Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Ильичев, Г. П. Коган, В. Н. Шевченко, Полиноми-
альные алгоритмы вычисления перманентов некоторых
матриц, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 96–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:44:06

УДК 519.7

Полиномиальные алгоритмы вычисления перманентов некоторых матриц

© 1997 г. А.П.Ильичев, Г.П.Коган, В.Н.Шевченко

Пусть B_n — матрица, столбцами которой являются всевозможные ненулевые n -мерные булевы векторы, B_{nk} — матрица, столбцами которой являются всевозможные n -мерные булевы векторы, содержащие k единиц. В статье предлагаются полиномиальные по n алгоритмы вычисления перманентов этих матриц и матриц, из них составленных, основанные на получении производящих функций для значений перманентов исследуемых матриц.

Введем необходимые обозначения. Если $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $n \leq m$, — некоторая матрица, то через $P(A)$ обозначим ее перманент. Через B_n обозначим $(n \times (2^n - 1))$ матрицу, столбцами которой являются всевозможные ненулевые булевы векторы длины n ; через B_{nk} обозначим матрицу, столбцами которой являются всевозможные n -мерные булевы векторы, содержащие k единиц; через $A(i_1, \dots, i_k; n)$ обозначим матрицу, составленную из матриц $B_{n_1}, \dots, B_{n_k}$, взятых $i_1, \dots, i_k$ раз соответственно.

Данная работа является продолжением исследований этих матриц, выполненных в [1–4].

Известно [5], что вычисление перманента матрицы является NP-полной проблемой. В связи с этим представляет интерес выявление классов матриц, допускающих полиномиальные алгоритмы вычисления перманента. В [4] такой алгоритм был предложен для матрицы B_{n2} . Здесь на основе формулы Бине–Минка для перманентов [6] описывается класс матриц, допускающих эффективные способы вычисления перманента и предлагаются алгоритмы вычисления перманентов матриц $B_n, B_{nk}, A(i_1, \dots, i_k; n)$ с трудоемкостью, соответственно, $O(n \ln n)$, $O(kn \ln n)$, $O(kn \ln n)$ арифметических операций.

Приведем формулу Бине–Минка в удобном для нашего изложения виде. Пусть $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $n \leq m$, — произвольная числовая матрица. Если для $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $I \neq \emptyset$, ввести величину

$$S_I = \sum_{j=1}^m \prod_{i \in I} a_{ij},$$

через $(I_1, \dots, I_q)$ обозначить некоторое разбиение (q не фиксировано) множества $\{1, \dots, n\}$, через R обозначить множество всех его разбиений, то формулу Бине–Минка можно записать следующим образом:

$$P(A) = (-1)^n \sum_{(I_1, \dots, I_q) \in R} (-1)^q \prod_{\nu=1}^q (|I_\nu| - 1)! \prod_{\nu=1}^q S_{I_\nu}$$

Теорема 1. Пусть для любых множеств $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ таких, что $|I| = |J|$, выполняется равенство $S_I = S_J$. Тогда $P(A)$ можно вычислить с полиномиальной трудоемкостью.

Доказательство. Ввиду условия теоремы величину S_I можно обозначать $S_{|I|}$. Будем перебирать разбиения множества $\{1, \dots, n\}$ в соответствии с количествами подмножеств данной мощности. Как хорошо известно [7], количество разбиений n -элементного множества на подмножества, среди которых k_ν подмножеств имеют мощность ν , $\nu = 1, \dots, n$, $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, равно $n! ((1!)^{k_1} \dots (n!)^{k_n} k_1! \dots k_n!)^{-1}$. Тогда из формулы Бине–Минка и условия теоремы следует, что

$$P(A) = (-1)^n n! \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} (-1)^q \prod_{\nu=1}^q ((\nu-1)!)^{k_\nu} \frac{n!}{\prod_{\nu=1}^n (\nu!)^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^n k_\nu!} S_1^{k_1} \dots S_n^{k_n},$$

где $q = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

После очевидных преобразований находим, что

$$P(A) = (-1)^n n! \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \prod_{\nu=1}^n \left(-\frac{S_\nu}{\nu} \right)^{k_\nu} \frac{1}{k_\nu!}.$$

Отсюда, используя производящие функции, получаем, что

$$P(A) = (-1)^n n! c_n \left(\exp \left\{ - \left(S_1 t + \frac{S_2}{2} t^2 + \dots + \frac{S_n}{n} t^n \right) \right\} \right), \quad (1)$$

где $c_n(f(t))$ означает коэффициент при t^n в разложении $f(t)$ в степенной ряд. Обозначим для краткости $c_n(f(t))$ при

$$f(t) = \exp \left\{ - \left(S_1 t + \frac{S_2}{2} t^2 + \dots + \frac{S_n}{n} t^n \right) \right\}$$

через c_n и заметим, что вычисление c_n сводится к перемножению не более чем n многочленов степени не выше n , так как нам не нужны слагаемые рядов, начиная с $(n+1)$ -й степени t . Для этого достаточно $O(n^2 \ln n)$ арифметических операций, если пользоваться современными методами быстрого перемножения многочленов [8].

Поскольку при известных произведениях $\prod_{i=1}^r a_{ij}$, $j = 1, \dots, m$, вычисление произведений $\prod_{i=1}^{r+1} a_{ij}$, $j = 1, \dots, m$, требует m умножений, то для нахождения последовательно всех величин $S_1, \dots, S_n$ достаточно $O(mn)$ арифметических операций. Таким образом, общая трудоемкость составляет $O(n^2 \ln n + mn)$ арифметических операций с числами произвольной длины (см. замечание в конце статьи). Теорема доказана.

Теорема 2. Перманент $P(B_{nk})$ может быть вычислен с трудоемкостью $O(kn \ln n)$ арифметических операций.

Доказательство. Из определения матрицы B_{nk} следует, что она удовлетворяет условиям теоремы 1. Легко видеть, что для этой матрицы $S_i = \binom{n-i}{k-i}$ при $i = 1, \dots, k$ и $S_i = 0$ при $i = k+1, \dots, n$. Для вычисления c_n в данном случае нужно $O(kn \ln n)$ арифметических операций. Поскольку $S_{i-1} = (n-i+1)S_i/(k-i+1)$, вычисление всех S_i , $i = 1, \dots, k$, может быть проведено за $O(k)$ операций и не окажет влияния на порядок общей оценки трудоемкости. Теорема доказана.

Для матрицы B_n данный подход позволяет получить явную формулу.

Теорема 3. *Справедлива формула*

$$P(B_n) = (2^n - 1)(2^n - 2) \dots (2^n - n + 1).$$

Доказательство. Очевидно, что B_n удовлетворяет условиям теоремы 1 и для нее $S_i = 2^{n-i}$, $i = 1, \dots, n$. Формула, полученная в доказательстве теоремы 1, принимает вид

$$P(B_n) = (-1)^n \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} (-1)^q \frac{\prod_{\nu=1}^n (2^{n-\nu})^{k_\nu}}{\prod_{\nu=1}^n \nu^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^n k_\nu!}.$$

Учитывая, что $k_1 + k_2 + \dots + k_n = q$, $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$, получаем, что

$$\begin{aligned} P(B_n) &= (-1)^n \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} (-1)^q \frac{2^{nq-nn}!}{\prod_{\nu=1}^n \nu^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^n k_\nu!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{q=1}^n 2^{nq} (-1)^{n+q} \sum \frac{n!}{1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n} k_1! k_2! \dots k_n!}, \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по множеству $k_1, \dots, k_n$ таких, что

$$k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_n = n, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = q.$$

Эта внутренняя сумма есть число подстановок из n элементов, содержащих q циклов; с учетом множителя $(-1)^{n+q}$ окончательно получаем, что

$$P(B_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=1}^n s(n, q) 2^{nq},$$

где $s(n, q)$ — числа Стирлинга первого рода. Так как (см. [7])

$$\sum_{q=1}^n s(n, q) t^q = t(t-1) \dots (t-n+1),$$

подставляя сюда 2^n вместо t , получим, что

$$P(B_n) = (2^n - 1)(2^n - 2) \dots (2^n - n + 1).$$

Теорема доказана.

Отметим, что наличие простых формул для вычисления величин S_i для B_{nk} и B_n позволяет избежать в оценке трудоемкости параметра m , не дающего сделать вывод о ее полиномиальности по n непосредственно из теоремы 1.

Теорема 4. Перманент $P(A(i_1, \dots, i_k; n))$ может быть вычислен с трудоемкостью $O(kn \ln n)$ арифметических операций.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в данном случае $S_j = 0$ при $j > k$,

$$S_j = \sum_{\nu=j}^k i_{\nu} \binom{n-j}{\nu-j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

и доказываемое утверждение следует из теоремы 1.

Формула (1) может быть основой для получения рекуррентных выражений для $P(A(i_1, \dots, i_k; n))$, что приводит к более эффективному алгоритму при фиксированном k . Записав ее в виде

$$\exp \left\{ - \left(S_1 t + \frac{S_2}{2} t^2 + \dots + \frac{S_k}{k} t^k \right) \right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^i}{i!} c_i, \quad (3)$$

отметим, что $c_n = P(A(i_1, \dots, i_k; n))$ при $n \geq k$ и $i_1, \dots, i_k$ таких, что выполняется равенство (2).

Дифференцируя (3) по t и приравнявая коэффициенты при t^{n-1} , получаем, что

$$c_n = S_1 c_{n-1} - (n-1) S_2 c_{n-2} + \dots + (-1)^{k-1} (n-1) \dots (n-k+1) S_k c_{n-k}.$$

Вычислив $c_0, \dots, c_{k-1}$ непосредственным разложением в ряд левой части формулы (3), значения $c_k, \dots, c_n$ мы будем вычислять по найденной рекуррентной формуле. Очевидно, что общий объем вычислений есть $O(k^3 + k^2 n)$, что экономнее оценки, полученной в теореме 4, если k/n стремится к нулю с ростом n . В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. При фиксированном k перманент $P(A(i_1, \dots, i_k; n))$ вычислим с линейной по n трудоемкостью.

Замечание. При реализации предложенных алгоритмов на ЭВМ следует учитывать большие значения промежуточных и конечных результатов. Например, $P(B_{n2})$ асимптотически равен $n^n e^{-3/2}$ [2]. Если за арифметическую операцию считать операцию над числами, уместающимися в стандартной числовой сетке ЭВМ, то трудоемкость алгоритмов возрастет пропорционально количеству ячеек памяти, требуемых для размещения одного числа (например, при использовании модульной арифметики для работы с большими числами [8]). Грубо оценивая возможный рост промежуточных результатов, легко видеть, что они заведомо не превосходят величины $(\alpha + 1)^{O(n^3 + m^3)}$, где α — максимальный из модулей элементов матрицы A . Поэтому длина двоичной записи промежуточных результатов увеличится не более, чем в $O(n^3 + m^3)$ раз, что гарантирует полиномиальность алгоритмов и в том случае, когда за арифметическую операцию считается операция над стандартными числами ЭВМ. Естественно, что степень полинома, оценивающего трудоемкость, в этом случае возрастает.

Список литературы

1. Шевченко В. Н., Ильичев А. П. О минорах и перманентах некоторых $(0,1)$ -матриц. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 96–102.
2. Шевченко В. Н., Ильичев А. П. О перманентах и детерминантах квадратных подматриц матриц инцидентий однородных гиперграфов. В кн.: *Перманенты: теория и приложения*, Красноярск, 1990, 126–135.
3. Шевченко В. Н., Ильичев А. П., Павлючонок А. А. О среднем значении ненулевого детерминанта и перманента матрицы инцидентий полного графа. В кн.: *Информационный бюллетень №4 Ассоциации математического программирования*, Екатеринбург, 1993, 85.
4. Шевченко В. Н., Павлючонок А. А. Вычисление перманента матрицы инцидентий полного графа. В кн.: *Тезисы 4-й конференции "Методы математического программирования и программное обеспечение"*. Свердловск, 1989, 218–219.
5. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
6. Минк Х. *Перманенты*. Мир, Москва, 1982.
7. Сачков В. Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
8. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.

Статья поступила 08.11.1994.