Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Хачай, О существовании комитета большинства,
Дискрет. матем., 1997, том 9, выпуск 3, 82–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:55:23

О существовании комитета большинства

© 1997 г. М. Ю. Хачай

На основании критерия существования q -членного комитета произвольной системы ограничений, связанного со структурой ее множества максимальных совместных подсистем, произведена классификация 5-комитетообразующих совокупностей в соответствии с графом составляющих их максимальных совместных подсистем.

1. Введение

Задача дискриминантного анализа в распознавании образов часто сводится к задаче нахождения решения некоторой системы ограничений, которая может быть записана следующим образом [1]: пусть D_j , $j = 1, \dots, m$ — непустые подмножества $\mathbf{R}^n$, требуется найти

$$x \in \bigcap_{j=1}^m D_j.$$

Если функции $P_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ таковы, что $P_j(x) = 1$, если $x \in D_j$ и $P_j(x) = 0$, если $x \notin D_j$, то исходная задача эквивалентна задаче нахождения решения системы уравнений

$$P_j(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Нас будет интересовать случай, когда система (1) несовместна. Одним из способов расширения понятия решения таких систем является построение комитетов большинства. Следуя [1], комитетом большинства системы (1) из q членов назовем последовательность $Q = (x^1, \dots, x^q)$, где $x^k \in \mathbf{R}^n$, $k = 1, \dots, q$, обладающую свойством: для каждого j большинство элементов Q (не менее $[q/2] + 1$) удовлетворяют уравнению $P_j(x) = 1$. Элементы $x^1, \dots, x^q$ будем называть членами комитета Q , а систему (1) разрешимой комитетом Q .

Во многих работах (см. обзор в [1]) исследовались условия существования комитета. Были доказаны теоремы существования комитета большинства для некоторых классов ограничений D_j . Например, в [1] доказана теорема о том, что система линейных неравенств над пространством $\mathbf{R}^n$

$$(c_j, x) < b_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

разрешима комитетом большинства тогда и только тогда, когда любая ее подсистема из двух неравенств совместна.

С другой стороны, интересен вопрос о существовании комитета с заданным числом членов, поскольку это характеризует степень несовместности системы.

Комитет Q системы (1) из q членов назовем минимальным комитетом системы (1), если система (1) не разрешима комитетом с числом членов, меньшим q .

В соответствии с этим определением все системы вида (1) разбиваются на классы эквивалентности: обладающие комитетом из одного члена (совместные), разрешимые комитетом из трех членов, пяти и т.д. Чем больше число членов в минимальном комитете системы (1), тем более она несовместна. Для некоторых классов множеств D_j известны оценки числа членов минимального комитета. Например [2], если система

$$(a_j, x) < 0, \quad \|a_j\| = 1, \quad (a_j, a_i) > -1, \quad j, i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

обладает комитетом, то ее минимальный комитет содержит не более, чем m членов.

Этот результат является следствием цикличности графа максимальных совместных подсистем (МСП) системы (2). По аналогии с определением [3] графа МСП системы (2), графом МСП системы (1) назовем граф $G = (V, U)$, где $V = \{J_i \mid i = 1, \dots, s\}$ — индексы МСП (1), $U = \{\{J_i, J_j\} \mid J = J_i \cup J_j\}$, $J = \{1, \dots, m\}$.

Определение 1. Пусть $J_1, \dots, J_q$ — индексы МСП системы (1). Последовательность $(J_1, \dots, J_q)$ называется q -комитетобразующей совокупностью (q -КОС) системы (1), если найдется $Q = (x^1, \dots, x^q)$ — минимальный комитет системы (1) такой, что

$$x^i \in D(J_i) = \bigcap_{j \in J_i} D_j, \quad i = 1, \dots, q.$$

В [3] показано, что граф МСП системы (2) содержит циклы нечетной длины, что является достаточным условием существования комитета системы (2). Исходя из определения комитета, можно показать справедливость этого утверждения и для системы (1). А именно, если $J_1, \dots, J_{2k+1}$ — индексы МСП системы (1), образующие в графе G цикл длины $2k+1$, то $Q = (x^1, \dots, x^{2k+1})$, где $x^i \in D(J_i)$, $i = 1, \dots, k+1$, является комитетом системы (1).

Однако, можно привести пример системы (1), разрешимой комитетом (см. случай 1 раздела 3 настоящей статьи), граф МСП которой ацикличен. Поэтому представляет интерес продолжить исследование зависимости свойства системы быть разрешимой комитетом большинства от структуры ее графа МСП.

Целью работы является формулировка и обоснование критерия существования комитета из q членов системы (1) и комбинаторное перечисление 5-КОС.

2. Критерий существования комитета большинства

В этом разделе рассматривается вопрос существования комитета из q членов системы (1). Далее будем обозначать через $[x]$ целую часть от x , а через N_q множество $\{1, \dots, q\}$.

Определение 2. Необязательно различные индексы МСП системы (1) $J_1, \dots, J_{q+1}$ образуют (q, k) -симплекс в графе МСП системы (1), если

$$J = \bigcup_{l=1}^{k+1} J_{i_l}$$

для всякого $\{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset N_{q+1}$.

Теорема 1. Система (1) обладает комитетом из q членов тогда и только тогда, когда найдутся q не обязательно различных МСП системы (1), индексы которых $J_1, \dots, J_q$ образуют $(q-1, [(q-1)/2])$ -симплекс в графе МСП системы (1).

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $Q = (x^1, \dots, x^q)$ — комитет системы (1),

$$J'_i = \{j \mid P_j(x^i) = 1\}, \quad i = 1, \dots, q,$$

и $J_1, \dots, J_q$ — индексы МСП системы (1) такие, что $J'_i \subseteq J_i$, $i = 1, \dots, q$. Покажем, что $J_1, \dots, J_q$ — искомые индексы.

Действительно, пусть $\{i_1, \dots, i_{[(q-1)/2]}, i_{[(q+1)/2]}\} \subset N_q$. Предположим, что

$$j \notin \bigcup_{k=1}^{[(q-1)/2]} J_{i_k},$$

тогда

$$j \notin \bigcup_{k=1}^{[(q-1)/2]} J'_{i_k}.$$

Поскольку Q — комитет системы (1),

$$j \in \bigcap_{k=[(q+1)/2]}^q J'_{i_k} \subseteq \bigcap_{k=[(q+1)/2]}^q J_{i_k},$$

откуда следует, что

$$j \in \bigcup_{l=1}^{[(q+1)/2]} J_{i_l}.$$

Следовательно,

$$J = \bigcup_{l=1}^{[(q+1)/2]} J_{i_l},$$

и $J_1, \dots, J_q$ образуют $(q-1, [(q-1)/2])$ -симплекс в графе МСП системы (1), что и требовалось доказать.

Докажем теперь достаточность. Предположим, что нашлись q МСП системы (1), индексы которых $J_1, \dots, J_q$ образуют $(q-1, [(q-1)/2])$ -симплекс в графе МСП системы (1). Пусть $x^i \in D(J_i)$, $i = 1, \dots, q$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $\{i \mid P_j(x^i) = 1\} = \{1, \dots, q'\}$ для каждого $j \in N_m$. Тогда

$$j \notin \bigcup_{l=q'+1}^q J_l.$$

Следовательно, $q - q' < [(q + 1)/2]$, откуда, $q' \geq [q/2] + 1$. Значит, $Q = \{x^1, \dots, x^q\}$ — комитет системы (1), что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Существование комитета из трех членов равносильно существованию цикла длины три в графе МСП системы (1).*

Как будет показано ниже, уже для $q = 5$ наличие цикла в графе МСП системы (1) не является необходимым для существования комитета из q членов.

3. Перечисление 5-комитетообразующих совокупностей

Пусть $K = (J_1, \dots, J_q)$ — q -КОС системы (1), и пусть $L = \{J_{i_1}, \dots, J_{i_r}\}$, $r \leq q$, — множество индексов в K . Графом q -КОС K назовем подграф $G(K)$ графа МСП системы (1), порожденный множеством вершин L . Рассмотрим несовместную систему уравнений

$$P'_j(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m', \quad (3)$$

где, как в системе (1), $P'_j: R^n \rightarrow \{0, 1\}$ и $J' = \{1, \dots, m'\}$. Пусть $K' = (J'_1, \dots, J'_{q'})$ — q' -КОС системы (3).

Определение 3. Графы q -КОС K и K' называются изоморфными, если существует биекция $\varphi: N_q \rightarrow N_{q'}$, такая, что для всех $L \subset N_q$

$$\bigcup_{j \in L} J_j = J \iff \bigcup_{j \in L} J'_{\varphi(j)} = J'.$$

Очевидно, что 5-КОС K и K' изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы $G(K)$ и $G(K')$. Далее мы покажем, что перечисление всех попарно неизоморфных 5-КОС можно свести к перечислению простых графов с 4 и 5 вершинами.

Предложение 1. *Для всякого конечного простого неориентированного графа $\Gamma = (V', U')$, $|V'| \geq 3$, существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся функции $P_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $j \in N_m$, такие, что граф G МСП системы уравнений*

$$P_j(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m,$$

изоморфен Γ .

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} V' &= \{v_1, \dots, v_s\}, \quad s \geq 3, \quad |U'| = p, \\ W' &= \{w = \{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V', \{v_i, v_j\} \notin U'\} \end{aligned}$$

— множество ребер графа, дополнительного к Γ . Рассуждения проведем для $n = 1$, для $n > 1$ доказательство аналогично. Положим $t = |W'| = (s(s-1)/2) - p$, $m = s + t$, $J = \{1, \dots, m\}$ и

$$J_k = (\{1, \dots, s\} \setminus \{k\}) \cup \{s + i \mid w_i \in W', v_k \notin w_i\}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Нетрудно видеть, что множества J_k , $k = 1, \dots, s$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} J_k &\subset N_m, & J_k &\neq \emptyset, \\ \forall k_1, k_2 \in N_s: k_1 &\neq k_2 & J_{k_1} \setminus J_{k_2} &\neq \emptyset, \\ \forall k_1, k_2 \in N_s: k_1 &\neq k_2 & J_{k_1} \cup J_{k_2} = J &\iff \{v_{k_1}, v_{k_2}\} \in U'. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим функции $P_j: \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}$ следующим образом:

$$\{x \mid P_j(x) = 1\} = \{j\} \cup \{m + i \mid i \in N_s, j \in J_i\}.$$

Число m и функции P_j , $j = 1, \dots, m$, искомые. Действительно, покажем, что $\{J_1, \dots, J_s\}$ — множество индексов МСП системы

$$P_j(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Из определения функций P_j следует, что $x = m + i$ — решение подсистемы с индексом J_i системы (5) для каждого $i \in N_s$. С другой стороны, для всякого индекса L совместной подсистемы в (5) найдется такое $i \in N_s$, что $P_j(m + i) = 1$ для всех $j \in L$, значит, $L \subseteq J_i$. Следовательно, если L — индекс МСП системы (5), то $L \in \{J_1, \dots, J_s\}$, и граф $G = (V, U)$ МСП системы (5) имеет следующий вид:

$$V = \{J_1, \dots, J_s\}, \quad \{J_i, J_j\} \in U \iff \{v_i, v_j\} \in U'.$$

Естественным образом определенное отображение $\varphi: V' \rightarrow V$, где $\varphi(v_k) = J_k$, $k \in N_s$, является биекцией, и, по доказанному,

$$\{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in U \iff \{v_i, v_j\} \in U'.$$

Следовательно, φ — изоморфизм графа Γ на G , что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Существует ровно 15 попарно неизоморфных 5-КОС.*

Доказательство. В силу определения 5-КОС содержит не менее 4 различных индексов. Если 5-КОС K содержит ровно 4 различных индекса, то, не ограничивая общности, можно полагать, что $K = (J_1, J_1, J_2, J_3, J_4)$, и ее граф $G_0 = G(K) = (V(K), U(K))$ имеет вид

$$\begin{aligned} V(K) &= \{J_1, J_2, J_3, J_4\}, \\ U(K) &= \{\{J_1, J_2\}, \{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}\}. \end{aligned}$$

Если K содержит 5 различных индексов, то $G(K)$ имеет 5 вершин и не содержит цикла длины 3. Известно [4], что существует ровно 14 попарно неизоморфных простых графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{14}$ с 5 вершинами, не содержащих цикла длины 3. Все эти графы, очевидно, неизоморфны графу G_0 . Поэтому число попарно неизоморфных 5-КОС не превосходит 15.

Рассмотрим граф $\Gamma_0 \cong G_0$ и графы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{14}$. В силу предложения 1, для каждого $k = 0, \dots, 14$ существуют число $m_k \in \mathbf{N}$ и функции $P_j^k: \mathbf{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, m_k$, такие, что граф $G_k = (V_k, U_k)$ МСП системы уравнений

$$P_j^k(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m_k,$$

изоморфен графу Γ_k . При этом, если $J^k = \{1, \dots, m_k\}$, и $\{J_{i_1}^k, J_{i_2}^k, J_{i_3}^k\} \subseteq V_k$, то

$$\bigcup_{j=1}^3 J_{i_j}^k = J^k,$$

в силу выбора функций P_j^k в ходе доказательства предложения 1. Следовательно, по теореме 1, минимальный комитет, разрешающий систему (3), для каждого k содержит 5 членов и $K_0 = (J_1^0, J_1^0, J_2^0, J_3^0, J_4^0)$, $K_k = (J_1^k, \dots, J_5^k)$, $k = 1, \dots, 14$, есть 5-КОС системы 3 при соответствующем k . Граф G_k по построению является графом 5-КОС K_k , $k = 0, \dots, 14$. В силу попарной неизоморфности графов $G_0, \dots, G_{14}$ 5-КОС $K_0, \dots, K_{14}$ попарно неизоморфны, что и требовалось доказать.

Множество всех 5-КОС по доказанному разбивается на 15 классов эквивалентности. Нами показано, что во множестве всех конечных систем уравнений вида (1) с произвольными функциями $P_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ найдется система, обладающая 5-КОС-представителем каждого класса. Однако, это, вообще говоря, неверно для множества систем вида (1), в котором наложено ограничение на выбор функций P_j .

Из результатов, полученных в [2], например, следует, что если в системе (1), разрешимой комитетом из 5 членов, $P_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ таковы, что при каждом j выполняется равенство $\{x \mid P_j(x) = 1\} = \{x \mid (c_j, x) < 0\}$ для некоторого $c_j \in \mathbf{R}^2$, то система (1) обладает единственной 5-КОС, граф которой является простым циклом длины 5. Ниже мы покажем, что для систем вида (1), в которых каждая $P_j: \mathbf{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ такова, что $\{x \mid P_j(x) = 1\} = \{x \mid f_j(x) < 0\}$ для некоторого полинома f_j степени не выше 2, заключение теоремы 2 остается верным.

Теорема 3. Для каждого из 15 классов эквивалентности на множестве 5-КОС найдется число $m \in N$ и такие полиномы $f_1, \dots, f_m: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ степени не выше 2, что система уравнений $P_j(x) = 1$, $j = 1, \dots, m$, где $\{x \mid P_j(x) = 1\} = \{x \mid f_j(x) < 0\}$, обладает единственной 5-КОС, являющейся представителем данного класса.

Доказательство. Рассмотрим 15 множеств полиномов

$$F_k = \{f_1^k, \dots, f_{m_k}^k\}, \quad m_k \in N, \quad k = 0, \dots, 14,$$

и системы уравнений

$$P_j^k(x) = 1, \quad j = 1, \dots, m_k,$$

где

$$\{x \in \mathbf{R}^2 \mid P_j^k(x) = 1\} = \{x \mid f_j^k(x) < 0\}, \quad j = 1, \dots, m_k, \quad k = 0, \dots, 14.$$

Для каждой системы укажем чертеж множеств решений ее МСП, из которого нетрудно видеть, что она разрешима минимальным комитетом из 5 членов и содержит единственную 5-КОС K_k .

Случай 1. $m_0 = 5$, $F_0 = \{f_1^0, \dots, f_5^0\}$,

$$f_1^0 = x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 - 4/3, \quad f_2^0 = (x + 1)^2 + y^2 - 1\frac{1}{12}, \quad f_3^0 = (x - 1)^2 + y^2 - 1\frac{1}{12},$$

$$f_4^0 = x^2 + \left(y - \frac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2 - \left[\frac{7\sqrt{3}}{30}\right]^2, \quad f_5^0 = x^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 1\frac{1}{12},$$

$$K_0 = (J_1, J_1, J_2, J_3, J_4),$$

$$G(K_0) = (\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, \{\{J_1, J_2\}, \{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 5\}$$

$$J_3 = \{1, 3, 5\}$$

$$J_4 = \{1, 4, 5\}$$

Случай 2. $m_1 = 7$, $F_1 = \{f_1^1, \dots, f_7^1\}$,

$$f_1^1 = (x + 6)^2 + (y - 9)^2 - 89, \quad f_2^1 = (x + 6)^2 + \left(y - \frac{1 + 10\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{593 + 224\sqrt{2}}{9 + 4\sqrt{2}},$$

$$f_3^1 = \left(x - \frac{10 + 7\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{11 + 5\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}\right)^2 - 5 \left[\frac{7 + 4\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}\right]^2,$$

$$f_4^1 = -(x + 2)^2 - (y - 5)^2 + 17, \quad f_5^1 = -x^2 + y, \quad f_6^1 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2 - 20,$$

$$f_7^1 = \left(x - \frac{5\sqrt{2} - 21}{2 + 6\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{5\sqrt{2} + 47}{6 + \sqrt{2}}\right)^2 - \left[\frac{17}{2 + 6\sqrt{2}}\right]^2 (5 - 2\sqrt{2}),$$

$$K_1 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_1) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_2\}, \{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}, \{J_2, J_5\}, \{J_3, J_5\}, \{J_4, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$$

$$J_3 = \{1, 2, 4, 7\}$$

$$J_4 = \{1, 2, 5, 7\}$$

$$J_5 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$J_6 = \{1, 2, 4, 5\}$$

Случай 3. $m_2 = 6$, $F_2 = \{f_1^2, \dots, f_6^2\}$,

$$f_1^2 = (x+5)^2 + y^2 - 100, \quad f_2^2 = x^2 + (y+5)^2 - 36,$$

$$f_3^2 = (x-6)^2 + \left(y - \frac{36\sqrt{11}-83}{5\sqrt{23}}\right)^2 - \frac{48170-12876\sqrt{11}}{575},$$

$$f_4^2 = x^2 + (y-5)^2 - 36, \quad f_5^2 = -(x-4)^2 - y^2 + 16, \quad f_6^2 = -x - y^2 + 9,$$

$$K_2 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_2) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_5\}, \{J_2, J_3\}, \{J_2, J_5\}, \{J_3, J_4\}, \{J_4, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$J_3 = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$J_4 = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$J_5 = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$J_6 = \{1, 4, 5, 6\}$$

Случай 4. $m_3 = 5$, $F_3 = \{f_1^3, \dots, f_5^3\}$,

$$f_1^3 = x, \quad f_2^3 = y, \quad f_3^3 = -x - y + 2, \quad f_4^3 = -2x + y + 2, \quad f_5^3 = x - 2y + 2,$$

$$K_3 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_3) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_2\}, \{J_2, J_3\}, \{J_3, J_4\}, \{J_4, J_5\}, \{J_5, J_1\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 3, 5\}$$

$$J_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$J_3 = \{1, 2, 5\}$$

$$J_4 = \{3, 4, 5\}$$

$$J_5 = \{1, 2, 4\}$$

Случай 5. $m_4 = 7$, $F_4 = \{f_1^4, \dots, f_7^4\}$,

$$f_1^4 = \frac{24}{49}(x+3)^2 + \frac{y^2}{49} - 1, \quad f_2^4 = x^2 - y - 4, \quad f_3^4 = x^2 + y - 4,$$

$$f_4^4 = \frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} - 1, \quad f_5^4 = -(x+4)^2 - y^2 + 25,$$

$$f_6^4 = (x+1)^2 + y - 4, \quad f_7^4 = (x+1)^2 - y - 5,$$

$$K_4 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_4) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_2\}, \{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J_3 = \{1, 2, 5, 6\}$$

$$J_4 = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$J_5 = \{1, 4, 6, 7\}$$

Случай 6. $m_5 = 7$, $F_5 = \{f_1^5, \dots, f_7^5\}$,

$$f_1^5 = \frac{x^2}{64} + \frac{28y^2}{64} - 1,$$

$$f_2^5 = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 25, \quad f_3^5 = (x-2)^2 + (y+5)^2 - 36,$$

$$f_4^5 = (x+3)^2 + (y-5)^2 - 36, \quad f_5^5 = (x+5)^2 + (y+2)^2 - 36,$$

$$f_6^5 = -x^2 - y^2 + 16, \quad f_7^5 = -(x-2)^2 - y^2 + 36,$$

$$K_5 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_5) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{\{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}, \{J_2, J_3\}\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$J_3 = \{1, 4, 5, 6, 7\}$$

$$J_4 = \{2, 4, 6, 7\}$$

$$J_5 = \{3, 5, 6, 7\}$$

Случай 7. $m_6 = 6$, $F_6 = \{f_1^6, \dots, f_6^6\}$,

$$\begin{aligned} f_1^6 &= (x+4)^2 + (y+3)^2 - 25, & f_2^6 &= (x+3)^2 + (y-4)^2 - 25, \\ f_3^6 &= (x-1)^2 + (y-2)^2 - 16, & f_4^6 &= (x-2)^2 + (y+5)^2 - 36, \\ f_5^6 &= -x^2 - (y+3)^2 + 36, & f_6^6 &= -(x-6)^2 - y^2 + 36, \end{aligned}$$

$$K_6 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_6) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}, \{J_2, J_3\}, \{J_3, J_4\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 5\}$$

$$J_3 = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$J_4 = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$J_5 = \{4, 5, 6\}$$

$$J_6 = \{2, 3, 4, 6\}$$

Случай 8. $m_7 = 6$, $F_7 = \{f_1^7, \dots, f_6^7\}$,

$$\begin{aligned} f_1^7 &= \frac{3}{2}x^2 - y, & f_2^7 &= x + (y-2.5)^2 - 1, & f_3^7 &= -x + (y-2.5)^2 - 1, \\ f_4^7 &= -x^2 - (y-4.5)^2 + 2.5, & f_5^7 &= \frac{x^2}{25} + 3(y-5)^2 - 1, & f_6^7 &= x^2 + (y-8)^2 - 30.25, \end{aligned}$$

$$K_7 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_7) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}, \{J_3, J_4\}, \{J_3, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$J_2 = \{1, 5\}$$

$$J_3 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$J_4 = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$J_5 = \{3, 4, 5, 6\}$$

Случай 9. $m_8 = 8$, $F_8 = \{f_1^8, \dots, f_8^8\}$,

$$f_1^8 = -(x-3)^2 - (y-1)^2 + 81,$$

$$f_2^8 = -\frac{(x+1)^2}{27.04} - \frac{(y+1)^2}{121} + 1, \quad f_3^8 = (x+11)^2 + (y-7)^2 - 144,$$

$$f_4^8 = -x - \frac{y^2}{9} + 4, \quad f_5^8 = x^2 - y - 8, \quad f_6^8 = x^2 + (y-4)^2 - 49,$$

$$f_7^8 = x^2 + (y+3)^2 - 25, \quad f_8^8 = x^2 + (y+6)^2 - 64,$$

$$K_8 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_8) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_3\}, \{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3, 8\}$$

$$J_3 = \{1, 4, 5, 7, 8\}$$

$$J_4 = \{2, 4, 6, 7, 8\}$$

$$J_5 = \{3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$J_6 = \{1, 2, 4, 8\}$$

Случай 10. $m_9 = 7$, $F_9 = \{f_1^9, \dots, f_7^9\}$,

$$f_1^9 = -(x-4)^2 - (y+1)^2 + 88.36, \quad f_2^9 = -(x+10)^2 - (y-1)^2 + 121,$$

$$f_3^9 = -\frac{25}{18}(x+3)^2 - y + 9, \quad f_4^9 = (x+4)^2 - y - 4,$$

$$f_5^9 = x^2 + (y-6)^2 - 36, \quad f_6^9 = x^2 + (y+4)^2 - 27.04, \quad f_7^9 = x^2 + (y+1)^2 - 36,$$

$$K_9 = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_9) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}, \{J_3, J_4\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 6\}$$

$$J_3 = \{1, 3, 4, 7\}$$

$$J_4 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$J_5 = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$J_6 = \{1, 6, 7\}$$

Случай 11. $m_{10} = 7$, $F_{10} = \{f_1^{10}, \dots, f_7^{10}\}$,

$$\begin{aligned} f_1^{10} &= -x^2 - (y-1)^2 + 31.36, & f_2^{10} &= -(x+3)^2 - (y+4)^2 + 64, \\ f_3^{10} &= -(x+4)^2 - (y-3)^2 + 36, & f_4^{10} &= (x+7)^2 + (y-5)^2 - 25, \\ f_5^{10} &= (x+6)^2 + (y+4)^2 - 42.25, & f_6^{10} &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 25, \\ f_7^{10} &= (x+1)^2 + y^2 - 25, & K_{10} &= (J_1, \dots, J_5), \\ G(K_{10}) &= (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}, \{J_2, J_3\}\}). \end{aligned}$$

Индексы МСП

$$\begin{aligned} J_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ J_2 &= \{1, 2, 3, 6\} \\ J_3 &= \{1, 4, 5, 7\} \\ J_4 &= \{2, 4, 6, 7\} \\ J_5 &= \{3, 5, 6, 7\} \\ J_6 &= \{1, 3, 5, 7\} \\ J_7 &= \{2, 3, 6, 7\} \end{aligned}$$

Случай 12. $m_{11} = 8$, $F_{11} = \{f_1^{11}, \dots, f_8^{11}\}$,

$$\begin{aligned} f_1^{11} &= -x^2 - (y+1)^2 + 46.24, & f_2^{11} &= -(x+1)^2 - (y-3)^2 + 68.89, \\ f_3^{11} &= \frac{(x+1)^2}{100} + \frac{y^2}{4} - 1, & f_4^{11} &= x - \frac{11}{25}(y-1)^2 + 10, \\ f_5^{11} &= (x+6)^2 + (y-3)^2 - 49, & f_6^{11} &= (x+6)^2 + (y+8)^2 - 64, \\ f_7^{11} &= (x-4)^2 + y^2 - 36, & f_8^{11} &= x^2 + y^2 - 36, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= (J_1, \dots, J_5), \\ G(K_{11}) &= (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_4\}, \{J_1, J_5\}\}). \end{aligned}$$

MSS indices

$$\begin{aligned} J_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ J_2 &= \{1, 2, 3, 7\} \\ J_3 &= \{1, 4, 5, 8\} \\ J_4 &= \{2, 4, 6, 7, 8\} \\ J_5 &= \{3, 5, 6, 7, 8\} \\ J_6 &= \{4, 5, 6, 8\} \\ J_7 &= \{1, 7, 8\} \\ J_8 &= \{1, 2, 4, 7\} \end{aligned}$$

Случай 13. $m_{12} = 8$, $F_{12} = \{f_1^{12}, \dots, f_8^{12}\}$,

$$f_1^{12} = -x^2 - (y+1)^2 + 42.25, \quad f_2^{12} = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 68.89,$$

$$f_3^{12} = \frac{(x+1)^2}{100} + \frac{y^2}{4} - 1, \quad f_4^{12} = x - 0.4(y-1)^2 + 10,$$

$$f_5^{12} = (x+6)^2 + (y-4)^2 - 49, \quad f_6^{12} = (x-4)^2 + (y-4)^2 - 25,$$

$$f_7^{12} = (x-4)^2 + y^2 - 36, \quad f_8^{12} = 24x^2 + y^2 - 49,$$

$$K_{12} = (J_1, \dots, J_5),$$

$$G(K_{12}) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_5\}, \{J_2, J_3\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$$

$$J_3 = \{1, 4, 5, 6, 8\}$$

$$J_4 = \{2, 4, 7, 8\}$$

$$J_5 = \{3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$J_6 = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$J_7 = \{1, 2, 4, 7\}$$

Случай 14. $m_{13} = 9$, $F_{13} = \{f_1^{13}, \dots, f_9^{13}\}$,

$$f_1^{13} = -x^2 - y + 5,$$

$$f_2^{13} = -(x+10)^2 - (y-2)^2 + 169, \quad f_3^{13} = -(x-10)^2 - (y-2)^2 + 169,$$

$$f_4^{13} = (x-1)^2 - y - 4, \quad f_5^{13} = (x+1)^2 - y - 4, \quad f_6^{13} = 2.75x^2 - y - 10,$$

$$f_7^{13} = x^2 + y^2 - 25, \quad f_8^{13} = 0.75(x-2)^2 + y - 1, \quad f_9^{13} = 0.75(x+2)^2 + y - 1,$$

$$K_{13} = (J_1, \dots, J_5), \quad G(K_{13}) = (\{J_1, \dots, J_5\}, \{\{J_1, J_5\}\}).$$

Индексы МСП

$$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$J_2 = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$

$$J_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$J_4 = \{2, 3, 6, 8, 9\}$$

$$J_5 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$J_6 = \{1, 4, 5, 6, 7\}$$

$$J_7 = \{2, 6, 7, 8\}$$

$$J_8 = \{3, 6, 7, 8\}$$

Случай 15. $m_{14} = 10$, $F_{14} = \{f_1^{14}, \dots, f_{10}^{14}\}$,

$$\begin{aligned} f_1^{14} &= 3.4x^2 + y - 11, & f_2^{14} &= 0.5(x-2)^2 + y - 6, & f_3^{14} &= 0.5(x+2)^2 + y - 6, \\ f_4^{14} &= -x - 0.08(y-2)^2 + 4, & f_5^{14} &= x - 0.08(y-2)^2 + 4, & f_6^{14} &= -\frac{x^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{196} + 1, \\ f_7^{14} &= (x-3)^2 + (y-7)^2 - 36, & f_8^{14} &= (x+3)^2 + (y-7)^2 - 36, \\ f_9^{14} &= x^2 + y^2 - 25, & f_{10}^{14} &= -0.5x^2 - y + 8, \\ K_{14} &= (J_1, \dots, J_5), & G(K_{14}) &= (\{J_1, \dots, J_5\}, \emptyset). \end{aligned}$$

Индексы МСП

$J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$J_2 = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$
$J_3 = \{1, 4, 5, 7, 8, 10\}$	$J_4 = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$
$J_5 = \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}$	$J_6 = \{4, 5, 6, 7, 10\}$
$J_7 = \{4, 5, 6, 8, 10\}$	$J_8 = \{2, 7, 8, 10\}$
$J_9 = \{3, 7, 8, 10\}$	$J_{10} = \{1, 2, 3, 4, 9\}$
$J_{11} = \{1, 2, 3, 5, 9\}$	$J_{12} = \{2, 4, 5, 6, 10\}$
$J_{13} = \{3, 4, 5, 6, 10\}$	

Поскольку графы $G(K_k)$, $k = 0, \dots, 14$, попарно неизоморфны, перечисленные 5-КОС K_k , $k = 0, \dots, 14$, также попарно неизоморфны. Теорема доказана.

Список литературы

1. Мазуров В. Д. *Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации*. Наука, Москва, 1990.
2. Мазуров В. Д. О построении комитета системы выпуклых неравенств. *Кибернетика* (1967), №2, 56–59.
3. Гайнанов Д. И., Новокшенов В. А., Тягунов Л. И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств. *Матем. заметки* (1983) **33**, №2, 293–300.
4. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.

Статья поступила 15.08.1993.

Переработанный вариант поступил 06.05.1996.