : \tau(a) = n, \tau'(a) = 0\}$ — множество периодических сверхслов с минимальным периодом n и нулевым предпериодом,

$\mathcal{A}_{\tau \leq n} = \{a \in \{0, 1\}^\infty : \tau(a) \leq n, \tau'(a) = 0\}$ — множество периодических сверхслов с периодом, не большим n , и нулевым предпериодом.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Множество сверхслов $\mathcal{A} \subset \{0, 1\}^\infty$ детерминизируемо тогда и только тогда, когда оно состоит из периодических сверхслов с ограниченным периодом.

Теорема 2. Если $\mathcal{A}$ детерминизируемо, то

$$|T(\mathcal{A})|/2 \leq \|\mathcal{A}\| \leq \omega(\mathcal{A}^*) \leq |T(\mathcal{A})|.$$

Теорема 3. Если $n \geq 1$, то $\omega(\mathcal{A}_{\tau|n}) = \omega(\mathcal{A}_{\tau|n}^*) = 2^{n-1}$, если $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{A}_{\tau=n}) &\sim \omega(\mathcal{A}_{\tau=n}^*) \sim 2^{n-1}, \\ 2^n &\lesssim \omega(\mathcal{A}_{\tau \leq n}) \lesssim 3 \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

3. Критерий детерминизируемости и порядок сложности детерминизирующего автомата

Лемма 1. Если $\mathcal{A}$ — некоторое множество периодических сверхслов, то

$$\omega(\mathcal{A}) \geq \|\mathcal{A}\|.$$

Доказательство. Пусть f — такая частичная детерминированная функция, определенная на множестве всех начал сверхслов (включая сами сверхслова) из $\mathcal{A}$, что для любого $x \in \mathcal{A}$ найдется такое $N_x \geq 0$, что выполнено условие

$$f(x)(t + N_x) = x(t + N_x + 1), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Если существует доопределение f до всюду определенной ограниченно-детерминированной функции, то оно будет задавать инициальный автомат из $\mathbb{G}(\mathcal{A})$. При этом число состояний у такого автомата не меньше числа различных остаточных функций функции f (см. [1, 2]). Будем обозначать через f_a остаточную функцию для f , соответствующую слову $a \in \{0, 1\}^*$, то есть $f_a(x) \equiv f(ax)$.

Фиксируем $\gamma \in \{0, 1\}$. Возьмем такие $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, что

$$T(a_1) \neq T(a_2), \quad T(a_1)(1) = T(a_2)(1) = \gamma.$$

Пусть

$$b_1 = (T(a_1))^{\tau(a_2)}, \quad b_2 = (T(a_2))^{\tau(a_1)}.$$

Тогда $|b_1| = |b_2|$ и b_1, b_2 представляются в виде

$$b_1 = \gamma b c_1, \quad b_2 = \gamma b c_2, \quad (2)$$

где $|c_1| = |c_2| > 0$, $c_1(1) \neq c_2(1)$. Действительно, если предположить, что $b_1 = b_2$, то получим, что либо $T(a_1) = T(a_2)$, либо $T(a_1)$ и $T(a_2)$ периодические, чего не может быть, так как $T(a_i)$ — минимальная периодическая часть сверхслова a_i , $i = 1, 2$.

Пусть $f_i = f_{a_i|_{t_i}}$, где

$$t_i = \min\{\tau'(a_i) + l\tau(a_i) \geq N_{a_i} : l \in \mathbb{N}\}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из (1) и (2) следует, что

$$f_1(\gamma b) = b c_1(1) \neq b c_2(1) = f_2(\gamma b),$$

то есть, f_1 и f_2 отличимы.

Рассмотрим $a \in \mathcal{A}$. Поскольку $T(a)$ — непериодическое слово, справедливо равенство $|\langle T(a) \rangle| = |T(a)|$. Обозначим $k = \|\{a\}\|_\gamma$ число вхождений γ в слово $T(a)$. Пусть $g_1 = f_{a|_{t_1}}, \dots, g_k = f_{a|_{t_k}}$, где

$$a(i_t + 1) = \gamma, \quad 1 \leq t \leq k, \quad t_3 \leq i_1 < \dots < i_k \leq t_3 + \tau(a) - 1, \\ t_3 = \min\{\tau'(a) + l\tau(a) \geq N_a : l \in \mathbb{N}\}.$$

Как и выше, легко показывается, что $g_1, \dots, g_k$ попарно различимы.

Таким образом, число попарно различных остаточных функций функции f не меньше, чем $\|\mathcal{A}\|_\gamma$. Взяв максимум по γ , получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Если $\mathcal{A}$ — некоторое множество периодических сверхслов, то

$$\omega(\mathcal{A}) \geq \frac{|\langle T(\mathcal{A}) \rangle|}{2}.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\|\mathcal{A}\| = \max_{\gamma \in \{0,1\}} \|\mathcal{A}\|_{\gamma} \geq \frac{|\langle T(\mathcal{A}) \rangle|}{2}.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем утверждение леммы 2.

Но здесь мы приведем другое доказательство леммы 2, которое проясняет одно важное свойство детерминирующего автомата.

Заметим, что для любых двух сверхслов $a, b \in \mathcal{A}$ либо $\langle T(a) \rangle = \langle T(b) \rangle$, то есть $T(a)$ и $T(b)$ получаются друг из друга циклическим сдвигом, либо $\langle T(a) \rangle \cap \langle T(b) \rangle = \emptyset$.

Если множество $\mathcal{A}$ не детерминируемо, то $\omega(\mathcal{A}) = \infty$ и утверждение леммы справедливо.

Предположим, что множество $\mathcal{A}$ детерминируемо и

$$G(q_0) = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \psi, \varphi, q_0)$$

— детерминирующий его автомат. Пусть этот автомат задан диаграммой Мура. Ребро e диаграммы Мура можно задавать парой (q, γ) , где q — вершина диаграммы Мура, из которой исходит ребро, γ — входная буква, приписанная ребру (в таком случае будем писать $e = (q, \gamma)$). Через $\varphi(e)$ и $\psi(e)$ будем обозначать соответственно выходную букву, соответствующую ребру e , и вершину диаграммы Мура, в которую ведет ребро e .

Пусть $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ — такие сверхслова, что $\langle T(a_1) \rangle \cap \langle T(a_2) \rangle = \emptyset$.

Фиксируем $i \in \{1, 2\}$. Пусть e_i — последовательность ребер диаграммы Мура, соответствующая входному сверхслову a_i , то есть для любого $t \geq 1$ выполнено равенство $e_i(t) = (\psi(a_i]_{t-1}, q_0), a_i(t))$. Здесь $\psi(a_i]_0, q_0) = q_0$. Так как a_i — периодическое слово и Q — конечное множество, последовательность e_i периодическая. Пусть l_i — период последовательности e_i и $e'_i(1)e'_i(2)\dots e'_i(l_i)$ — периодическая ее часть. Пусть $e'_i(t) = (q_i(t), \gamma_i(t))$, $t = 1, 2, \dots, l_i$.

Слово $\gamma_i(1)\gamma_i(2)\dots\gamma_i(l_i)$ периодическое с периодом $\tau(a_i)$, поэтому

$$l_i \geq \tau_{a_i} = |\langle T(a_i) \rangle|.$$

По определению $\psi(e'_i(t)) = q_i(t+1)$ для каждого $t \in \{1, 2, \dots, l_i\}$ (здесь и далее считаем, что $q_i(l_i+1) = q_i(1)$, $\gamma_i(l_i+1) = \gamma_i(1)$, $e_i(l_i+1) = e_i(1)$). Так как $G(q_0)$ — детерминирующий автомат, то $\varphi(e'_i(t)) = \gamma_i(t+1)$ для каждого $t \in \{1, 2, \dots, l_i\}$.

Покажем, что множества ребер $\{e'_1(1), e'_1(2), \dots, e'_1(l_1)\}$ и $\{e'_2(1), e'_2(2), \dots, e'_2(l_2)\}$ не пересекаются. Предположим обратное, то есть пусть существуют $t_i \in \{1, 2, \dots, l_i\}$, $i = 1, 2$, такие, что $e'_1(t_1) = e'_2(t_2)$. Так как $\langle T(a_1) \rangle \cap \langle T(a_2) \rangle = \emptyset$, без ограничения общности можно считать, что $e'_1(t_1+1) \neq e'_2(t_2+1)$. Понятно, что $q_1(t_1+1) = q_2(t_2+1)$, следовательно, $\gamma_1(t_1+1) \neq \gamma_2(t_2+1)$, и значит, $\varphi(e'_1(t_1)) \neq \varphi(e'_2(t_2))$, откуда следует, что $e'_1(t_1) \neq e'_2(t_2)$. Получаем противоречие.

Следовательно, так как $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ — произвольные сверхслова такие, что $\langle T(a_1) \rangle \cap \langle T(a_2) \rangle = \emptyset$, число ребер в диаграмме Мура автомата $G(q_0)$ не меньше, чем $|\langle T(\mathcal{A}) \rangle|$. А так как из каждой вершины диаграммы Мура исходит ровно два ребра, число состояний автомата $G(q_0)$ не меньше, чем $|\langle T(\mathcal{A}) \rangle|/2$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $G = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \psi, \varphi)$ — автомат. Тогда, если $G(q) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ для любого $q \in Q$, то $G(q) \in \mathbb{G}(\mathcal{A}^*)$ для любого $q \in Q$.

Доказательство. Пусть $G(q) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ для любого $q \in Q$. Возьмем произвольное состояние $q' \in Q$ и произвольное слово $a \in \mathcal{A}^*$. По определению $a = bc$, где $b \in \{0, 1\}^*$, $c \in \mathcal{A}$. Пусть $\psi(b, q') = q''$. Так как автомат $G(q'')$ детерминизирует слово $c \in \mathcal{A}$, автомат $G(q')$ детерминизирует слово $a = bc \in \mathcal{A}^*$. В силу произвольности слова a справедливо включение $G(q') \in \mathbb{G}(\mathcal{A}^*)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Если $\mathcal{A}$ — некоторое множество периодических сверхслов, то

$$\omega(\mathcal{A}^*) \leq |\langle T(\mathcal{A}) \rangle|.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{B} = \{(T(a))^\infty : a \in \mathcal{A}\},$$

то есть $\mathcal{B}$ получено из $\mathcal{A}$ отбрасыванием предпериодической части у сверхслов из $\mathcal{A}$. Понятно, что $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*$ и $|\langle T(\mathcal{A}) \rangle| = |\langle T(\mathcal{B}) \rangle|$, поэтому сразу можно считать, что $T'(\mathcal{A}) = \{\Lambda\}$.

Пусть $\alpha \in \{0, 1\}$, $u, q \in \{0, 1\}^*$. Введем обозначение

$$r(\alpha, u, q) = \max\{l : (\alpha u^\infty)_l = (q^\infty)_l, l \in \{0, 1, 2, \dots\}\}.$$

Здесь $r(\alpha, u, q) \leq 1$, если $u = \Lambda$, $r(\alpha, u, q) = 0$, если $q = \Lambda$, и $r(\alpha, u, q) = \infty$, если $\alpha u^\infty = q^\infty$, $u \neq \Lambda$, $q \neq \Lambda$. Функция $r(\alpha, u, q)$ говорит, на сколько совпадают начала слов αu^∞ и q^∞ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{A}) &= \{\hat{q} : q \in \langle T(\mathcal{A}) \rangle\}, \\ R(\alpha, u) &= \max_{q \in Q(\mathcal{A})} r(\alpha, u, q), \\ A(\alpha, u) &= \{q \in Q(\mathcal{A}) : r(\alpha, u, q) = R(\alpha, u)\}. \end{aligned}$$

Через $s(q) = (q(|q|)q)_{|q|}$ обозначим циклический сдвиг слова q на единицу вправо.

Легко видеть, что для всех $q \in Q(\mathcal{A})$ выполняется соотношение

$$A(q(|q|), q) = \{s(q)\}. \quad (3)$$

Поскольку мы предположили, что $T'(\mathcal{A}) = \{\Lambda\}$, для любого $x \in \mathcal{A}$ существует такое слово $q' \in Q(\mathcal{A})$, что $q' = \hat{T}(x)$, то есть $x = (\hat{q}')^\infty$. Отсюда следует, что для любого $t \geq 1$ существует такое слово $q'' \in Q(\mathcal{A})$, что

$$(q'')^\infty_t = \widehat{x}_t, \quad (4)$$

причем в качестве q'' можно взять слово, полученное из q' циклическим сдвигом вправо на остаток от деления t на $\tau(x) = |q'|$.

Рассмотрим отображение $\Psi: \{0, 1\} \times \{0, 1\}^* \rightarrow Q(\mathcal{A})$ такое, что $\Psi(\alpha, u) \in A(\alpha, u)$, $\alpha \in \{0, 1\}$, $u \in \{0, 1\}^*$.

Рассмотрим автомат

$$G_{\mathcal{A}} = (\{0, 1\}, Q(\mathcal{A}), \{0, 1\}, \psi, \varphi)$$

с каноническими уравнениями

$$\begin{aligned} q_t &= \psi(x(t), q_{t-1}) = \Psi(x(t), q_{t-1}), \\ y(t) &= \varphi(x(t), q_{t-1}) = q_t(|q_t|). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что если $q_{t-1}(|q_{t-1}|) = x(t)$, то согласно (3) $q_t = s(q_{t-1})$.

Покажем по индукции, что для любых $t \geq 1$, $x \in \mathcal{A}$ и $q_0 \in Q(\mathcal{A})$ выполнено равенство

$$(q_t)^\infty]_t = \widehat{x}]_t, \quad (6)$$

это означает, что каждое текущее состояние помнит все поступившие буквы входного слова.

В качестве базы индукции рассмотрим случай $t = 1$. В этом случае

$$q_1 = \Psi(x(1), q_0) \in A(x(1), q_0).$$

Ясно, что в $Q(\mathcal{A})$ есть состояние, начинающееся с $x(1)$, например, $s(\widehat{T}(x))$, поэтому $q_1(1) = x(1)$.

Проведем индуктивный переход. По предположению индукции

$$(q_{t-1})^\infty]_{t-1} = \widehat{x}]_{t-1}.$$

Следовательно,

$$x(t)((q_{t-1})^\infty]_{t-1}) = x(t)\widehat{x}]_{t-1} = \widehat{x}]_t.$$

Поскольку согласно (4) существует $q' \in Q(\mathcal{A})$ такое, что $(q')^\infty]_t = \widehat{x}]_t$, для $q_t = \Psi(x(t), q_{t-1}) \in A(x(t), q_{t-1})$ справедливо равенство $(q_t)^\infty]_t = \widehat{x}]_t$.

Тем самым равенство (6) доказано.

Введем обозначение $q' = \widehat{T}(x)$. Из равенства (6) следует, что при достаточно больших t (например, при $t > |q'| + \max_{q \in Q(\mathcal{A})} |q|$) состояние q_t определяется однозначно и это состояние, полученное из q' циклическим сдвигом вправо на остаток от деления t на $|q'|$, то есть $q_t = x(t)x(t-1) \dots x(t-\tau(x)+1)$. Поэтому

$$y(t) = q_t(|q_t|) = x(t-\tau(x)+1) = x(t+1).$$

Таким образом, мы показали, что для любого q_0 автомат $G_{\mathcal{A}}(q_0) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$, откуда согласно лемме 3 справедливо включение $G_{\mathcal{A}}(q_0) \in \mathbb{G}(\mathcal{A}^*)$.

В доказательстве леммы 4 содержится оптимальный по порядку метод построения детерминизирующего автомата для произвольного детерминизируемого множества периодических сверхслов. Суть алгоритма в следующем. В качестве алфавита состояний выбираем $Q(\mathcal{A})$ — записанные в обратном порядке все циклические сдвиги периодических частей сверхслов из $\mathcal{A}$. Из состояния q по $x(t)$ переходим в такое состояние q' , что слова $x(t)q^\infty$ и $(q')^\infty$ имеют общий префикс наибольшей длины. Множество всех таких q' обозначаем $A(x(t), q)$. Если $x(t) = q(|q|)$, то q' представляет собой циклический сдвиг вправо слова q . Выходное значение $y(t)$ полагаем равным $q'(|q'|)$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A} = \{0^\infty, (01)^\infty, (001)^\infty\}$. Тогда $Q(\mathcal{A}) = \{0, 01, 10, 001, 010, 100\}$. Значения для $A(q(|q|), q)$ определены в табл. 1. На рис. 1 приведена диаграмма Мура автомата, построенного по указанному методу. Пунктиром обозначены переходы из q по $q(|q|)$, а сплошными линиями — по $q(|q|)$. Полученный после минимизации автомат изображен на рис. 2. Число его состояний равно четырем, что совпадает с $\|\mathcal{A}\| = \max\{\|\mathcal{A}\|_0, \|\mathcal{A}\|_1\} = \max\{2, 4\} = 4$. Таким образом, построенный автомат детерминизирует $\mathcal{A}^*$ и является оптимальным по числу состояний.

Таблица 1.

q	0	01	10	001	010	100
$A(q(q), q)$	$\{100\}$	$\{001\}$	$\{10, 100\}$	$\{0\}$	$\{10\}$	$\{10, 100\}$

Рис. 1. До минимизации

Доказательство теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ детерминизируемо и $G(q_0) = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \psi, \varphi)$ — детерминизирующий его автомат. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ найдется такое N , что $x(t+1) = \varphi(x|_t, q_0)$, $t \geq N$, и сверхслово $x(N+1)x(N+2)\dots$ можно рассматривать, как генерируемое конечным автономным автоматом. Оно периодически $([1, 2])$. Следовательно, x также периодически. Ограниченность периода вытекает непосредственно из леммы 1.

Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из периодических сверхслов с ограниченным периодом. Тогда по лемме 4 существует детерминизирующий его автомат с количеством состояний, не превосходящим $|T(\mathcal{A})| < \infty$.

Рис. 2. После минимизации

Объединяя леммы 1 и 4 с доказанной теоремой и учитывая, что $|\langle T(\mathcal{A}) \rangle|/2 \leq \|\mathcal{A}\|$, получаем теорему 2.

4. Оценки сложности детерминизирующего автомата для некоторых множеств

Функция $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, определяемая равенством

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n, \text{ где } p - \text{простое число,} \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k, \text{ где } p_1, \dots, p_k - \text{различные простые числа,} \end{cases}$$

называется функцией Мёбиуса.

Следующая теорема дает формулу обращения Мёбиуса [3, 4].

Теорема 4. Если для функций $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

то

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d).$$

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество всех непериодических слов из $\{0, 1\}^n$.

Лемма 5. Справедливы следующие соотношения.

$$(1) |\mathcal{R}_n| = \sum_{d|n} \mu(d) 2^{n/d}, \text{ где } \mu - \text{функция Мёбиуса.}$$

$$(2) |\mathcal{R}_n| \sim 2^n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$$(3) \sum_{k=1}^n |\mathcal{R}_k| \sim 2^{n+1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Ясно, что

$$\{0, 1\}^n = \bigsqcup_{d|n} \{a^{n/d} : a \in \mathcal{R}_d\},$$

откуда

$$2^n = \sum_{d|n} |\mathcal{R}_d|. \quad (7)$$

Применив формулу обращения Мёбиуса, получаем искомое равенство.

Докажем второе утверждение. Из (7) получаем, что

$$\begin{aligned} 2^n &\geq |\mathcal{R}_n| = 2^n - \sum_{d|n, d < n} |\mathcal{R}_d| = 2^n - \sum_{d|n, d \leq [n/2]} |\mathcal{R}_d| \\ &\geq 2^n - \sum_{d \leq [n/2]} |\mathcal{R}_d| \\ &\geq 2^n - 2^{[n/2]+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|\mathcal{R}_n| \sim 2^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Третье утверждение следует из второго.

Лемма 6. *Справедливы оценки*

- (1) $\omega(\mathcal{A}_{\tau|n}) \geq 2^{n-1}$,
- (2) $\omega(\mathcal{A}_{\tau=n}) \geq \frac{1}{2}|\mathcal{R}_n|$,
- (3) $\omega(\mathcal{A}_{\tau \leq n}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |\mathcal{R}_k|$.

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{A}_{\tau|n}) &\geq \frac{1}{2}|\langle T(\mathcal{A}_{\tau|n}) \rangle| = \frac{1}{2}|T(\mathcal{A}_{\tau|n})| = \frac{1}{2}|\{0, 1\}^n| = 2^{n-1}, \\ \omega(\mathcal{A}_{\tau=n}) &\geq \frac{1}{2}|\langle \mathcal{A}_{\tau=n} \rangle| = \frac{1}{2}|T(\mathcal{A}_{\tau=n})| = \frac{1}{2}|\mathcal{R}_n|, \\ \omega(\mathcal{A}_{\tau \leq n}) &\geq \frac{1}{2}|\langle \mathcal{A}_{\tau \leq n} \rangle| = \frac{1}{2}|T(\mathcal{A}_{\tau \leq n})| = \frac{1}{2} \left| \bigcup_{k=1}^n \mathcal{R}_k \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |\mathcal{R}_k|, \end{aligned}$$

что доказывает все три оценки.

Зададим автомат $\mathcal{G}^n$ последовательностью из n задержек. Будем считать, что $\mathcal{G}^0$ задает тождественное отображение. Автомат $\mathcal{G}^n = (\{0, 1\}, \{0, 1\}^n, \{0, 1\}, \psi, \varphi)$ задается следующими каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), q_{t-1}) &= q_{t-1}(1), \\ \psi(x(t), q_{t-1}) &= q_{t-1}(2) \dots q_{t-1}(n)x(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, что

$$\omega(\mathcal{G}^n) = 2^n.$$

На рис. 3 и 4 приведены диаграммы Мура для $\mathcal{G}^1$ и $\mathcal{G}^2$.

Лемма 7. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{A}_{\tau|n}) &\leq \omega(\mathcal{A}_{\tau|n}^*) \leq 2^{n-1}, \\ \omega(\mathcal{A}_{\tau=n}) &\leq \omega(\mathcal{A}_{\tau=n}^*) \leq 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Рис. 3. $\mathcal{G}^1$ детерминизирует $\mathcal{A}_{\tau|2}$ Рис. 4. $\mathcal{G}^2$ детерминизирует $\mathcal{A}_{\tau|3}$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{G}^{n-1}(q_0) = (\{0, 1\}, \mathcal{Q}, \{0, 1\}, \psi, \varphi, q_0).$$

Для любого $x \in \mathcal{A}_{\tau|n}^*$

$$\varphi(x)_t, q_0 = x(t - (n - 1)) = x(t - n + 1) = x(t + 1), \quad t \geq n + \tau'(x).$$

Отсюда $\mathcal{G}^{n-1}(q_0) \in \mathbb{G}(\mathcal{A}_{\tau|n}^*)$. Остается заметить, что $\mathbb{G}(\mathcal{A}_{\tau=n}^*) \subset \mathbb{G}(\mathcal{A}_{\tau|n}^*)$.

Автомат $\mathcal{G}^{n-1}$ не является оптимальным для множества $\mathcal{A}_{\tau=n}$; так, на рис. 5, 6 и 7, 8 приведены примеры оптимальных по числу состояний автоматов, детерминизирующих $\mathcal{A}_{\tau=3}$ и $\mathcal{A}_{\tau=4}$ соответственно.

Рис. 5. Пример автомата, детерминизирующего $\mathcal{A}_{\tau=3}$

Рис. 6. Пример автомата, детерминирующего $\mathcal{A}_{\tau=3}$

Рис. 7. Пример автомата, детерминирующего $\mathcal{A}_{\tau=4}$

Рис. 8. Пример автомата, детерминирующего $\mathcal{A}_{\tau=4}$

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$\omega(\mathcal{A}_{\tau \leq n}) \leq 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим инициальный автомат

$$\Sigma_n(*^n) = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \psi, \varphi, *^n), \quad Q \subset \{0, 1, *, \#\}^n,$$

определенный каноническими уравнениями

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } q(t-1) = *^n, \\ \alpha_1, & \text{если } q(t-1) = *^{n-1}\alpha_1, \\ \alpha_2, & \text{если } q(t-1) = *^{n-k}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k, \quad 2 \leq k \leq n-1, \\ \alpha_1, & \text{если } q(t-1) = \#\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} *^{n-1}x(t), & \text{если } q(t-1) = *^n, \\ *^{n-k}\alpha_2 \dots \alpha_k x(t), & \text{если } q(t-1) = *^{n-k}\alpha_1 \dots \alpha_k, \quad x(t) = \alpha_1, \quad n-k \geq 1, \\ *^{n-k-1}\alpha_1 \dots \alpha_k x(t), & \text{если } q(t-1) = *^{n-k}\alpha_1 \dots \alpha_k, \quad x(t) \neq \alpha_1, \quad n-k \geq 2, \\ \#\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}x(t), & \text{если } q(t-1) = *\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \quad x(t) \neq \alpha_1, \\ \#\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}x(t), & \text{если } q(t-1) = \#\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

$$q(0) = *^n.$$

Если $x \in \mathcal{A}_{\tau \leq n}$ и $\tau(x) = \tau$, то для любого k , $1 \leq k \leq \tau-1$, найдется такое t , что $x(t-k) \neq x(t)$. С другой стороны, $x(t-\tau) = x(t)$ для всех $t \geq \tau+1$. Поэтому при достаточно больших t

$$q(t-1) = \begin{cases} *^{n-\tau}x(t-\tau) \dots x(t-1), & \text{если } \tau \leq n-1, \\ \#x(t-n+1) \dots x(t-1), & \text{если } \tau = n, \end{cases}$$

и следовательно,

$$y(t) = x(t - \tau(x) + 1) = x(t + 1),$$

то есть, $\Sigma_n \in \mathbb{G}(\mathcal{A}_{\tau \leq n})$.

Далее, из включения

$$Q \subset \left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} \{ *^{n-k}a : a \in \{0, 1\}^k \} \right) \sqcup \{ \#a : a \in \{0, 1\}^{n-1} \},$$

получаем оценку

$$\omega(\mathcal{A}_{\tau \leq n}) \leq |Q| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение теоремы 3 есть следствие лемм 6, 7 и 8.

Замечание 1. Построенный в доказательстве леммы 8 автомат Σ_n , детерминизирующий $\mathcal{A}_{\tau \leq n}$, не является оптимальным по числу состояний. Например, $\mathbb{G}^1$ детерминизирует $\mathcal{A}_{\tau \leq 2}$ и имеет 2 состояния, а Σ_2 имеет 5 состояний. На рис. 9 приведена диаграмма Мура автомата, детерминизирующего $\mathcal{A}_{\tau \leq 3}$ и имеющего пять состояний (то есть являющегося оптимальным, поскольку $\|\mathcal{A}_{\tau \leq 3}\| = 5$), в то время как Σ_3 имеет 9 состояний.

Рис. 9. Пример автомата, детерминирующего $\mathcal{A}_{\tau \leq 3}$

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., *Конечные автоматы (поведение и синтез)*. Наука, Москва, 1970.
3. Виноградов И. М. *Введение в теорию чисел*. Наука, Москва, 1981.
4. Кострикин А.И. *Основные структуры алгебры*. Физматлит, Москва, 2000.

Статья поступила 22.09.2005.