Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич, Условия Парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 153–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:32:42

Условия Парето-оптимальности в дискретных векторных задачах оптимизации

© 1997 г. В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич

Для векторной задачи

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2, \\ f_i(x) \rightarrow \min_X \quad \forall i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

с конечным множеством векторных оценок $F(X)$ указан широкий класс критериев эффективности (оптимальности по Парето) в терминах линейной свертки видоизмененных частных критериев. В частности, доказано, что элемент $x^o \in X$ эффективен тогда и только тогда, когда существует вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$ для всех $i \in N_n$, для которого

$$\sum_{i \in N_n} \lambda_i \alpha^{f_i(x^o)} \leq \sum_{i \in N_n} \lambda_i \alpha^{f_i(x)}, \quad x \in X,$$

где $\alpha = n^{1/\Delta}$, $\Delta = \min\{f_i(x) - f_i(x') > 0: x, x' \in X, i \in N_n\}$.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, проекты Ф95-70 и МП96-35, а также немецкого фонда DAAD и Международной Соросовской Программы Образования в области точных наук (грант Соросовский профессор для первого автора).

Для векторных (многокритериальных) задач оптимизации широко известны разнообразные необходимые и достаточные условия того, чтобы данное решение было в том или ином смысле оптимальным (по Парето, Слейтеру и др.). Это обусловлено тем, что подавляющее большинство методов решений таких задач основано на знании условий оптимальности (эффективности), которые, как правило, устанавливают соответствие между оптимальными альтернативами векторной задачи и оптимальными решениями скалярной параметрической задачи с агрегированным (обобщенным) критерием, являющимся некоторой сверткой (не обязательно линейной) частных критериев. Кроме того, знание таких условий дает основу для разработки способов проверки эффективности выделенного решения.

Установлено, что используя линейную свертку критериев, можно находить все оптимумы Парето (эффективные решения) в многокритериальной задаче линейного и выпуклого программирования (теоремы Т. Купманса [1] и С. Карлина [2]). Для оптимумов Слейтера (слабо эффективных решений) аналогичный результат был получен Л. Гурвицем [3], П. Ю [4] и др., а для собственно эффективных решений

А. М. Джофффрионом [5], Р. Хартли [6] и др. Исследуя задачи с частными критериями, положительно определенными на множестве допустимых решений, Ю. Б. Гермейеру [7] удалось показать, что всякий оптимум Слейтера (и только он) может быть найден как оптимум некоторой скалярной задачи на узкие места.

Перечисленные результаты, а также ряд других теорем, касающихся условий оптимальности решений (или оценок) векторной задачи, можно найти в монографиях [8–12] и обзорах [13, 14].

Упомянем также работы [15–17], где указана общая формула для оптимумов Парето, находимых линейной сверткой критериев в случае, когда множество векторных (достижимых) оценок конечно. В этом случае особый интерес представляет результат статьи [18] о том, что при неотрицательно определенных частных критериях всякий оптимум Парето (и только он) может быть найден, как оптимум скалярной задачи с агрегированным критерием, представляющим собой подходящую линейную свертку частных критериев, возведенных в некоторые положительные степени (см. ниже теорему 2). В [19] установлено, что всякое эффективное решение векторной траекторной задачи с одним линейным критерием и несколькими критериями узкого места находится среди решений некоторой однокритериальной траекторной задачи с обобщенным критерием, представляющим собой линейную функцию.

В настоящей работе приводится широкий класс необходимых и одновременно достаточных условий эффективности решения векторной задачи с конечным множеством векторных оценок. Никаких других ограничений на множество допустимых решений и структуру векторного критерия не налагается.

Обозначим через (X, F) векторную (n -критериальную) задачу

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2, \\ f_i(x) \rightarrow \min_X \quad \forall i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

нахождения множества эффективных элементов (множества Парето)

$$P(X, F) = \{x \in X: \pi(x, F) = \emptyset\},$$

где $\pi(x, F) = \{x' \in X: F(x) \geq F(x'), F(x) \neq F(x')\}$.

Один из традиционных и наиболее распространенных приемов нахождения эффективных элементов векторной задачи (X, F) основан на линейном свертывании частных критериев $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ в один агрегированный критерий. Сущность этого приема выражается в виде следующего почти очевидного включения (см., например, [8–11])

$$\Lambda(X, F) \subseteq P(X, F), \quad (1)$$

где

$$\Lambda(X, F) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} \Lambda(X, F, \lambda), \quad \Lambda(X, F, \lambda) = \operatorname{argmin}\{\langle \lambda, F(x) \rangle: x \in X\}, \\ \Lambda_n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n: \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i \in N_n \right\},$$

и $\langle \lambda, F(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)$ есть линейная свертка частных критериев, $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов a и b , $\operatorname{argmin}\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных аргументов соответствующей задачи минимизации.

Другими словами, для всякого вектора $\lambda \in \Lambda_n$ оптимальное решение однокритериальной задачи $\min\{\langle \lambda, F(x) \rangle : x \in X\}$ является эффективным элементом задачи (X, F) .

Однако, существуют такие оптимумы Парето некоторых векторных задач, которые не являются оптимальными решениями вышеуказанной скалярной задачи ни при каком векторе $\lambda \in \Lambda_n$ (см., например, [9, 10, 17, 20–22]), то есть эти паретовские оптимумы не удастся найти никакой линейной сверткой частных критериев.

Будем говорить, что n -критериальная задача (X, F) разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев, если выполняется условие

$$\forall x^o \in P(X, F) \exists \lambda \in \Lambda_n (\langle \lambda, F(x^o) \rangle = \min\{\langle \lambda, F(x) \rangle : x \in X\}),$$

которое с учетом включения (1) равносильно равенству $P(X, F) = \Lambda(X, F)$.

Будем называть n -критериальную задачу (X, F) с конечным множеством векторных оценок $Y = F(X) = \{y \in \mathbf{R}^n : y = F(x), x \in X\}$ дискретной и обозначать n -КДЗ.

Для задачи (X, F) введем множество $C(X, F) = \{x \in X : \xi(x) = \emptyset\}$, где $\xi(x) = \{y \in \text{conv } Y : F(x) \geq y, F(x) \neq y\}$, $\text{conv } Y$ — выпуклая оболочка в $\mathbf{R}^n$ множества точек Y .

Лемма 1 ([15–17]). Для всякой n -КДЗ (X, F) справедливо тождество $C(X, F) = \Lambda(X, F)$.

Лемма 2. Пусть $F(X) \subset \mathbf{R}_+^n$. Тогда если справедлива формула

$$\forall i \in N_n \forall x, x' \in X (f_i(x) < f_i(x') \Rightarrow n f_i(x) \leq f_i(x')), \quad (2)$$

то n -КДЗ (X, F) разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости включения $P(X, F) \subseteq \Lambda(X, F)$. Предположим, что оно не выполняется, то есть существует элемент $x^o \in P(X, F) \setminus \Lambda(X, F)$. Тогда в силу леммы 1 элемент $x^o \notin C(X, F)$, то есть $\xi(x^o) \neq \emptyset$. Поэтому на основании ограниченности и замкнутости многогранника $\text{conv } Y \subset \mathbf{R}_+^n$ существует вектор $y^o \in \xi(x^o)$, удовлетворяющий условию $\nexists y \in \text{conv } Y : y^o \geq y, y^o \neq y$. Это значит, что вектор y^o принадлежит некоторой грани H многогранника $\text{conv } Y$, размерность которой не превосходит числа $n - 1$. Поэтому согласно известным соотношениям $H = \text{conv } \text{vert } H$, $\text{vert } H \subseteq Y$ (см. теорему 2.2 и следствие 2.4 гл.1 в [23]) и теореме Каратеодори (см. теорему 1.8 гл.1 в [23]) вектор $y^o = (y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o)$ представим в виде

$$y^o = \sum_{j=1}^k \lambda_j F(x^j), \quad k \leq n, \quad (3)$$

где $x^j \in X$, $F(x^j) \neq F(x^o)$ для всех $j \in N_k$ (поскольку $y^o \in \xi(x^o)$), $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k$.

Поэтому с учетом эффективности элемента x^o для любого $j \in N_k$ существует индекс $i(j) \in N_n$, удовлетворяющий неравенству $f_{i(j)}(x^o) < f_{i(j)}(x^j)$. Следовательно, в силу импликации формулы (2) справедливы неравенства

$$n f_{i(j)}(x^o) \leq f_{i(j)}(x^j), \quad j \in N_k. \quad (4)$$

Далее, принимая во внимание разложение (3) и учитывая включения $Y = F(X) \subset \mathbf{R}_+^n$ и $y^o \in \xi(x^o)$, находим, что

$$f_{i(j)}(x^o) \geq y_{i(j)}^o = \sum_{s=1}^k \lambda_s f_{i(j)}(x^s) \geq \lambda_j f_{i(j)}(x^j), \quad j \in N_k,$$

причем хотя бы для одного индекса $j^* \in N_k$ справедливо строгое неравенство $f_{i(j^*)}(x^o) > \lambda_{j^*} f_{i(j^*)}(x^{j^*})$. Отсюда в виду неравенств (4) получаем, что $\lambda_j \leq 1/n$, $j \in N_k$, $\lambda_{j^*} < 1/n$. Следовательно, $\sum_{j=1}^k \lambda_j < k/n \leq 1$. Но в то же время $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, поскольку $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Пусть $U \subseteq \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $V_a = \{v \in \mathbf{R}: v \geq a\}$. Будем говорить, что функция $g(u, v)$ двух переменных принадлежит классу $\Omega(U, a)$ и писать $g(u, v) \in \Omega(U, a)$, если $g: U \times V_a \rightarrow \mathbf{R}_+$ и для любых двух чисел $u, u' \in U$ таких, что $u < u'$, одновременно выполняются условия

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{g(u, v)}{g(u', v)} = 0, \quad (5)$$

$$g(u, v) < g(u', v), \quad v \in V_a. \quad (6)$$

Отметим, что класс функций $\Omega(U, a)$ непуст при любом числе $a \in \mathbf{R}$ и любом множестве $U \subseteq \mathbf{R}$. Например, функция $g_b(u, v) = (b + |v|)^u \in \Omega(U, a)$ при любом $b > 1$ и любых параметрах U и a .

Наряду с векторной функцией

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

будем рассматривать новую векторную функцию, порожденную функцией $g(u, v) \in \Omega(U, a)$ при фиксированном значении $v \in V_a$,

$$G_v(x) = (g(f_1(x), v), g(f_2(x), v), \dots, g(f_n(x), v)), \quad x \in X.$$

Для n -КДЗ (X, F) определим подмножество действительных чисел

$$U(X, F) = \bigcup_{i=1}^n f_i(X),$$

где $f_i(X) = \{t \in \mathbf{R}: t = f_i(x), x \in X\}, i \in N_n$.

Лемма 3. Пусть a — произвольное действительное число. Тогда если $g(u, v) \in \Omega(U(X, F), a)$, то справедливы равенства

$$P(X, F) = P(X, G_v), \quad v \in V_a. \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, в силу условия (6) для всякого числа $v \in V_a$ справедливо утверждение

$$F(x) \leq F(x') \text{ \& } F(x) \neq F(x') \iff G_v(x) \leq G_v(x') \text{ \& } G_v(x) \neq G_v(x').$$

Следовательно, $\pi(x, F) = \pi(x, G_v)$ для всех $v \in V_a$, то есть верны равенства (7), что и доказывает лемму 3.

Теорема 1. Для всякой n -КДЗ (X, F) , любого числа $a \in \mathbf{R}$ и любой функции $g(u, v) \in \Omega(U(X, F), a)$ существует такое число $\alpha^0 \geq a$, что для любого $\alpha \geq \alpha^0$ справедливо утверждение: элемент $x^0 \in X$ эффективен тогда и только тогда, когда существует вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором

$$\sum_{i \in N_n} \lambda_i g(f_i(x^0), \alpha) = \min \left\{ \sum_{i \in N_n} \lambda_i g(f_i(x), \alpha) : x \in X \right\}.$$

Доказательство. Поскольку функция $g(u, v)$ принадлежит классу $\Omega(U(X, F), a)$, в силу (5) и (6) для всякого индекса $i \in N_n$ и любых двух элементов $x, x' \in X$, удовлетворяющих неравенству $f_i(x) < f_i(x')$, справедливы соотношения

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{g(f_i(x), v)}{g(f_i(x'), v)} = 0, \quad (8)$$

$$g(f_i(x), v) < g(f_i(x'), v), v \in V_a. \quad (9)$$

Из (8) с учетом того, что $g(u, v) \geq 0$ для всех $u \in U(X, F)$ и $v \in V_a$, вытекает существования такого числа $\alpha_i^* = \alpha_i^*(x, x') \geq a$, что для всякого числа $\alpha_i \geq \alpha_i^*$ выполняется неравенство

$$ng(f_i(x), \alpha_i) \leq ng(f_i(x'), \alpha_i).$$

Тем самым, с учетом (9), верна формула

$$\forall i \in N_n \forall x, x' \in X (g(f_i(x), \alpha) < g(f_i(x'), \alpha) \Rightarrow ng(f_i(x), \alpha) \leq g(f_i(x'), \alpha)),$$

справедливая для любого числа

$$\alpha \geq \alpha^0 = \max\{\beta_i : i \in N_n\},$$

где $\beta_i = \max\{\alpha_i^*(x, x') : f_i(x) < f_i(x'), x, x' \in X\}$. Отсюда согласно лемме 2 следует разрешимость с помощью алгоритма линейной свертки критериев задачи (X, G_α) при $\alpha \geq \alpha^0$, то есть $P(X, G_\alpha) = \Lambda(X, G_\alpha)$ для всех $\alpha \geq \alpha^0$. А поскольку в силу леммы 3 с учетом того, что $\alpha \geq a$, справедливо равенство $P(X, G_\alpha) = P(X, F)$, теорема 1 доказана.

Легко видеть, что

$$g_1(u, v) = v^u \in \Omega(\mathbf{R}, a), \quad a > 1,$$

$$g_2(u, v) = u^v \in \Omega(\mathbf{R}_+, a), \quad a > 0.$$

Поэтому из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Для всякой n -КДЗ (X, F) существует такое число $\alpha^0 > 1$, что для любого $\alpha \geq \alpha^0$ справедливо утверждение: $x^0 \in P(X, F)$ тогда и только тогда, когда найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha^{f_i(x^0)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha^{f_i(x)} : x \in X \right\}.$$

Следствие 2. Для всякой n -КДЗ (X, F) при $F(X) \subset \mathbf{R}_+^n$ существует такое число $\alpha^o > 0$, что для любого $\alpha \geq \alpha^o$ справедливо утверждение: $x^o \in P(X, F)$ тогда и только тогда, когда найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^\alpha(x^o) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^\alpha(x) : x \in X \right\}.$$

Легко убедиться, что число α^o , фигурирующее в следствии 1, можно задать, например, следующим образом:

$$\alpha^o = n^{1/\Delta}, \quad (10)$$

где

$$\Delta = \min\{f_i(x) - f_i(x') > 0 : x, x' \in X, i \in N_n\},$$

а число, фигурирующее в следствии 2, можно задать формулой

$$\alpha^o = \log_b n / \log_b \min\{f_i(x')/f_i(x) > 1 : x, x' \in X, i \in N_n\}, \quad (11)$$

где b — любое число, большее единицы.

Действительно, из формулы (10) выводим утверждение

$$\forall \alpha \geq \alpha^o \forall i \in N_n \forall x, x' \in X \quad (\alpha^{f_i(x)} < \alpha^{f_i(x')} \Rightarrow n\alpha^{f_i(x)} \leq \alpha^{f_i(x')}).$$

Поэтому на основании леммы 2 для любого $\alpha \geq \alpha^o$ n -КДЗ (X, G_α) , где

$$G_\alpha(x) = (\alpha^{f_1(x)}, \alpha^{f_2(x)}, \dots, \alpha^{f_n(x)}),$$

разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев, то есть $P(X, G_\alpha) = \Lambda(X, G_\alpha)$. Далее, согласно лемме 3 $P(X, G_\alpha) = P(X, F)$, а следовательно, для всех $\alpha \geq \alpha^o$

$$P(X, F) = \Lambda(X, G_\alpha).$$

Подобным образом проводится рассуждение и с формулой (11).

В заключение, для сравнения приведем известный результат, аналогичный следствию 2.

Теорема 2 ([18, 22]). Для всякой n -КДЗ (X, F) при $F(X) \subset \mathbf{R}_+^n$ существует такой вектор $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n)$, $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, что справедливо утверждение: $x^o \in P(X, F)$ тогда и только тогда, когда найдется вектор $\lambda \in \Lambda_n$, при котором

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{\varkappa_i}(x^o) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{\varkappa_i}(x) : x \in X \right\}.$$

В [18] показано, что компоненты вектора $\varkappa = \{\varkappa_1, \dots, \varkappa_n\}$ определяются с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$\varkappa_1 = 1, \quad \varkappa_i > \frac{\log(a_i/b_i)}{\log c_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

где

$$a_i = \max \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (f_j^{\mathcal{K}_j}(x) - f_j^{\mathcal{K}_j}(x')) : x, x' \in X, (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}) \in \Lambda_{i-1} \right\},$$

$$b_i = \min \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (f_j^{\mathcal{K}_j}(x) - f_j^{\mathcal{K}_j}(x')) > 0 : x, x' \in X, (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}) \in \Lambda_{i-1} \right\},$$

$$c_i = \min \{ f_i(x) / f_i(x') > 1 : x, x' \in X \},$$

причем, если $i = 2$, то $\lambda_1 = 1$.

Список литературы

1. Koopmans T. C. *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York, 1951.
2. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*. Мир, Москва, 1964.
3. Гурвиц Л. Программирование в линейных топологических пространствах. В кн.: Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзова Х. *Исследования по линейному и нелинейному программированию*. ИЛ, Москва, 1962, 65–155.
4. Yu P. L. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *JOTA* (1974) **14**, №3, 319–377.
5. Geoffrion A. M. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Analysis and Appl.* (1968) **22**, 618 – 630.
6. Hartley R. On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness. *SIAM J. Appl. Math.* (1978) **34**, №2, 211–222.
7. Гермейер Ю. Б. *Введение в теорию исследования операций*. Наука, Москва, 1971.
8. Михалевич В. С., Волкович В. Л. *Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем*. Наука, Москва, 1982.
9. Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
10. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем*. Наука, Москва, 1986.
11. Штойер Р. *Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения*. Радио и связь, Москва, 1992.
12. Гороховик В. В. *Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации*. Навука і тэхніка, Минск, 1990.
13. Charnes A., Cooper W. W. *Management Models and Industrial Application of Linear Programming*. Wiley, New York, 1961.
14. Меламед И. И. *Методы оптимизации в транспортном процессе*. Итоги науки и техники. Сер.: Организация управления транспортом. Т. 10. ВИНТИ, Москва, 1991.
15. Меламед И. И., Сигал И. Х. Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании. *Журн. Вычисл. Матем. и Матем. Физики* (1995) **35**, №8, 1260 –1270.

16. Меламед И. И., Сигал И. Х. *Теория и алгоритмы решения многокритериальных задач комбинаторной оптимизации. Сообщения по прикладной математике.* ВЦ РАН, Москва, 1996.
17. Емеличев В. А., Гладкий А. А., Янушкевич О. А. О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов. *Изв. АН Беларуси, сер. физ.-матем. наук* (1996), №3, 82–86.
18. Burkard R. E., Keiding H., Krarup J., Pruzan P. M. A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming problems. *Comput. Operat. Research* (1981) **8**, №4, 241 – 247.
19. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А. Условия парето-оптимальности в одной дискретной векторной задаче на системе подмножеств. *Журн. Вычисл. Матем. и Матем. Физики* (1995) **35**, №11, 1641–1652.
20. Brucker P. Discrete parameter optimization problem and essential efficient points. *Oper. Res.* (1972) **16**, №5, 189–197.
21. Burkard R. E., Krarup J., Pruzan P. M. Efficiency and optimality in minisum, minimax 0-1 programming problems. *J. Oper. Res. Soc.* (1982) **33**, №2, 137–151.
22. Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 3–33.
23. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. *Многогранники, графы, оптимизация.* Наука, Москва, 1981.

Статья поступила 23.09.1996.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 1997, ТОМ 9, ВЫПУСК 3

Заведующая редакцией Л. М. Барыкина
Технический редактор Н. Н. Беляева

Сдано в набор 18.08.97.	Подписано к печати 22.08.97.	Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,3.	Усл. кр.-отт. 4,5 тыс.	Уч.-изд. л. 13,3. Бум. л. 5,5.
Тираж 310 экз.		Заказ №2184.

Адрес редакции: 117966 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 37 00.

Отпечатано в Московской типографии №2 РАН
121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.