Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Расширения $GQ(4, 2)$, описание гиперова-
лов, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 101–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:21:35

Расширения $GQ(4, 2)$, описание гиперовалов

© 1997 г. А. А. Махнев

Подграф точечного графа обобщенного четырехугольника $GQ(s, t)$ называется гипервалом, если он является регулярным графом без треугольников валентности $t + 1$ с четным числом вершин. В треугольных расширениях $GQ(s, t)$ в качестве μ -подграфов могут выступать лишь гипервалы. Получена классификация гипервалов в $GQ(4, 2)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-01-00802-а.

1. Введение

Геометрия G ранга 2 — это система инцидентности с множеством точек $\mathcal{P}$ и множеством блоков $\mathcal{B}$ (без повторяющихся блоков). При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Дуальная к G геометрия $G^\top$ получается переменой ролей точек и блоков. Две различные точки из $\mathcal{P}$ называются коллинеарными, если они лежат в общем блоке. Вычетом G_a геометрии G в точке a называется геометрия с множеством точек $\mathcal{P}_a$, коллинеарных с a , и множеством блоков

$$\mathcal{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathcal{B}\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство геометрий ранга 2. Геометрия G ранга 2 называется $\mathcal{F}$ -расширением, если каждый вычет G_a принадлежит $\mathcal{F}$. Точечный граф $\Gamma = \Gamma(G)$ — это граф с множеством вершин $\mathcal{P}$, в котором две различные вершины смежны, если они коллинеарны. Диаметр геометрии, связность, расстояние между двумя точками и т. п. соответствуют этим понятиям в графе Γ . Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a вершин. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Для подграфа Δ из Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин вне Δ , смежных с i вершинами из Δ . Полный двудольный граф с долями порядков m, n назовем (m, n) -графом.

Пусть $a \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется антифлагом). Число точек из B , коллинеарных с a , обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется φ -однородной, если $f(a, B) = 0$ или $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B) ; G называется сильно φ -однородной, если $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B) . Если любые два блока из $\mathcal{B}$ пересекаются по не более чем одной точке, то блоки называются прямыми.

Геометрия G называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой и геометрия является сильно α -однородной (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Геометрия $pG_1(s, t)$ называется обобщенным четырехугольником порядка (s, t) и обозначается $GQ(s, t)$. Далее, $pG_{s+1}(s, t)$ называется 2-схемой Штейнера и $pG_t(s, t)$ — сеть.

Геометрия EpG_α называется расширением α -частичных геометрий, если она связна и каждый вычет есть $pG_\alpha(s, t)$ для подходящих s, t . Ввиду связности порядок (s, t) не зависит от выбора вычета и геометрия обозначается $EpG_\alpha(s, t)$. Геометрия $EpG_\alpha(s, t)$ называется треугольной, если она $(\alpha + 1)$ -однородна.

Пусть $a, b \in \mathcal{P}$, число точек в $\mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_b$ обозначается через $\mu(a, b)$, если a, b находятся на расстоянии 2 и через $\lambda(a, b)$, если a, b находятся на расстоянии 1.

Подграф точечного графа $GQ(s, t)$ называется гипервалом, если он является регулярным графом без треугольников валентности $t + 1$ с четным числом вершин. Заметим, что в треугольных расширениях $GQ(s, t)$ в качестве μ -подграфов могут выступать лишь гипервалы. Коклика из $st + 1$ точек в $GQ(s, t)$ называется овоидом. В [1] были описаны треугольные расширения обобщенных четырехугольников с $s = 2$. Работа [2] завершила классификацию треугольных расширений обобщенных четырехугольников с $s = 3$. При этом важной составной частью исследований явилась классификация гипервалов в $GQ(3, 3)$ [3] и в $GQ(3, 5)$ [2]. Цель данной работы — классификация гипервалов в $GQ(4, 2)$.

Хорошо известно, что существует единственный $GQ(4, 2)$, обозначаемый через $H_3(4)$. Пусть Γ — точечный граф для $H_3(4)$. Тогда Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(45, 12, 3, 3)$, в котором каждая пара точек регулярна, то есть, если a, b — не смежные точки, то Γ содержит единственную отличную от a, b точку c , смежную со всеми тремя точками из $[a] \cap [b]$.

Теорема 1. Пусть Γ — точечный граф для $H_3(4)$, Λ является 3-валентным подграфом из Γ без треугольников с четным числом вершин μ . Положим $K_i = K_i(\Lambda)$, $x_i = |K_i|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $\mu = 6$, Λ является $(3, 3)$ -подграфом, $x_0 = 12$, $x_2 = 27$ и $x_i = 0$ для $i > 2$.
- (2) $\mu = 8$, Λ — кубический подграф, $x_0 = 7$, $x_2 = 24$, $x_4 = 6$, $x_6 = 0$, причем $z^\perp = K_0 \cup K_4$ для некоторой точки $z \in K_0$.
- (3) $\mu = 10$, и либо
 - (a) $x_0 = x_4 = 0$, $x_2 = 30$, $x_6 = 5$, Λ — граф Петерсена; либо
 - (b) $x_0 = 4$, $x_2 = 18$, $x_4 = 12$, $x_6 = 1$, Λ — объединение двух $(2, 3)$ -подграфов, соединенных тремя ребрами, лежащими в окрестности точки из K_6 ; либо
 - (c) $x_0 = 5$, $x_2 = x_4 = 15$, $x_6 = 0$, Λ является 5-призмой Мебиуса (см. рис.3) и K_0 — пятиугольник.
- (4) $\mu = 12$ и либо
 - (a) $x_0 = 6$, $x_2 = x_6 = 0$, $x_4 = 27$, K_0 является $(3, 3)$ -подграфом, а Λ — объединение двух $(3, 3)$ -подграфов; либо
 - (b) $x_0 = x_6 = 3$, $x_2 = 9$, $x_4 = 18$, $K_0 \cup K_6 \cup \Delta$ — овоид для некоторой 3-коккли $\Delta \subset \Lambda$ (подграф Λ изображен на рис.7); либо

(с) $x_0 = 4, x_2 = 6, x_4 = 21, x_6 = 2, K_2$ является $(3, 3)$ -подграфом, окрестности точек из K_6 расщепляют Λ , $z^\perp$ содержит K_0 для некоторой точки $z \in K_0$ и Λ изоморфен одному из графов с рис. 10 (где либо $23', 56'$, либо $26', 53'$ — ребра графа).

(5) $\mu = 14$ и либо

(а) $x_0 = 2, x_2 = 3, x_6 = 8, x_4 = 18, K_0 \cup K_2$ вместе с некоторой вершиной $c \in K_6 \cup \Lambda$ образуют $(3, 3)$ -подграф, если $c \in K_6$, то $K_0 \cup (K_6 - \{c\})$ — овоид, и граф Λ изображен на рис. 11, а если $c \in \Lambda$, то граф Λ изображен на рис. 12; либо

(б) $x_0 = 0, x_2 = 9, x_4 = 12, x_6 = 10, K_2$ — квадратная решетка на 9 точках, $\Delta = K_0(K_4)$ — это $(3, 3)$ -подграф с 4 точками из K_6 и двумя несмежными точками из Λ , и граф Λ изображен на рис. 14.

(6) $\mu = 16, x_0 = 1, x_2 = 0, x_4 = 12, x_6 = 16$, и $z^\perp = K_4$ для $z \in K_0$.

(7) $\mu = 18, x_0 = x_2 = x_4 = 0, x_6 = 27$.

Примеры гиперовалов из пунктов 6, 7 теоремы обсуждаются в конце параграфа 4.

2. Вспомогательные результаты

Пусть Γ — точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(4, 2)$. Известно, что существует единственный $GQ(4, 2)$. Если F — поле из q^2 элементов, V — трехмерное проективное линейное пространство над F с невырожденной эрмитовой формой, то множество изотропных точек из V вместе с множеством вполне изотропных прямых образуют обобщенный 4-угольник $H_3(q^2)$ порядка (q^2, q) . Таким образом, Γ — точечный граф $H_3(2^2)$.

Если a — неизотропная точка из V , H_1, H_2, H_3 — такие гиперболические прямые, проходящие через a , что их пересечения с $a^\perp$ образуют ортогональный базис в $a^\perp$, то $(H_1 \cup H_2 \cup H_3) \cap \Gamma$ назовем триподом с центром в a .

Лемма 1 ([5]). *Любой овоид в $H_3(4)$ является либо плоским овоидом $\pi \cap \Gamma$ для некоторой некасательной плоскости π из V , либо триподом $(H_1 \cup H_2 \cup H_3) \cap \Gamma$ с центром в некоторой неизотропной точке a .*

Лемма 2. *Если Λ — гиперовал из Γ , то $[a] \cap \Lambda$ состоит не более чем из трех изолированных ребер для $a \in \Gamma - \Lambda$ и $6 \leq |\Lambda| \leq 18$.*

Доказательство. Заметим, что любая прямая пересекает Λ по нулю или двум точкам (это свойство вместе с четностью $|\Lambda|$ эквивалентно определению гиперовала). Теперь $a^\perp$ состоит из трех прямых, что влечет первое утверждение леммы.

Пусть Λ — гиперовал из $GQ(s, t)$. Ясно, что $|\Lambda| \geq 2(t + 1)$, причем в случае равенства Λ является $(t + 1, t + 1)$ -подграфом. Предположим теперь, что каждая прямая пересекает Λ . Тогда Λ содержит $(t + 1)(st + 1)$ ребер, поэтому $|\Lambda| = 2(st + 1)$. Итак, $2(t + 1) \leq |\Lambda| \leq 2(st + 1)$.

Лемма 3. Пусть Λ — гипервал из Γ на μ точках, $K_i = K_i(\Lambda)$ и $x_i = |K_i|$. Тогда коэффициенты x_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} x_0 + x_2 + x_4 + x_6 &= 45 - \mu, \\ 2x_2 + 4x_4 + 6x_6 &= 9\mu. \end{aligned} \quad (1)$$

Если прямая L пересекает Λ и содержит по точке из K_i, K_j, K_r , то $i + j + r = \mu$.

Доказательство. Первое утверждение следует из подсчета числа ребер между Λ и $\Gamma - \Lambda$.

Заметим, что L содержит две точки из Λ и каждая из этих точек смежна с двумя точками из $\Lambda - L$. Далее, каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L , поэтому $(i - 2) + (j - 2) + (r - 2) = (\mu - 2) - 4$.

Лемма 4. Пусть Λ — регулярный граф валентности k без треугольников на $2k+2$ вершинах. Тогда либо Λ — полный двудольный граф без максимального паросочетания, либо $k = 4$ и Λ — удвоение пятиугольника, либо $k = 3$ и Λ — куб Мебиуса.

Доказательство. Допустим, что Λ содержит $(k + 1)$ -кликку Δ . Тогда каждая вершина из Δ смежна с k вершинами из $\Lambda - \Delta$. Отсюда, каждая вершина из $\Lambda - \Delta$ также смежна с k вершинами из Δ и $\Lambda - \Delta$ — кликка. Теперь каждая вершина из Δ не смежна с единственной вершиной из $\Lambda - \Delta$ и Λ — полный двудольный граф без максимального паросочетания.

Пусть теперь Λ не содержит $(k + 1)$ -клик, a — вершина из Λ , $\Sigma = \Lambda - a^\perp$, $y_i = |K_i(a^\perp)|$. Если $b \in K_i(a^\perp)$, $c \in [a] \cap [b]$, то b смежна с $k - i$ вершинами из Σ и эти $k - i$ вершин не смежны с c (иначе Λ содержит треугольник). Отсюда c смежна не более чем с $i + 1$ вершинами из Σ и $k \leq i + 2$.

Если $i \neq k$, d — смежная с b точка из $K_j(a^\perp)$, то $[d]$ не пересекает $[b]$ и $i + j \leq k$, в частности, $k \leq 4$. В случае $k = 3$ справедливость леммы проверяется непосредственно. Значит, $k = 4, y_{k-1} = 0$. Теперь $y_2 + y_4 = 5, 2y_2 + 4y_4 = 12$. Отсюда, $y_4 = 1, y_2 = 4$ и Λ — удвоение 5-угольника.

3. Небольшие гипервалы

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 1. В этом параграфе мы рассмотрим случай $6 \leq \mu \leq 12$.

Лемма 5. Если $\mu \leq 8$, то теорема 1 справедлива.

Доказательство. Если $\mu = 6$, то Λ является $(3, 3)$ -подграфом и K_2 состоит из 9 треугольников вида $L - \Lambda$, где L — секущая. Ясно, что остальные 12 точек лежат в K_0 .

Пусть $\mu = 8$. По лемме 1 Λ — граф с рис.1, где Λ содержит либо ребра 23, 67, либо 27, 36. Заметим, что $[1] \cap [8]$ содержит точки 4, 5 и точку из K_4 , смежную с

Рис. 1. Куб

ребрами 12, 78 (такую точку мы будем обозначать 1278). Отсюда, точки 2 и 7 не смежны и Λ — куб. Уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}x_0 + x_2 + x_4 &= 37, \\x_2 + 2x_4 &= 36.\end{aligned}$$

Если секущая L содержит точку из K_4 , то L содержит две точки из K_2 и $x_2 = 4x_4$. Теперь $x_0 = 7$, $x_2 = 24$, $x_4 = 6$. Заметим, что $[4] \cap [5]$ содержит 1, 8 и точку 3456 из K_4 . В силу регулярности пары 1, 8 точки 1278 и 3456 смежны и прямая, проходящая через 1278 и 3456 содержит три точки из K_0 . Наконец, $[1278] \cap [1537]$ содержит 1, 7 и точку z из K_0 . В силу регулярности пары 1, 7 точка z смежна с 1476 и $z^\perp = K_0 \cup K_4$.

Замечание 1. По кубическому подграфу можно восстановить $H_3(4)$.

Пусть множество точек состоит из вершин куба $1, \dots, 8$, двадцати четырех реберных точек (с каждым ребром ij мы сопоставим две точки, ij и $(ij)'$), шести пар противоположных ребер (типа 1278), центра куба z и шести центров граней (типа 1234).

Прямые из $z^\perp$ состоят из z , двух центров противоположных граней и двух пар противоположных ребер, соединяющих эти грани (например z , 1234, 5678, 1537 и 2648).

Прямая из $1234^\perp$, содержащая реберные точки, содержит пару параллельных нештрихованных реберных точек со своей грани и пару штрихованных точек, отвечающих ребрам с противоположной грани, непараллельным своим ребрам (например 1234, 12, 34, $(67)'$, $(58)'$).

Наконец, прямая из $1^\perp$ имеет вид $1, 2, (12)', 12, 1278$.

Лемма 6. Если $\mu = 10$ и $x_6 \geq 2$, то $x_0 = x_4 = 0$, $x_2 = 30$, $x_6 = 5$ и Λ — граф Петерсена.

Рис. 2.

Доказательство. Пусть $\mu = 10$. Если секущая L содержит точку a из K_6 , то L содержит две точки из K_2 , а каждая точка из $[a] \cap \Lambda$ смежна с двумя точками из $\Lambda - [a]$ (всего получается 12 ребер этого вида). Значит, каждая точка из $\Lambda - [a]$ смежна с тремя точками из $\Lambda \cap [a]$ и $\Lambda - [a]$ — коклика. Если же секущая не содержит точек из K_6 , то она содержит 2 точки из K_4 и одну из K_2 . Отсюда, $x_2 = 6x_6 + x_4$ и уравнения (1) принимают вид

$$x_0 + 2x_4 + 7x_6 = 35,$$

$$3x_4 + 9x_6 = 45.$$

Теперь $x_0 = 5 - x_6$, $x_2 = 3(5 + x_6)$, $x_4 = 3(5 - x_6)$.

Если a, b — различные точки из K_6 , то $[a] \cap [b]$ содержит три точки из Λ и в силу регулярности пары a, b найдется третья точка c , смежная со всеми вершинами из $[a] \cap [b]$. Ясно, что $c \in \Lambda$ и Λ однозначно восстанавливается до графа Петерсена.

Если $d \in K_4$, то $\Lambda - [d]$ не расщепляется ребрами из Λ , получаем противоречие с тем, что каждая точка из Λ смежна с некоторой вершиной на внешней прямой из $d^\perp$. Значит, $x_4 = 0$ и заключение леммы выполняется.

Лемма 7. Если $\mu = 10$ и $x_6 = 1$, то $x_0 = 4$, $x_2 = 18$, $x_4 = 12$, $x_6 = 1$ и Λ — объединение двух $(2, 3)$ -подграфов, соединенных тремя ребрами из $[a]$ для $a \in K_6$ (см. рис. 2), причем $K_0 \cup \{a\} \cup (\Lambda - [a])$ — овоид.

Доказательство. Пусть $\mu = 10$, $x_6 = 1$ и $a \in K_6$. Тогда $\Lambda - [a]$ является 4-кокликкой и $x_0 = 4$, $x_2 = 18$, $x_4 = 12$. Пусть $\Lambda - [a] = \{e_1, \dots, e_4\}$. Если $[e_1] \cap [e_2]$ содержит три вершины из $\Lambda \cap [a]$, то $[e_3] \cap [e_4]$ содержит три оставшиеся вершины из $\Lambda \cap [a]$ и Λ — граф из заключения леммы.

Предположим, что $[e_i] \cap [e_j]$ содержит не более двух вершин из $\Lambda \cap [a]$ для любых различных i, j . Если $[e_i] \cap [e_j]$ содержит две точки x, y из $\Lambda \cap [a]$, то в силу регулярности пары x, y вершина a смежна с некоторой точкой $b \in ([e_i] \cap [e_j]) - \Lambda$. Но по структуре графа $a^\perp$ справедливо включение $b \in K_2$, получаем противоречие.

Допустим, наконец, что ребра из $\Lambda \cap [a]$ можно перенумеровать так, что $\{e_1e_2, e_3e_4\}$, $\{e_1e_3, e_2e_4\}$, $\{e_1e_4, e_2e_3\}$. Если $b \in K_4$, то $[b]$ содержит по две точки из $\Lambda \cap [a]$ и $\Lambda - [a]$. Пусть $\Lambda \cap [b]$ содержит e_2, e_3, e_1e_2 . Тогда необходимо $\Lambda \cap [b]$ содержит и e_1e_3 . В силу регулярности пары e_1e_2, e_1e_3 некоторая точка c из $[a]$ смежна с e_2, e_3 . Как и выше, по структуре $[a]$ точка $c \in K_2$, получаем противоречие.

Если K_0 содержит 3-кокликку O' , то $\{a\} \cup O' \cup (\Lambda - [a])$ является 8-кокликкой и по лемме 2.7.1 из [4] содержится в овоиде O . В этом случае $O = K_0 \cup \{a\} \cup (\Lambda - [a])$. Допустим, что K_0 не содержит 3-коклик.

Рис. 3. 5-призма Мебиуса

Пусть $z \in K_0$. Тогда $[z] \cap [a]$ содержит три точки из K_2 . В силу регулярности пары a, z найдется третья точка w , смежная со всеми точками из $[z] \cap [a]$. Ясно, что $w \in K_0$. Аналогично, для двух оставшихся вершин $x, y \in K_0$ пересечение $[x] \cap [y]$ содержит три вершины из $[a] \cap K_2$. Без ограничения общности, xz, yw — ребра. Прямые, проходящие через xz, yw , содержат по точке из $K_2 \cap [a]$. Ясно, что эти точки совпадают, и соответствующую точку мы обозначим через u . Пусть u' — такая отличная от u точка из $K_2 \cap [a]$, что $\Lambda \cap [u'] = \Lambda \cap [u]$. Тогда $[x] \cap [w]$ содержит u и две вершины $b, c \in K_2 \cup K_4$. В силу регулярности пары x, w получим, что $b, c \in [u']$, поэтому b, c лежат на внешних прямых, не пересекающих K_0 и $b, c \in K_2$. Таким образом, b лежит на двух внешних прямых, проходящих через x, w и на внешней прямой из $[u']$, получаем противоречие.

Лемма 8. Если $\mu = 10$ и $x_6 = 0$, то $x_0 = 5$, $x_2 = x_4 = 15$, Λ является 5-призмой Мебиуса и K_0 — пятиугольник (см. рис.3).

Доказательство. Пусть $\mu = 10$ и $x_6 = 0$. Выражения для x_i получаются из уравнений (1).

Заметим, что внешняя прямая содержит либо по две точки из K_0, K_4 и одну из K_2 , либо по одной точке из K_0, K_4 и три из K_2 , либо пять точек из K_2 . Соответствующие прямые назовем прямыми 1-го, 2-го и 3-го типов. Если имеется i прямых 1-го типа, то $x_4 = 15 = 2i + j$.

Как и в доказательстве леммы 6 устанавливается, что Λ не является графом Петерсена, поэтому Λ содержит 4-цикл $xuzw$. Заметим, что Λ не содержит $(2, 3)$ -подграфов, иначе вершина, дополняющая его до $(3, 3)$ -подграфа лежит в K_6 . Теперь $[x] \cap [z]$ содержит y, w и вершину a из K_4 , смежную с ребрами, инцидентными в Λ с x, z . В силу регулярности пары x, z некоторая точка $b \in K_4$ смежна с y, w, a . Отсюда прямая, проходящая через a, b содержит две точки из K_0 и точку $c \in K_2$. Легко понять, что Λ является 5-призмой или 5-призмой Мебиуса (см. рис. 3). Но в 5-призме по 4-циклам $122'1'$, $455'4'$ строятся точки из K_4 , именно, $231'5'$, $341'5'$, поэтому пересечение $[231'5'] \cap [341'5']$ содержит три точки $3, 1', 5' \in \Lambda$.

Итак, Λ является 5-призмой Мебиуса. Прямые из $(1245)^\perp$ содержат точки $1, 2, 12, 123'4'$ (по циклу $233'2'$), $4, 5, 45, 452'3'$ (это две секущие) и $1'2'4'5', 33'$ и две точки из K_0 (по циклу $15'51$). Далее, прямая из $4^\perp \cap (44')^\perp$ содержит либо

44'22', 11'44', либо 1244', 1'2'44'. Но последний случай невозможен, так как секущая, проходящая через 1,2 содержит 1245 и 123'4'. Итак, прямые из $(44')^\perp$ имеют вид 4, 4', 11'44', 22'44'; 2351', 15'2'3', две точки из K_0 ; 12, 1'2', 33'55' и точка из K_0 .

Заметим, что K_0 содержит 5 ребер (с прямых, проходящих через вертикальные ребра призмы), поэтому в Γ по 5 внешних прямых 1-го и 2-го типов. Отсюда, граф содержит две прямых 3-го типа. Ясно, что прямая M 3-го типа не содержит точек из K_2 , отвечающих вертикальным ребрам призмы. Без ограничения общности M содержит 15'. Отличные от M прямые из 15' содержат точки 1, 5', 15'34', 15'2'3' и 1'5, 33', 22'44', точку из K_0 . Далее, $[15'] \cap [44']$ содержит 1'2' и $M = \{15', 45, 3'4', 23, 1'2'\}$.

Таким образом, K_0 является 5-циклом $O_1 \dots O_5$, где, например, точки O_1, O_2 лежат на внешней прямой первого типа, проходящей через 55'.

Лемма 9. Если $\mu = 12$, то $x_0 = 6 - x_6$, $x_2 = 3x_6$, $x_4 = 27 - 3x_6$. Далее, либо $x_6 \geq 2$, либо $x_6 = 0$, K_0 является $(3, 3)$ -подграфом и Λ — объединение двух $(3, 3)$ -подграфов.

Доказательство. Пусть $\mu = 12$. Заметим, что секущая содержит либо по точке из K_2, K_4, K_6 , либо три точки из K_4 . Отсюда $x_2 = 3x_6$ и уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned}x_0 + x_4 + 4x_6 &= 33, \\x_4 + 3x_6 &= 27,\end{aligned}$$

поэтому $x_0 + x_6 = 3$.

Внешняя прямая содержит либо три точки из K_4 и две из K_0 , либо по две точки из K_4, K_2 и одну из K_0 , либо четыре точки из K_2 и одну из K_4 . Соответствующие прямые назовем прямыми 1-го, 2-го и 3-го типов.

Если $x_6 = 0$, то $x_0 = 6, x_4 = 27$, поэтому граф содержит внешние прямые только 1-го типа, в частности, K_0 является $(3, 3)$ -подграфом и Λ — объединение двух $(3, 3)$ -подграфов.

Если $x_6 = 1$, то $x_2 = 3, x_4 = 24, x_0 = 5$. В этом случае K_2 является 3-кликкой и все 9 внешних прямых должны быть первого типа, получаем противоречие.

Лемма 10. Если $\mu = 12$, то Γ не содержит внешних прямых M с 4 точками из K_2 .

Доказательство. Пусть $M \cap K_2 = \{e_1, \dots, e_4\}$. Заметим, что секущая L_i , проходящая через точку e_i , содержит точку $a_i \in K_6$. Отсюда, $x_6 \geq 4$.

Если $x_6 = 6$, то $x_0 = 0, x_2 = 18, x_4 = 9$. Тогда каждая секущая содержит точку из K_6 и каждая внешняя прямая является прямой 3-го типа. Пусть M_i — отличная от M внешняя прямая, проходящая через e_i . Тогда $\bigcup M_i$ содержит 16 точек из K_2 . Пусть b — точка из K_2 , не попавшая в $\bigcup M_i$, N_1, N_2 — внешние прямые из $b^\perp$. Одна из прямых N_1, N_2 пересекает три прямых в $\{M_i\}$. Пусть для определенности N_1 пересекает M_1, M_2, M_3 . Ясно, что N_2 обязательно пересечет одну из этих прямых, получаем противоречие.

Пусть $x_6 = 4$. Тогда $x_0 = 2, x_2 = 12, x_4 = 15$. Пусть $K_0 = \{b, c\}$. Если bc — ребро, то $[b] \cup [c]$ содержит три точки из K_4 с секущей, проходящей через bc и восемь точек из K_4 с четырех внешних прямых из $b^\perp \cup c^\perp$. Четыре точки из $K_4 - (b^\perp \cup c^\perp)$ лежат на внешних прямых 3-го типа. Они не смежны с точками из K_6 , так как $[b]$,

Рис. 4.

$[c]$ содержат по одной точке из K_6 с каждой секущей. Добавляя к этим четырём точкам K_6 и по одной точке из b, c , мы получим два овоида, пересекающихся по 8 точкам, получаем противоречие с леммой 2.7.1 из [4].

Значит, b, c не смежны и $b^\perp \cup c^\perp$ содержит 6 прямых 2-го типа. Отсюда, Γ содержит три прямых 3-го типа и каждая из точек в $\Delta = K_2 - (b^\perp \cup c^\perp)$ лежит на двух прямых 3-го типа. Заметим, что $b^\perp \cup c^\perp$ содержит не менее 12 вершин из K_4 , так как внешняя прямая 3-го типа содержит единственную точку из K_4 . Отсюда, Δ является 3-кликой, что противоречит структуре GQ .

Итак, $x_6 = 5$, $x_0 = 1$, $x_2 = 15$, $x_4 = 12$. Окрестность точки $b \in K_0$ содержит три изолированных ребра из K_2 , поэтому граф $\Sigma = K_2 - [b]$ содержит 9 вершин, окрестности которых в Σ состоят из двух изолированных ребер. Теперь Σ — квадратная решетка на 9 вершинах. С другой стороны, если c_1c_2 — ребро из $K_2 \cap [b]$, то $[c_1] \cap \Sigma$ и $[c_2] \cap \Sigma$ — пара непересекающихся прямых. Значит, множество прямых из Σ состоит из трех пар непересекающихся прямых. Получаем противоречие со строением Σ .

Лемма 11. Если $\mu = 12$ и для некоторой точки $x_2 \in K_6$ подграф $\Lambda - [a]$ содержит изолированную точку, то $x_0 = x_6 = 3$, $x_2 = 9$, $x_4 = 18$, подграф Λ изображен на рис. 7 и $K_0 \cup K_6 \cup \{x, y, w\}$ — овоид.

Доказательство. Из лемм 9 и 10 следует, что $x_6 \geq 2$ и в графе нет внешних прямых третьего типа. Теперь любая точка из K_2 смежна с двумя несмежными точками из K_0 , в частности, $x_0 \geq 2$. Если $x_0 = 2$, $K_0 = \{b, c\}$, то $x_2 = 12$, $x_6 = 4$. Получаем противоречие с тем, что $[b] \cap [c]$ в этом случае содержит K_2 . Значит, $x_0 \geq 3$, $x_6 \leq 3$.

Пусть $a \in K_6$. Каждая точка из $\Lambda \cap [a]$ смежна с двумя точками из $\Lambda - [a]$, всего 12 ребер. Отсюда, $\Lambda - [a]$ имеет точно 3 ребра и является графом одного из видов на рис. 4.

Допустим, что некоторая вершина $x \in \Lambda - [a]$ изолирована в $\Lambda - [a]$ (то есть смежна с тремя вершинами из $\Lambda \cap [a]$). В силу регулярности пары a, x третья точка y смежна со всеми вершинами из $[x] \cap [a]$. Ясно, что $y \in \Lambda$. Если $\Lambda - [a]$ является графом с рис. 4 (c), то выберем вершину $c \in \Lambda \cap [a]$, смежную с вершиной w валентности 2 в $\Lambda - [a]$. Тогда c будет смежна с вершиной, находящейся на расстоянии 2 в $\Lambda - [a]$ от w . Но в этом случае две вершины из $\Lambda - ([a] \cup \{x, y\})$, не лежащие в $[c]$ будут не смежны. Получаем противоречие с тем, что $[d] \cap (\Lambda - [a])$ — ребро для $d \in K_4 \cap [a] \cap [c]$. Итак, $\Lambda - [a]$ — граф с рис. 4 (d).

Рис. 5.

Рис. 6.

Пусть z — вершина валентности 3 в $\Lambda - [a]$. Тогда граф Λ изображен на рис. 5. Ясно, что $[a] \cap [z] = \{d_1, d_2, d_3\}$, где $d_i \in [a] \cap K_4$. В силу регулярности пары a, z некоторая вершина b смежна со всеми тремя точками из $\{d_1, d_2, d_3\}$. При этом b лежит на внешних прямых из $d_i^\perp$, поэтому $b \in K_0$.

Выберем отличную от a точку c из K_6 . Если $[c]$ содержит d_i из $K_4 \cap [a]$, то не смежные с точками из $z^\perp \cap \Lambda \cap [d_i]$ вершины из $\Lambda - [d_i]$ образуют 4-цикл (см. рис. 5). Получаем противоречие с тем, что $\Lambda \cap [c]$ состоит из трех изолированных ребер. Значит, $[a] \cap [c]$ содержит три точки из Λ . При этом $[c]$ содержит не более одной вершины из $[x] \cap [a]$, иначе $c \in \{x, y\}$. В силу регулярности пары a, c найдется третья точка $e \in K_6$, смежная со всеми тремя вершинами из $[a] \cap [c]$. Получаем противоречие с тем, что пара вершин из $([a] \cap [c]) - [x]$ смежна с вершиной из $\Lambda \cap [z]$. Итак, вершина y лежит в K_6 и Λ содержит подграф с рис. 6. Пусть $\{u, w\} = \Lambda - ([a] \cup [x] \cup [y])$. Если uw — ребро, то между $\{u, w\}$ и $\Lambda \cap ([y] \cup [a])$ имеется 4 ребра, поэтому $\Lambda - x^\perp$ содержит две точки, не смежные с u и w . Без ограничения общности, не смежная с u, w точка b лежит в $\Lambda \cap [a]$. Тогда b смежна с тремя точками из $\Lambda \cap [y]$ и в силу регулярности пары a, b некоторая точка из K_6 смежна с тремя точками из $[b] \cap [y]$. Таким образом, $x_6 \geq 4$, получаем противоречие.

Значит, uw — не ребро и каждая вершина из $\Lambda \cap ([a] \cup [y]) - [x]$ смежна с некоторой точкой из $\{u, w\}$. Иначе, некоторая вершина из $K_4 \cap ([a] \cup [y])$ смежна с не ребром u, w .

Как показано выше, если $[u]$ содержит три вершины из $\Lambda \cap [a]$, то K_6 содержит вершину z , смежную с вершинами из $\Lambda \cap (([x] \cup [y]) - ([x] \cap [y]))$. Далее, $x_0 = 3, x_2 = 9, x_4 = 18, x_6 = 3$ и граф Λ однозначно восстанавливается до графа, изображенного на рис. 7. Ясно, что $K_0 \cup K_6 \cup \{x, y, w\}$ — овоид.

Предположим, что $[u]$ содержит две вершины из $\Lambda \cap [a]$. Если Λ содержит подграф с рис. 8, то Λ содержит треугольник. Значит, Λ однозначно восстанавливается до графа на рис. 9. Далее, $[a] \cap [u]$ содержит вершину $d \in K_4 \cap [a]$. Получаем противоречие с тем, что $\Lambda \cap [d]$ состоит из изолированных ребер.

Рис. 7.

Рис. 8.

Лемма 12. Пусть $\mu = 12$, $a \in K_6$ и $\Lambda - [a]$ не содержит изолированных вершин. Тогда $x_0 = 4$, $x_2 = 6$, $x_4 = 21$, $x_6 = 2$, K_2 является $(3, 3)$ -подграфом, окрестности точек из K_6 расщепляют Λ , $z^\perp$ содержит K_0 для некоторой точки $z \in K_0$ и граф Λ изображен на рис.10.

Доказательство. По условию $\Lambda - [a]$ состоит из трех изолированных ребер. Пусть $K_4 \cap [a] = \{b_1, b_2, b_3\}$. Тогда $\Lambda \cap [b_i]$ содержит по ребру из $\Lambda \cap [a]$ и из $\Lambda - [a]$. Отсюда, Λ имеет вид, изображенный на рис. 10, причем либо $23', 56'$, либо $26', 53'$ — ребра из Λ . Обозначения выбраны так, что $\Lambda \cap [b_i]$ содержит точки i, i' .

Допустим, что $c \in K_6$ и $[a] \cap [c]$ содержит точно три вершины из Λ . В силу регулярности пары a, c третья точка $d \in K_6$ смежна со всеми вершинами из $[c] \cap [a]$. Без ограничения общности $1 \in [a] \cap [c]$. Тогда $2, 3 \notin [c]$, так как $2' \in [1] \cap [3]$,

Рис. 9.

Рис. 10.

Рис. 11.

$3' \in [1] \cap [2]$. Значит, $[a] \cap [c] = \{1, 5, 6\}$, получаем противоречие с тем, что $4' \in [5] \cap [6]$.

Итак, $K_6 - [a]$ содержит единственную вершину c , причем $\Lambda \cap [a]$ и $\Lambda \cap [c]$ расщепляют Λ . Значит, $x_6 = 2$, $x_0 = 4$, $x_2 = 6$, $x_4 = 21$, причем $[a] \cap [c] = [a] \cap K_4 = \{b_1, b_2, b_3\}$. В силу регулярности пары a, c третья точка z смежна со всеми b_i . Ясно, что z — точка из K_0 , не смежная с точками из K_2 . Отсюда, $z^\perp$ содержит K_0 . Далее, K_2 — регулярный граф валентности 3 и $K_2 \cap [a]$ — коклика, поэтому K_2 является $(3, 3)$ -подграфом.

4. Большие гипервалы

В этом параграфе предполагается, что Λ — гипервал из $H_3(4)$ на μ точках, $14 \leq \mu \leq 18$.

Лемма 13. Если $\mu = 14$, то $x_0 = 3 - t$, $x_2 = 3t$, $x_4 = 3(7 - t)$, $x_6 = 7 + t$.

В случае $t \leq 1$

$$x_0 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_4 = 18, \quad x_6 = 8,$$

$K_0 \cup K_2$ вместе с некоторой вершиной $c \in K_6 \cup \Lambda$ образует $(3, 3)$ -подграф. Если $c \in K_6$, то $K_0 \cup (K_6 - \{c\})$ — овоид и Λ изображен на рис. 11, а если $c \in \Lambda$, то Λ изображен на рис. 12.

Рис. 12.

Доказательство. Пусть $\mu = 14$. Любая секущая либо содержит точку из K_2 и две из K_6 , либо две точки из K_4 и одну из K_6 . Пусть i — число секущих первого типа. Тогда число секущих второго типа равно $21 - i$ и 6 прямых не пересекают Λ . Отсюда, $x_2 = i$, $x_4 = 21 - i$, $x_6 = (21 + i)/3$. Положим $i = 3t$. Тогда $x_0 = 3 - t$, $x_2 = 3t$, $x_4 = 3(7 - t)$, $x_6 = 7 + t$.

Внешняя прямая содержит либо по точке из K_0, K_2 и одну из K_4 , либо три точки из K_2 и две из K_4 , следовательно, $t > 0$.

Если $t = 1$, то $x_0 = 2$, $x_2 = 3$, $x_4 = 18$, $x_6 = 8$. Положим $K_0 = \{a, b\}$. Тогда $[a] \cap [b] = K_2$ и K_2 лежит в окрестности третьей точки c . Положим $\Delta = \{a, b, c\} \cup K_2$, $\Sigma = K_0(\Delta)$.

Пусть $c \in K_6$ и Σ состоит из 8 точек в $\Lambda - [c]$ и четырех точек из K_6 , не смежных с точками из K_2 . Выберем такие точки $u, w \in K_6 \cap \Sigma$, что $[u] \cap [w]$ содержит три точки из Σ . Тогда оставшиеся три точки из $[u] \cap \Lambda$ лежат в $[c]$, поэтому $[u], [w]$ расщепляют $[c] \cap \Lambda$. Таким образом, оставшиеся две точки из $K_6 \cap \Sigma$ лежат в другой связной компоненте из Σ .

В силу регулярности пары a, u найдется третья вершина x , смежная со всеми вершинами из $[a] \cap [u]$. Из строения Σ ясно, что $x \notin \Lambda$, поэтому $x \in K_6 \cap \Sigma$ и Λ однозначно достраивается до графа, изображенного на рис.11.

Допустим теперь, что $c \in \Lambda$. Тогда Σ состоит из 10 точек в $\Lambda - c^\perp$ и двух несмежных с точками из K_2 вершин $u, w \in K_6$. Но Σ — объединение двух $(3, 3)$ -подграфов, и если u, w лежат в связной компоненте из Σ , то $[u] \cap [w]$ содержит три точки из $\Sigma \cap \Lambda$ и три точки из $[c] \cap \Lambda$, получаем противоречие. Значит, u, w лежат в разных компонентах из Σ , Λ содержит два $(2, 3)$ -подграфа из Σ и однозначно восстанавливается до графа на рис.12.

Лемма 14. Если $\mu = 14$ и $x_0 \leq 1$, то $x_0 = 0$, $x_2 = 9$, $x_4 = 12$, $x_6 = 10$. Далее, K_2 — квадратная решетка на 9 точках, K_4 — объединение двух $(3, 3)$ -подграфов, $\Delta = K_0(K_4)$ — это $(3, 3)$ -подграф с 4 точками из K_6 и двумя несмежными точками из Λ , и граф Λ изображен на рис.14.

Доказательство. Пусть $\mu = 14$, $x_0 = 1$ и $z \in K_0$. Тогда $x_2 = 6$, $x_4 = 15$, $x_6 = 9$ и $[z]$ содержит три точки $a_1, a_2, a_3 \in K_2$. Оставшиеся три точки из K_2 должны лежать на внешних прямых из $a_i^\perp$, не пересекающих K_0 , поэтому они образуют клику, что противоречит структуре GQ .

Итак, $x_0 = 0$, $x_2 = 9$, $x_4 = 12$, $x_6 = 10$. В этом случае K_2 — квадратная решетка на 9 вершинах, прямые которой — это в точности пересечения внешних прямых

с K_2 . Далее, K_4 является объединением двух $(3, 3)$ -подграфов Δ_1, Δ_2 (состоящих соответственно из точек, лежащих на горизонтальных и вертикальных прямых, образующих решетку K_2). Заметим, что три ребра из Δ_1 отвечают внешним прямым, а остальные шесть ребер — секущим, поэтому четыре точки из K_6 лежат в $K_0(\Delta_1)$. Таким образом, $\Delta = K_0(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ — это $(3, 3)$ -подграф, содержащий четыре точки из K_6 и две из Λ .

Пусть $\{x, y\} = \Delta \cap \Lambda$. Если xy — ребро, то $K_6 \cap \Lambda$ — четырехугольник и $x^\perp \cup y^\perp$ содержит K_6 . Для вершины $z \in \Lambda_3(x)$ подграф $[x] \cap [z]$ содержит три точки из K_6 . В силу регулярности пары x, z найдется третья вершина w , смежная с вершинами из $[x] \cap [z]$. Но $x^\perp \cup y^\perp$ содержит K_6 , поэтому $w \in \Lambda_3(x)$. Если $z \in \Lambda_3(x) \cap \Lambda_3(y)$, то $[z]$ содержит три точки из $K_6 \cap [y]$, следовательно, $[z] - ([x] \cap [y])$ содержит два ребра из K_6 . Но эти ребра лежат в Δ , это противоречит тому, что Δ содержит μ -подграфы своих точек.

Итак, в случае, когда xy — ребро, справедливы включения

$$\Lambda_3(x) \subset \Lambda_2(y), \quad \Lambda_3(y) \subset \Lambda_2(x).$$

Если x, y лежат в четырехугольнике из Λ , то точки a, b вне Λ , смежные с парами противоположных вершин четырехугольника, образуют ребро из K_6 . Как и выше, они лежат в Δ . Получаем противоречие с тем, что μ -подграфы из $\{x, y, a, b\}$ лежат в Δ . Значит, x, y не лежат в четырехугольнике из Λ .

Допустим, что x лежит в четырехугольнике $\Sigma \subset \Lambda$. Для $u \in \Sigma_2(x)$ подграф $[x] \cap [u]$ содержит две точки из Σ и точку $a \in K_6$. С другой стороны, точка b вне Σ , смежная с вершинами из $\Sigma - \{x, u\}$, смежна с a , поэтому $[a] \cap [b]$ содержит ребро из Λ и $b \in K_6$, получаем противоречие с тем, что $b \notin x^\perp \cup y^\perp$.

Таким образом, если xy — ребро, то x, y не лежат в четырехугольниках из Λ , $|\Lambda_2(x)| = |\Lambda_2(y)| = 6$. Если $u \in \Lambda_3(x)$, то $[u] \cap [x]$ содержит три точки из K_6 , и отличная от u, x точка w , смежная с вершинами из $[u] \cap [x]$, лежит в $\Lambda_3(x)$. Отсюда, $\Lambda_3(x), \Lambda_3(y)$ являются 2-коккликами. Пусть $\Lambda_3(x) = \{u, w\}$. Тогда Λ содержит подграф с рис. 13 (при этом мы учли, что $[u] \cap [x]$ и $[w] \cap [x]$ лежат в K_6). Напомним, что по две вершины из $\Gamma_2(x)$ лежат в $\Lambda_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, поэтому вершины из $\Lambda_2(x) \cap \Lambda_2(y)$ смежны с вершинами из $\Lambda(y)$ и две вершины из $\Lambda_3(y)$ необходимо лежат на ребре из Λ .

Полученное противоречие показывает, что xy — не ребро. Пусть a является вершиной из K_6 , имеющей валентность 3 в Δ , $\{b_1, b_2, b_3\} = [a] \cap \Delta$. Тогда любая из двух вершин в $\Lambda(a) \cap \Lambda(b_i)$ смежна с двумя вершинами из $\Lambda - ([a] \cup [b_i])$ и подграф Λ однозначно восстанавливается (см. рис. 14).

Лемма 15. Если $\mu = 16$, то $x_0 = 1$, $x_2 = 0$, $x_4 = 12$, $x_6 = 16$ и $z^\perp = K_4$ для точки $z \in K_0$.

Доказательство. Пусть $\mu = 16$. Ясно, что $x_2 = 0$. Любая секущая содержит точку из K_4 и две из K_6 . Отсюда, $4x_4 = 3x_6$ и из уравнений (1) мы получим указанные значения x_i . Любая внешняя прямая содержит 4 точки из K_4 и точку $z \in K_0$. Таким образом, $z^\perp = K_4$. Лемма доказана.

Заметим, что две возможности для гиперовала на 16 точках реализуются с помощью розеток. Розеткой с центром a в обобщенном 4-угольнике называется набор оvoidов, содержащих a и расщепляющих множество точек, не смежных с a . Для

Рис. 13.

Рис. 14.

$H_3(4)$ гиперова на 16 точках можно получить удалением из множества точек розетки точек, входящих в два овоида этой розетки. Каждая точка a является центром двух розеток, состоящих из плоских овоидов, и центром 24 розеток, состоящих из четырех триподов [5].

Лемма 16. Если $\mu = 18$, то $x_0 = x_2 = x_4 = 0$, $x_6 = 27$.

Доказательство. Пусть $\mu = 18$. Любая секущая содержит три точки из K_6 . Отсюда следует утверждение леммы.

Заметим, что объединение двух непересекающихся овоидов дает гиперова на 18 точках. Четыре возможности реализуются с помощью вееров из $H_3(4)$: плоский овоид на $a^\perp$ и трипод с центром a (это объединение трех $(3,3)$ -подграфов), два разных трипода с центром a (240 гиперова), и для ортогональных неизотропных точек a, b гиперова образуют плоский овоид на $a^\perp$ и трипод с центром b , не содержащий $ab \cap H_3(4)$, а также трипод с центром a , содержащий $ab \cap H_3(4)$, и трипод с центром b , не содержащий $ab \cap H_3(4)$ (по 1440 гиперова каждого типа). Это следует из классификации вееров в $H_3(4)$ [5].

Список литературы

1. Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups. *J. Algebra* (1977) **45**, №2, 391–434.
2. Махнев А. А. Конечные локально $GQ(3, 3)$ -графы. *Сиб. матем. жс.* (1994) **35**, №6, 1314–1324.
3. Махнев А. А. Локально $GQ(3, 5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми. *Проблемы теоретической и прикладной математики*. Препринт Ин-та математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 1995.
4. Pain S., Thas J. A. *Finite Generalized Quadrangles*. Pitman, Boston, 1984.
5. Brouwer A. E., Wilbrink H. A. Ovoids and fans in the generalized quadrangle $Q(4, 2)$. *Geom. Dedic.* (1990) **36**, №1, 121–124.

Статья поступила 10.05.1995.