Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, S -классификация функций многозначной логики, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 125–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 10:16:18

***S*-классификация функций многозначной логики**

© 1997 г. С. С. Марченков

Множество функций многозначной логики предлагается классифицировать относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям (*S*-классификация). Содержательное описание всех *S*-замкнутых классов, начатое автором в 1979–82 гг., было завершено Нгуен Ван Хоа. При $k \geq 5$ множество функций k -значной логики имеет только два *S*-предполных класса: класс I_k идемпотентных функций и класс SLP_k Слупецкого. В настоящей работе найдены ключевые свойства, определяющие *S*-замкнутые классы, которые формализованы в виде так называемых основных отношений. На языке отношений и с использованием теории Галуа для алгебр Поста доказано, что всякий *S*-замкнутый класс функций, не лежащий в SLP_k , можно задать с помощью основных отношений. В множестве всех наборов основных отношений определены все независимые наборы, которые соответствуют всем *S*-замкнутым классам, не лежащим в SLP_k . Получена точная формула числа *S*-замкнутых классов, содержащихся в I_k , которая выражается кубическим полиномом от k .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95–01–01625.

Пусть P_k обозначает множество всех функций k -значной логики [1, 2]. Всякое исследование функций многозначной логики необходимо опирается на структурирование (классификацию) множеств P_k . В дискретной математике при классификации множеств P_k наибольшее распространение получил подход, в основе которого лежат порождающие возможности функций относительно операции суперпозиции. При $k = 2$ этот подход дает хорошо известную счетную классификацию Поста [3, 4]. При $k \geq 3$ объективным препятствием на пути построения и эффективного использования аналогичной классификации является континуальность числа образующихся замкнутых классов [5]. Это заставляет искать другие, более широкие операторы замыкания, которые включают операцию суперпозиции и позволяют избежать известных нежелательных эффектов.

В работах [6–10] были построены классификации функций многозначной логики, самодвойственных относительно подстановок из полной симметрической и знакопеременной групп. Идеи, лежащие в основе этих классификаций, переносятся с индивидуальных функций на классы функций. Именно, к операции суперпозиции следует добавить операции получения двойственных функций для подстановок из фиксированной группы. В первую очередь естественно рассмотреть наибольшую группу подстановок, полную симметрическую группу, которая при этом подходе

приводит к наибольшим замкнутым классам и, следовательно, к наименьшему числу самих замкнутых классов. Для соответствующих замкнутых классов и классификации предлагалось несколько названий; мы называем их S -замкнутыми классами и S -классификацией.

Нгуен Ван Хоа [11] нашел все 52 S -замкнутых класса в P_3 , определил [12] все S -предполные классы в P_k при $k \geq 4$, а также описал все S -замкнутые классы, лежащие в S -предполном классе Слупецкого. Кроме того, в [13] в духе работ [6–10] при $k \geq 4$ дано определение всех S -замкнутых классов в P_k , не содержащих констант. Из работ [11–13] и работ [6–10] вытекает, что при любом k , $k \geq 3$, число S -замкнутых классов в P_k конечно, каждый из этих S -замкнутых классов имеет конечный базис по суперпозиции и допускает некоторое эффективное описание.

Доказательства основных результатов в работах [6, 8, 10–12] проводятся примерно по следующей схеме: находится достаточно эффективное определение S -замкнутого класса F , в классе F строится конечный базис или конечная порождающая система, с их помощью определяются все S -предполные в F классы и находится эффективное описание каждого из них.

Совершенно другой путь построения S -классификации функций многозначной логики открывает применение теории Галуа для алгебр Поста [14]. Отметим лишь два важных момента при использовании этого подхода. Во-первых, вместо функций и классов функций рассматриваются отношения и классы отношений. Во-вторых, операция суперпозиции над функциями заменяется некоторыми логическими операциями над отношениями. Так как каждое отношение фактически является именем некоторого замкнутого класса, построение S -классификации на языке отношений может рассматриваться как построение на уровне имен или как синтаксическое построение. Преимущества его состоят в том, что вместо рассуждений функционального и предикатного характеров, присутствующих в работах [6, 8, 10–12], удастся ограничиться рассуждениями только одного типа. Кроме того, язык отношений позволяет более четко выявить и затем формализовать все те свойства, которые лежат в основе S -классификации.

В [12] показано, что при $k \geq 5$ существует ровно два S -предполных класса в P_k : класс I_k идемпотентных функций (в [12] он имеет обозначение P_k^α) и класс SLP_k Слупецкого. При $k = 4$ к этим двум S -предполным классам добавляются еще два: класс QL_4 квазилинейных функций и класс K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна. Кроме того [13], единственными S -предполными классами в K_4 являются классы $K_4 \cap I_4$ и $K_4 \cap QL_4$. Таким образом, построение S -классификации функций из P_k при $k \geq 4$ сводится к описанию S -замкнутых классов, лежащих в I_k , SLP_k и QL_4 .

Как отмечалось, все S -замкнутые классы из SLP_k найдены в [12]. Несмотря на то, что число S -замкнутых классов из SLP_k зависит от k сверхэкспоненциальным образом, описание классов и необходимые доказательства оказываются здесь сравнительно несложными. Основная трудность S -классификации состоит в определении S -замкнутых классов, лежащих в I_k . Для решения этой задачи в [15] были введены некоторые стандартные отношения, названные основными, и показано, что всякий S -замкнутый класс из I_k , задаваемый не более чем двуместными отношениями, можно задать также основными отношениями. В настоящей работе мы завершаем редукцию отношений, начатую в [15], доказывая, что всякий S -замкнутый класс из I_k можно определить подходящим набором основных отношений. Небольшое число основных отношений и их прозрачная структура дают возможность найти

явные формулы для числа S -замкнутых классов различных типов, лежащих в I_k , а также для их общего количества, которое выражается кубическим полиномом от k . С помощью отношений мы описываем также все S -замкнутые классы из QL_4 . Основные результаты, касающиеся S -классификации функций из I_k , в терминах универсальной алгебры изложены в заметке [16].

В терминологии и обозначениях мы придерживаемся работы [15]. Через Π_k обозначаем совокупность всех отношений на $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Если $\rho(x_1, \dots, x_m)$, $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ — отношения из Π_k , то конъюнкцией отношений ρ, σ называем $(m+n)$ -местное отношение

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}),$$

а проекцией отношения ρ по переменной x_i ($1 \leq i \leq m$) назовем $(m-1)$ -местное отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m).$$

Если π — подстановка на E_k , то отношение

$$\rho^\pi(x_1, \dots, x_m) \equiv \rho(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$$

называем двойственным к ρ относительно подстановки π . Диагоналями называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Если $R \subseteq \Pi_k$, то через $[R]_S$ обозначаем множество всех отношений из Π_k , которые можно получить из отношений R и диагоналей с помощью операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных, а также с помощью операции перехода к (любым) двойственным отношениям. Множества вида $[R]_S$ называем S -замкнутыми. Если $[R]_S = [Q]_S$, то множества R, Q называем S -эквивалентными.

Тождественно истинное отношение будем называть также полным отношением, тождественно ложное пустым. Пустое отношение причисляем к диагоналям. Если π — подстановка, то отношение $\pi(x) = y$ называем графиком подстановки π . Через $|E|$ обозначаем число элементов множества E .

Следующие отношения в [15] названы основными.

- (1) $E_i(x) \equiv (x \in E_i), 1 \leq i < k$.
- (2) $\mu_k^i(x, y) \equiv E_2(x) \& E_2(y) \& (x \neq y) \vee (x, y \in \{2, 3, \dots, i-1\}) \& (x = y), 2 \leq i \leq k$.
- (3) $\nu_k^i(x, y) \equiv (x = 0) \& (y = 1) \vee (x, y \in \{2, 3, \dots, i\}) \& (x = y), 2 \leq i \leq k-1$.
- (4) $\eta_k^i(x, y) \equiv E_3(x) \& E_3(y) \& (x+1 = y) \vee (x, y \in \{3, \dots, i-1\}) \& (x = y)$, где сложение рассматривается по модулю 3 и $3 \leq i \leq k-1$.
- (5) $\theta_k(x, y) \equiv E_2(x) \& (x+1 = y) \vee (x, y \in \{3, \dots, l-1\}) \& (x = y)$.
- (6) $\kappa_k(x, y) \equiv (E_2(x) \& E_2(y) \vee (x, y \in \{2, 3\}) \& (x \neq y))$.
- (7) $\zeta_k(x, y) \equiv (x \in \{0, 2, \dots, 2k-2\}) \& (x+1 = y)$, где k четно.
- (8) $\chi_k^i(x, y) \equiv (x = 0) \& E_i(y) \vee x = y = i-1, 2 \leq i \leq k$.
- (9) $\lambda_k(x, y, z) \equiv E_2(x) \& E_2(y) \& E_2(z) \& (x+y+z = 0)$, где сложение рассматривается по модулю 2.

Рис. 1.

$$(10) \quad \kappa_4^1(x, y) \equiv E_3(x) \& \kappa_4(x, y).$$

$$(11) \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \text{ где символ } + \text{ обозначает сложение в поле } \text{GF}(4) \text{ с нулем } 0 \text{ и единицей } 1.$$

На рис. 1 отношения 2–8, 10 изображены в виде двудольных графов, ребра которых соответствуют наборам, удовлетворяющим данным отношениям.

Следующая лемма доказана в [15].

Лемма 1. Пусть $k \geq 3$, $\{a, b, c, d\} \subseteq E_k$, $a \neq b$, $c \neq d$ и $\rho(x, y, z)$ — такое отношение на E_k , что $\rho(0, y, z)$, $\rho(1, y, z)$ суть различные отношения вида

$$\begin{aligned} (y \in \{a, b\}) \& (\pi(y) = z), & (y \in \{a, b\}) \& (z \in \{c, d\}), \\ (y \in \{a, b\}) \& (z \in \{c, d\}) \& (y = e \vee z = f), \end{aligned}$$

где π — подстановка на E_k , отображающая $\{a, b\}$ на $\{c, d\}$, $e \in \{a, b\}$, $f \in \{c, d\}$.

Тогда

$$\lambda_k \in [\{E_1(x), \rho\}]_S.$$

Лемма 2. Пусть отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ представимо в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений (не обязательно с непересекающимися множествами переменных). Тогда

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \sigma_i(x_i) \right) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \tau_{ij}(x_i, x_j) \right), \quad (1)$$

где $\sigma_i(x_i)$ — проекция отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ по всем переменным, отличным от x_i , $\tau_{ij}(x_i, x_j)$ — аналогичная проекция по всем переменным, отличным от x_i, x_j .

Доказательство. Из определения отношений σ_i, τ_{ij} следует, что отношения $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$, рассматриваемые как отношения от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, являются расширениями отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$. Отсюда вытекает, что отношение, стоящее в правой части эквивалентности (1), также будет расширением отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$.

С другой стороны, пусть отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ представимо в виде конъюнкции K одно- и двуместных отношений. Если в конъюнкцию K входит двуместное отношение $\tau(x_i, x_j)$, то для всякого набора $(a_1, \dots, a_n)$, удовлетворяющего отношению ρ , набор (a_i, a_j) будет удовлетворять отношению τ . Поэтому отношение $\tau(x_i, x_j)$ есть расширение отношения $\tau_{ij}(x_i, x_j)$. Аналогичное рассуждение справедливо и для отношений $\sigma(x_i)$, входящих в K . Следовательно, если образовать конъюнкцию K_1 всех тех отношений $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$, которые отвечают входящим в конъюнкцию K отношениям $\sigma(x_i), \tau(x_i, x_j)$, то отношение ρ будет являться расширением отношения, реализуемого конъюнкцией K_1 . Так как отношения $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$ суть расширения отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$, то конъюнктивное добавление к ρ и K_1 одинаковых сомножителей $\sigma_i(x_i), \tau_{ij}(x_i, x_j)$ не меняет положения. В частности, отношение ρ будет расширением отношения из правой части эквивалентности (1). Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 2 из [17].

Лемма 3. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , все двуместные отношения которого имеют вид

$$(x_1 \in E) \& (\pi(x_1) = x_2), \quad (2)$$

где $E \subseteq E_k$ и π — подстановка на E_k . Тогда произвольное отношение из $[\Pi]_S$ можно представить в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений из $[\Pi]_S$, причем все двуместные отношения имеют вид (2).

Лемма 4. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , все двуместные отношения которого имеют вид (2), и $E_2(x) \in \Pi$. Если $\rho \notin [\Pi]_S$, то в множество $[\Pi \cup \{\rho\}]_S$ входит либо двуместное отношение, не принадлежащее $[\Pi]_S$, либо отношение λ_k .

Доказательство. Будем предполагать, что отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ зависит по крайней мере от трех переменных. Для любого $i, i \in E_k$, через $\rho_i(x_2, \dots, x_n)$ обозначим отношение $\rho(i, x_2, \dots, x_n)$. Так как отношение $x = i$ принадлежит множеству $[\Pi]_S$, то $\rho_i \in [\Pi \cup \{\rho\}]_S$. В связи с этим можно считать, что все отношения $\rho_0, \dots, \rho_{k-1}$ содержатся в $[\Pi]_S$. Тогда в силу по лемм 1, 2 каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{k-1}$ допускает представление вида (1). Следовательно,

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_{2 \leq i \leq n} \sigma_i(x_1, x_i) \right) \& \left(\bigwedge_{2 \leq i < j \leq n} \tau_{ij}(x_1, x_i, x_j) \right),$$

где $\sigma_i(x_1, x_i)$ обозначает проекцию отношения ρ по всем переменным, отличным от x_1, x_i , а $\tau_{ij}(x_1, x_i, x_j)$ аналогичную проекцию по переменным, отличным от x_1, x_i, x_j . Отсюда вытекает, что множеству $[\Pi]_S$ не принадлежит либо некоторое отношение $\sigma_i(x_1, x_i)$, либо некоторое отношение $\tau_{ij}(x_1, x_i, x_j)$. Так как первая возможность доказывает лемму, остановимся на второй возможности. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что отношение ρ зависит от трех переменных.

Положим $F = \{i: i \in E_k, \rho_i \text{ не пусто}\}$. В силу соображений двойственности можно предполагать, что $F = E_t$. При $t = 1$ получаем

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 = 0) \& \rho_0(x_2, x_3).$$

Так как $\{E_1(x), \rho_0\} \subseteq [\Pi]_S$, это противоречит соотношению $\rho \notin [\Pi]_S$. Далее считаем, что $t \geq 2$.

Согласно определению множества E_t для любого $i, i \in E_t$, найдутся такие непустые множества G_i, H_i , что

$$\sigma_2(i, x_2) \equiv (x_2 \in G_i), \quad \sigma_3(i, x_3) \equiv (x_3 \in H_i).$$

Если какое-либо из отношений $\sigma_2(x_1, x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_3)$ не принадлежит множеству $[\Pi]_S$, то лемма доказана. Далее предполагаем, что $\{\sigma_2, \sigma_3\} \subset [\Pi]_S$. Тогда, в частности, по лемме 3 отношение σ_2 либо имеет вид (2), либо является конъюнкцией двух одноместных отношений. В соответствии с этим в последовательности $(G_0, \dots, G_{t-1})$ все множества $G_0, \dots, G_{t-1}$ либо различны и одноэлементны, либо $G_0 = \dots = G_{t-1}$.

Если все множества $G_0, \dots, G_{t-1}$ одноэлементны, то для любого $i, i \in E_t$,

$$\rho_i(x_2, x_3) \equiv (x_2 \in G_i) \& (x_3 \in H_i). \quad (3)$$

Иными словами,

$$\rho_i(x_2, x_3) \equiv \sigma_2(i, x_2) \& \sigma_3(i, x_3). \quad (4)$$

Откуда,

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv \sigma_2(x_1, x_2) \& \sigma_3(x_1, x_3), \quad (5)$$

что противоречит соотношениям $\rho \notin [\Pi]_S$, $\{\sigma_2, \sigma_3\} \subset [\Pi]_S$.

Допустим, что $G_0 = \dots = G_{t-1}$ и $|G_0| \geq 2$. Можно считать, что аналогичные свойства выполняются для множеств $H_0, \dots, H_{t-1}$.

Если все отношения $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ совпадают, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \in E_t) \& \rho_0(x_2, x_3).$$

Поскольку $\rho_0 \in [\Pi]_S$, в этом случае множеству $[\Pi]_S$ не принадлежит отношение $x_1 \in E_t$.

Предположим, что среди отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ имеются различные и, например, $\rho_0 \not\equiv \rho_1$. Поскольку $\{\rho_0, \rho_1\} \subset [\Pi]_S$, в силу леммы 3 каждое из отношений ρ_0, ρ_1 либо представимо в виде конъюнкции двух одноместных отношений, либо имеет вид (2).

Допустим, что одно из отношений ρ_0, ρ_1 , например ρ_0 , есть конъюнкция одноместных отношений (которыми, очевидно, будут отношения $x_2 \in G_0$ и $x_3 \in H_0$):

$$\rho_0(x_2, x_3) \equiv (x_2 \in G_0) \& (x_3 \in H_0). \quad (6)$$

Тогда в силу равенств $G_0 = G_1$, $H_0 = H_1$ и несовпадения отношений ρ_0 и ρ_1 отношение ρ_1 должно иметь вид

$$(x_2 \in G_0) \& (\pi_1(x_2) = x_3), \quad (7)$$

где π_1 — подстановка на E_k и $\pi_1(G_0) = H_0$. Пусть a, b — различные элементы из G_0 и $c = \pi_1(a)$, $d = \pi_1(b)$. Тогда условиям леммы 1 удовлетворяет отношение

$$(x_2 \in \{a, b\}) \& (x_3 \in \{c, d\}) \& \rho(x_1, x_2, x_3), \quad (8)$$

что дает включение $\lambda_k \in [\Pi \cup \{\rho\}]_S$.

Предположим, что отношение ρ_0 имеет вид

$$(x_2 \in G_0) \& (\pi_0(x_2) = x_3), \quad (9)$$

где π_0 — подстановка на E_k , $\pi_0(G_0) = H_0$, а отношение ρ_1 имеет вид (7). Так как отношения ρ_0, ρ_1 различны, можно выбрать такие различные элементы a, b из G_0 , что подстановки π_0, π_1 будут различаться на множестве $\{a, b\}$. Если $\pi_0(\{a, b\}) \neq \pi_1(\{a, b\})$, то множеству $[\Pi]_S$ не принадлежит двуместное отношение

$$(\exists x_2)((x_2 \in \{a, b\}) \& \rho(x_1, x_2, x_3)).$$

Если же

$$\pi_0(\{a, b\}) = \pi_1(\{a, b\}) = \{c, d\},$$

то условиям леммы 1 удовлетворяет отношение (8). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , все двуместные отношения которого имеют вид (2) или

$$(x \in E) \& (y \in F) \& (x = a \vee y = b), \quad (10)$$

где $a \in E$, $b \in F$.

Тогда произвольное отношение из $[\Pi]_S$ можно представить в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений из $[\Pi]_S$, все двуместные отношения в которой имеют вид (2) или (10).

Доказательство. Пусть отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ представимо в виде конъюнкции K одно- и двуместных отношений указанного в лемме вида. Исследуем строение отношения

$$(\exists x_j) \rho(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n). \quad (11)$$

Случай, когда переменная x_j в конъюнкции K не входит ни в одно из двуместных отношений, тривиален. Предположим, что x_j содержится в конъюнктивном сомножителе типа (2). Пусть, например, $j = 2$ и отношение (2) является одним из сомножителей конъюнкции K . Если

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 \in E) \& (\pi(x_1) = x_2) \& \sigma(x_1, \dots, x_n), \quad (12)$$

то отношение (11) эквивалентно отношению

$$(x_1 \in E) \& \sigma(x_1, \pi(x_1), x_3, \dots, x_n).$$

В конъюнктивном представлении последнего отношения могут встретиться отношения вида

$$(x_i \in F) \& (\varphi(x_i) = \pi(x_1))$$

или вида

$$(x_i \in F) \& (\pi(x_1) \in G) \& (x_i = c \vee \pi(x_1) = d),$$

где $c \in F, d \in G$. Заменим их соответственно эквивалентными отношениями

$$\begin{aligned} & (x_i \in F) \& (\pi^{-1}(\varphi(x_i)) = x_1), \\ & (x_i \in F) \& (x_1 \in \pi^{-1}(G)) \& (x_i = c \vee x_1 = \pi^{-1}(d)), \end{aligned}$$

которые имеют вид (2) и (10).

Пусть теперь конъюнкция K не содержит отношений вида (2) с переменной x_j . Замечаем, что конъюнкция отношения (10) и одноместного отношения $x_1 \in G$ есть отношение

$$(x_1 \in E \cap G) \& (x_2 \in F) \& (x_1 = a \vee x_2 = b)$$

(если при этом $a \notin G$, то приведенное отношение упрощается до отношения $(x_1 \in E \cap G) \& (x_2 = b)$). Это замечание позволяет считать, что переменную x_j в конъюнкции K содержат только отношения вида (10). В целях дальнейшего упрощения рассуждений, предположим, что $j = n$ и все сомножители конъюнкции K содержат переменную x_n . Таким образом, отношение ρ представимо в виде

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{1 \leq l \leq m} (x_{i_l} \in F_l) \& (x_n \in G_l) \& (x_{i_l} = a_l \vee x_n = b_l), \quad (13)$$

где $a_l \in G_l$ и $b_l \in G_l$. Положим $G = G_1 \cap \dots \cap G_m$. Тогда в формуле (13) все множества $G_1, \dots, G_m$ можно заменить одним множеством G . Будем также считать, что $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq G$ и $G = \{c_1, \dots, c_p\}$. При $p = 1$ имеем $b_1 = \dots = b_m = c_1$ и потому отношение (11) совпадает с отношением

$$(x_{i_1} \in F_1) \& \dots \& (x_{i_m} \in F_m).$$

В случае $p \geq 2$ квантор существования в формуле (11) по определению заменяем дизъюнкцией p слагаемых

$$\begin{aligned} (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n) &\equiv \bigvee_{1 \leq s \leq p} \bigwedge_{1 \leq l \leq m} (x_{il} \in F_l) \& (x_{il} = a_l \vee c_s = b_l) \\ &\equiv \bigwedge_{1 \leq l \leq m} (x_{il} \in F_l) \& \left(\bigvee_{1 \leq s \leq p} \bigwedge_{1 \leq l \leq m} (x_{il} = a_l \vee c_s = b_l) \right). \end{aligned}$$

Отношение $(x_{il} = a_l \vee c_s = b_l)$ либо полно, либо совпадает с отношением $x_{il} = a_l$. Положим для любого s , $1 \leq s \leq p$,

$$N_s = \{l: 1 \leq l \leq m, c_s = b_l\}.$$

Тогда

$$\bigvee_{1 \leq s \leq p} \bigwedge_{1 \leq l \leq m} (x_{il} = a_l \vee c_s = b_l) \equiv \bigvee_{1 \leq s \leq p} \bigwedge_{l \in \{1, \dots, m\} \setminus N_s} (x_{il} = a_l). \quad (14)$$

Множества $N_1, \dots, N_p$ попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с $\{1, \dots, m\}$. Если одно из множеств $N_1, \dots, N_p$ равно $\{1, \dots, m\}$ (а остальные, следовательно, пусты), то формула (14) дает полное отношение. В противном случае пусть, например, $N_1, \dots, N_q$ — все непустые и отличные от $\{1, \dots, m\}$ множества из числа $N_1, \dots, N_p$. Тогда в правой части эквивалентности (14) вместо p можно взять q . Далее с использованием стандартных преобразований из алгебры логики получаем, что

$$\bigvee_{1 \leq s \leq q} \bigwedge_{l \in \{1, \dots, m\} \setminus N_s} (x_{il} = a_l) \equiv \bigwedge_{t, v} (x_{it} = a_t \vee x_{iv} = a_v),$$

где конъюнкция в правой части эквивалентности берется по всем значениям t, v , которые лежат в различных множествах $N_1, \dots, N_q$. Тем самым приходим к конъюнкции отношений вида (10).

Итак, отношение (11) представимо в виде конъюнкции K_1 одно- и двуместных отношений, причем все двуместные отношения имеют вид (2) или (10). Остается показать, что все сомножители из K_1 входят в $[\{\rho\}]_S$. Пусть, например, в K_1 содержится сомножитель $\tau(x_1, x_2)$. Обозначим через $\tau_1(x_1, x_2)$ проекцию отношения (11) по всем переменным, отличным от x_1, x_2 . Тогда отношение τ_1 , рассматриваемое как отношение от всех переменных $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$, есть расширение отношения (11). С другой стороны, так как τ — конъюнктивный сомножитель в K_1 , то $\tau(x_1, x_2)$ является расширением отношения $\tau_1(x_1, x_2)$. Таким образом, отношение τ в конъюнкции K_1 можно заменить отношением τ_1 из $[\{\rho\}]_S$, сохранив при этом реализуемое конъюнкцией K_1 отношение (11). Замечаем далее, что если отношение τ имеет вид (2), то отношение τ_1 либо также имеет вид (2), либо распадается в конъюнкцию двух одноместных отношений. Аналогично в случае, когда отношение τ имеет вид (10). Наконец, как и выше, показываем, что всякое одноместное отношение, входящее в K_1 , можно эквивалентным образом заменить подходящим отношением из $[\{\rho\}]_S$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , содержащее отношение $E_2(x)$, и пусть все двуместные отношения из Π имеют вид (2) или (10). Если $\rho \notin [\Pi]_S$, то в множество $[\Pi \cup \{\rho\}]_S$ входит либо двуместное отношение, не принадлежащее множеству $[\Pi]_S$, либо отношение λ_k .

Доказательство. В целом мы придерживаемся схемы доказательства леммы 4. В частности, с использованием леммы 5 вместо леммы 3 получаем, что отношение ρ можно считать трехместным. Далее определяем множество F , в силу двойственности считаем, что $F = E_t$, и опускаем тривиальный случай $t = 1$. Вводим обозначения $\sigma_2(x_1, x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_3)$ и определяем множества G_i, H_i как области истинности отношений $\sigma_2(i, x_2)$, $\sigma_3(i, x_3)$. Далее предполагаем, что $\{\sigma_2, \sigma_3\} \subset [\Pi]_S$. В этом случае либо $G_0 = \dots = G_{t-1}$ (если σ_2 есть конъюнкция двух одноместных отношений), либо множества $G_0, \dots, G_{t-1}$ различны и одноэлементны (если σ_2 имеет вид (2)), либо одно из множеств $G_0, \dots, G_{t-1}$ содержит не менее двух элементов, а все остальные равны и совпадают с некоторым элементом из этого неоднородного множества (если отношение σ_2 имеет вид (10)). Аналогичное утверждение справедливо для отношения σ_3 и множеств $H_0, \dots, H_{t-1}$.

Если все множества какой-либо из последовательностей $(G_0, \dots, G_{t-1})$, $(H_0, \dots, H_{t-1})$ одноэлементны, то так же, как в лемме 4, приходим к противоречию.

Пусть $G_0 = \dots = G_{t-1}$, $H_0 = \dots = H_{t-1}$, $|G_0| \geq 2$, $|H_0| \geq 2$ и, например, отношения ρ_0, ρ_1 различны. Рассуждения леммы 4 остаются в силе, когда отношение ρ_0 имеет вид (6) или (9), а отношение ρ_1 имеет вид (7).

Если отношение ρ_0 имеет вид (6), а отношение ρ_1 имеет вид

$$(x_2 \in G_0) \& (x_3 \in H_0) \& (x_2 = a \vee x_3 = c), \quad (15)$$

где $a \in G_0$ и $c \in H_0$, то, выбрав элементы b из G_0 , $b \neq a$, и d из H_0 , $d \neq c$, получим, что отношение (8) удовлетворяет условиям леммы 1. Аналогично поступаем, когда отношение ρ_0 имеет вид (9), а отношение ρ_1 вид (15). Стоит лишь отметить, что при $\pi_0(a) = c$ полагаем $d = \pi_0(b)$, а в случае $\pi_0(a) \neq c$ полагаем $b = \pi_0^{-1}(c)$ и $d = \pi_0(a)$.

Пусть отношение ρ_0 имеет вид (15), а отношение ρ_1 имеет вид

$$(x_2 \in G_0) \& (x_3 \in H_0) \& (x_2 = b \vee x_3 = d), \quad (16)$$

где $b \in G_0, d \in H_0$. Так как $\rho_0 \neq \rho_1$, равенства $a = b$, $c = d$ не могут выполняться одновременно. Если, например, $c = d$, то выбираем в H_0 элемент e , отличный от c , и применяем лемму 1 к отношению (8), где вместо элемента c фигурирует e . Если же $a \neq b$ и $c \neq d$, то лемму 1 применяем просто к отношению (8).

Таким образом, далее можно предполагать, что одно из множеств $G_0, \dots, G_{t-1}$, например G_0 , содержит не менее двух элементов, $G_1 = \dots = G_{t-1} = \{a\}$ и $a \in G_0$, а последовательность $(H_0, \dots, H_{t-1})$ либо удовлетворяет аналогичным условиям, либо условиям $H_0 = \dots = H_{t-1}$, $|H_0| \geq 2$.

Пусть сначала $|H_j| \geq 2$ для некоторого $j, 0 \leq j \leq t-1$, а все остальные множества H_i совпадают с множеством $\{c\}$, где $c \in H_j$. Если $j = 0$, то, как и в лемме 4, при любом $i, i \in E_t$, справедливы эквивалентности (3), (4) и, следовательно, эквивалентность (5). Это приводит к противоречию.

Предположим, что $j \neq 0$. В случае выполнения эквивалентности (6) вновь приходим к эквивалентностям (3)–(5). Пусть отношение ρ_0 имеет вид (9). Если $\pi_0(a) = c$, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \in E_t) \& (x_2 \in G_0) \& (x_1 = 0 \vee x_2 = a) \& (\pi_0(x_2) = x_3).$$

Так как в множество $[\Pi]_S$ входит отношение (9), то, следовательно, множеству $[\Pi]_S$ не принадлежит отношение

$$(x_1 \in E_t) \& (x_2 \in G_0) \& (x_1 = 0 \vee x_2 = a),$$

которое получается из отношения $\rho(x_1, x_2, x_3)$ проектированием по переменной x_3 .

Предположим, что $\pi_0(a) \neq c$. В случае $|G_0| \geq 3$ выберем в множестве G_0 такой элемент b , что $\pi_0(b) \notin \{\pi_0(a), c\}$. Тогда согласно лемме 5 в $[\Pi]_S$ не входит отношение

$$\varphi_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)((y \in \{a, b\}) \& \rho(x_1, y, x_2)),$$

поскольку

$$\varphi_1(0, x_2) \equiv (x_2 \in \{\pi_0(a), \pi_0(b)\}), \varphi_1(1, x_2) \equiv (x_2 = c), \quad c \notin \{\pi_0(a), \pi_0(b)\}.$$

Допустим, что $|G_0| = 2$, $G_0 = \{a, b\}$ и $H_0 = \{c, d\}$. Положим

$$\varphi_2(x_1, x_2) \equiv E_2(x_1) \& (\exists x_3)\rho(x_1, x_2, x_3).$$

Отношению φ_2 удовлетворяют только три набора $(0, a)$, $(0, b)$, $(1, a)$. Как показано в лемме 11 из [15], множеству $[\{\varphi_2\}]_S$ принадлежит отношение χ_k^2 . Пусть φ_3 есть двойственное к χ_k^2 отношение, когда в роли 0 и 1 выступают соответственно c и d . Положим

$$\varphi_4(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, x_2, y) \& \varphi_3(y, x_3)). \quad (17)$$

Тогда отношению $\varphi_4(0, x_2, x_3)$ удовлетворяют лишь наборы (a, d) , (b, c) , (b, d) , а отношению $\varphi_4(1, x_2, x_3)$ наборы (a, c) , (a, d) . Если теперь положить

$$\varphi_5(x_1, x_2, x_3) \equiv E_2(x_1) \& \varphi_4(x_1, x_2, x_3),$$

то, рассматривая отношения $\varphi_5(x_1, x_2, c)$, $\varphi_5(x_1, x_2, d)$, убеждаемся, что отношение φ_5 удовлетворяет условиям леммы 1.

Продолжая доказательство, предположим, что отношение ρ_0 имеет вид (16). Если $a = b$ или $c = d$, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv \sigma_2(x_1, x_2) \& \sigma_3(x_1, x_3) \& \rho_0(x_2, x_3),$$

и мы приходим к противоречию.

Пусть $a \neq b$ и $c \neq d$. Как установлено в лемме 11 из [15], множеству $[\{\rho_0\}]_S$ принадлежит отношение χ_k^2 . Пусть, как и выше, отношение φ_3 двойственно отношению χ_k^2 . Тогда формула (17) определяет то же самое отношение φ_4 .

В заключение доказательства рассмотрим случай, когда

$$|G_0| \geq 2, \quad G_1 = \dots = G_{t-1} = \{a\}, \quad H_0 = \dots = H_{t-1}, \quad |H_0| \geq 2.$$

Пусть отношение ρ_0 имеет вид (9). Положим

$$\varphi_6(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, y, x_2) \& \rho(x_1, y, x_3)).$$

Тогда

$$\varphi_6(0, x_2, x_3) \equiv (x_2 \in H_0) \& (x_2 = x_3), \quad \varphi_6(1, x_2, x_3) \equiv (x_2 \in H_0) \& (x_3 \in H_0).$$

Поэтому, выбрав в множестве H_0 различные элементы c, d , получим отношение

$$(x_2 \in \{c, d\}) \& (x_3 \in \{c, d\}) \& \varphi_6(x_1, x_2, x_3),$$

которое удовлетворяет условиям леммы 1.

Предположим, наконец, что отношение ρ_0 имеет вид (16). Если $b = a$, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv \sigma_2(x_2, x_2) \& \rho_0(x_2, x_3),$$

что невозможно, так как $\{\sigma_2, \rho_0\} \subset [\Pi]_S$. Если же $b \neq a$, то положим

$$\varphi_7(x_1, x_2, x_3) \equiv E_2(x_1) \& (x_2 \in \{a, b\}) \& \rho(x_1, x_2, x_3).$$

Выбирая в множестве H_0 элемент c , отличный от d , и рассматривая отношения $\varphi_7(x_1, x_2, c)$, $\varphi_7(x_1, x_2, d)$, убеждаемся, что отношение φ_7 удовлетворяет условиям леммы 1.

Следующая лемма по существу совпадает с леммой 2 из [17].

Лемма 7. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , все двуместные отношения которого имеют вид (2). Тогда произвольное отношение из $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений из $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$, двуместных отношений вида (2) из $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ и отношений вида

$$(x_1 \in F_1) \& \dots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_1(x_1) + \dots + \pi_n(x_n) = 0), \quad (18)$$

где $n \geq 2$, $|F_1| = \dots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \dots, \pi_n$ — подстановки на E_k такие, что $\pi_1(F_1) = \dots = \pi_n(F_n) = E_2$, и сложение рассматривается по модулю 2.

Лемма 8. Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k , все двуместные отношения которого имеют вид (2). Если $\rho \notin [\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$, то множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k, \rho\}]_S$ принадлежит двуместное отношение, не входящее в $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$.

Доказательство. Как и в лемме 4, вводим обозначения ρ_i , F и предполагаем, что $F = E_t$, $t \geq 2$, и каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ принадлежит $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$.

Согласно лемме 7 каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений, двуместных отношений вида (2) и отношений вида (18). Пусть в конъюнктивных представлениях всех отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ участвуют отношения не более чем от m переменных. Как и в лемме 2, для каждого из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ можно получить аналог формулы (1), в котором участвуют всевозможные проекции отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ по $(n-m), \dots, (n-1)$ переменным. Аналог соответствующего рассуждения из доказательства леммы 4 показывает, что множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не принадлежит отношение от $m+1$ переменных, которое получается из отношения ρ проекциями по $n-m-1$ переменным. Если $m+1 < n$, то мы понизили число переменных у отношения, не входящего в множество $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$. В связи с этим можно предполагать, что отношение ρ либо зависит не более чем от трех переменных, либо в конъюнктивном представлении некоторого отношения ρ_i ($i \in E_t$) встречается сомножитель вида (18) от $n-1$ переменных. Заметим, что во втором случае само отношение ρ_i имеет вид (18). В самом деле, если это не так, то в представлении отношения ρ_i имеется еще хотя бы один сомножитель τ , причем конъюнкция отношений ρ_i и τ отлична от ρ_i .

Учитывая структуру отношения τ , даваемую леммой 7, несложно убедиться в том, что отношение ρ_i в этом случае можно представить в виде конъюнкции отношений от меньшего числа переменных. Это, как мы видели, влечет за собой уменьшение числа переменных у отношения, не входящего в множество $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$.

Итак, в дальнейшем рассматриваем два случая, когда либо $n = 3$, либо $n > 3$ и одно из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ имеет вид (18).

Пусть $n = 3$. Согласно леммам 3, 7 двуместные отношения из $[\Pi]_S$ и $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ имеют одну и ту же структуру. Поэтому можно применять те рассуждения из доказательства леммы 4, где не происходит обращения к лемме 1. Рассмотрим остальные возможности.

Пусть, как и в лемме 4,

$$G_0 = \dots = G_{t-1}, \quad H_0 = \dots = H_{t-1}, \quad |G_0| \geq 2, \quad |H_0| \geq 2$$

и отношения ρ_0, ρ_1 различны. Предположим далее, что отношение ρ_0 имеет вид (6), а отношение ρ_1 вид (7). Если $a \in G_0$, то множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ в силу леммы 7 не принадлежит отношение $\rho(x_1, a, x_3)$.

Допустим, что отношение ρ_0 имеет вид (9), отношение ρ_1 вид (7) и $|G_0| = |H_0| = 2$. Если $t \geq 3$, то согласно рассмотренным выше случаям можно считать, что каждое из отношений $\rho_2, \dots, \rho_{t-1}$ совпадает с одним из отношений ρ_0, ρ_1 . Беря элемент a из множества G_0 , нетрудно убедиться в том, что множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не принадлежит отношение $\rho(x_1, a, x_3)$.

Пусть $t = 2$, $G_0 = \{a, b\}$, $\pi_0(a) = c$, $\pi_0(b) = d$. Тогда $\pi_1(a) = d$, $\pi_1(b) = d$ и

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y_2)(\exists y_3)(\rho(y_2, x_2, c) \& \rho(y_3, a, x_3) \& \lambda_k(x_1, y_2, y_3)).$$

Отсюда следует, что множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не принадлежит одно из отношений $\rho(y_2, x_2, c)$, $\rho(y_3, a, x_3)$.

Предположим, что $n \geq 4$. Тогда одно из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ имеет вид (18). Будем считать, что это отношение ρ_0 .

Если существуют такие значения i из $E_t \setminus \{0\}$ и j из $\{2, \dots, n\}$, что (в обозначениях леммы 4) $\sigma_j(0, x_j) \not\equiv \sigma_j(i, x_j)$, то множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не принадлежит отношение $\sigma_j(x_1, x_j)$. Далее предполагаем, что для рассматриваемых значений i, j отношения $\sigma_j(0, x_j)$, $\sigma_j(i, x_j)$ совпадают.

Пусть существуют такие значения $i \in E_t \setminus \{0\}$ и $j \in \{2, \dots, n\}$ и такое отношение φ от $n - 2$ переменных, что

$$\rho_i(x_2, \dots, x_n) \equiv \sigma_j(i, x_j) \& \varphi(x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Если набор $(c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)$ удовлетворяет отношению φ , то

$$\rho_i(c_2, \dots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \dots, c_n) \equiv \sigma_j(i, x_j),$$

а отношению $\rho_0(c_2, \dots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \dots, c_n)$ удовлетворяет, очевидно, только один элемент. Поэтому отношение $\rho(x_1, c_2, \dots, c_{j-1}, x_j, c_{j+1}, \dots, c_n)$ не принадлежит множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$.

Пусть существует такое $i \in E_t \setminus \{0\}$ и такое отношение φ_1 вида (2) или (18) от m переменных, что $2 \leq m \leq n - 2$ и конъюнктивное представление отношения ρ_i содержит сомножитель φ_1 . Без ограничения общности можно считать, что φ_1 зависит от переменных $x_2, \dots, x_{m+1}$. Пусть $\varphi_2(x_1, \dots, x_{m+1})$ обозначает проекцию отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ по переменным $x_{m+2}, \dots, x_n$. Так как ρ_0 имеет

вид (18) и $m \leq n - 2$, то $\varphi_2(0, x_2, \dots, x_{m+1})$ есть конъюнкция m одноместных отношений, каждому из которых удовлетворяет ровно два элемента. Отношение $\varphi_1(x_2, \dots, x_{m+1})$ есть, очевидно, расширение отношения $\varphi_2(i, x_2, \dots, x_{m+1})$. Выберем значения $c_3, \dots, c_{m+1}$ так, чтобы отношение $\varphi_2(i, x_2, c_3, \dots, c_{m+1})$ было непустым (это можно сделать, поскольку $i \in E_t$). Так как φ_1 имеет вид (2) или (18), отношению $\varphi_2(i, x_2, c_3, \dots, c_{m+1})$ будет удовлетворять ровно один элемент. Вместе с тем отношению $\varphi_2(0, x_2, c_3, \dots, c_{m+1})$ удовлетворяют два элемента. Следовательно, множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не принадлежит отношение $\varphi_2(x_1, x_2, c_3, \dots, c_{m+1})$.

Остается исследовать случай, когда все отношения $\rho_1, \dots, \rho_{t-1}$ имеют вид (18). В силу полученных выше ограничений на отношения $\sigma_j(i, x_j)$ среди отношений $\rho_1, \dots, \rho_{t-1}$ может быть не более одного отношения, отличного от ρ_0 . Случай, когда все отношения $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ совпадают, тривиален. Предположим поэтому, что $\rho_1 \neq \rho_0$.

Если $t \geq 3$ и набор $(c_3, \dots, c_n)$ таков, что отношение $\rho_0(x_2, c_3, \dots, c_n)$ непусто, то в множество $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_S$ не входит отношение $\rho(x_1, x_2, c_3, \dots, c_n)$.

Пусть $t = 2$. Так как по предположению $\sigma_j(0, x_j) \equiv \sigma_j(1, x_j)$ для любого j из $\{2, \dots, n\}$, то, в частности, в представлении (18) для отношений ρ_0, ρ_1 при любом $j, 2 \leq j \leq n$, соответствующие множества F_j совпадают. Кроме того, если для некоторого $j, 2 \leq j \leq n$, в представлении (18) для отношения ρ_0 фигурирует отображение π_j , то в аналогичном представлении для отношения ρ_1 могут стоять лишь отображения π_j и $\pi_j + 1$, где сложение рассматривается по модулю 2. Отсюда и из $\rho_0 \neq \rho_1$ вытекает, что отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ эквивалентно отношению

$$E_2(x_1) \& (x_2 \in F_1) \& \dots \& (x_n \in F_n) \& (x_1 + \pi_2(x_2) + \dots + \pi_n(x_n) = 0), \quad (19)$$

где предполагается, что

$$\rho_0(x_2, \dots, x_n) \equiv (x_2 \in F_2) \& \dots \& (x_n \in F_n) \& (\pi_2(x_2) + \dots + \pi_n(x_n) = 0).$$

Однако отношение (19) двойственно отношению

$$E_2(x_1) \& \dots \& E_2(x_n) \& (x_1 + \dots + x_n = 0),$$

которое принадлежит множеству $[\{\lambda_k\}]_S$. Противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 9. Пусть ρ — отношение на E_k и $\rho \notin [\{E_1(x)\}]_S$. Тогда при $k \geq 5$ множество $[\{E_1(x), \rho\}]_S$ содержит отношение $E_2(x)$, а при $k = 4$ одно из отношений $E_2(x)$, κ_4 .

Доказательство. Нетрудно видеть, что всякое отношение из множества $[\{E_1(x)\}]_S$ можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений $x = a$ ($a \in E_k$) и диагоналей $x_i = x_j$. Как в лемме 4, определяем отношения ρ_i , множество F и предполагаем, что $F = E_t$, $t \geq 2$, и все отношения $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ принадлежат множеству $[\{E_1(x)\}]_S$. Кроме того, учитывая строение отношений из $[\{E_1(x)\}]_S$, отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ в соответствии с леммой 2 можно считать не более чем трехместным. Если $t < k$ или $n = 1$, то, очевидно, $E_2(x) \in [\{\rho\}]_S$. Поэтому далее считаем, что $t = k$ и $n \geq 2$.

Пусть $n = 2$. Так как отношения $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ принадлежат множеству $[\{E_1(x)\}]_S$, для любого $i, i \in E_k$, отношение $\rho_i(x_2)$ либо полно, либо имеет вид $x_2 = a$. Если для

любого a из E_k найдется такое i , что $\rho_i(x_2) \equiv (x_2 = a)$, то отношение ρ имеет вид (2), где $E = E_k$, а подстановка π отлична от тождественной, поскольку $\rho \notin [\{E_1(x)\}]_S$. Тогда согласно леммам 1–3 из [15] множество $[\{\rho\}]_S$ содержит либо отношение η_k^k , либо отношение κ_4 . Согласно лемме 2 из [15] справедливо включение $\kappa_4 \in [\{\eta_4^4\}]_S$. Если $k \geq 5$, то $\eta_k^k(x, x) \equiv (x \in \{3, \dots, k-1\})$, и мы получаем отношение $E_2(x)$.

Пусть существуют такие значения a, i , что отношение $\rho_i(x_2)$ полно, а все остальные отношения $\rho_j(x_2)$ совпадают с отношением $x_2 = a$. Тогда согласно лемме 13 из [15] справедливо включение $\chi_k^k \in [\{\rho\}]_S$. Очевидно, что $E_2(x) \in [\{\chi_k^k\}]_S$.

В остальных случаях найдется такое a , что хотя бы одному из отношений $\rho(a, x_2)$, $\rho(x_1, a)$ удовлетворяет более одного, но менее k элементов. Следовательно, $E_2(x) \in [\{\rho(a, x_2), \rho(x_1, a)\}]_S$.

Обратимся теперь к случаю, когда $n = 3$. Предположим, что для любого i , $i \in E_k$, отношение ρ_i имеет вид (3), где каждое из множеств G_i , H_i либо состоит из одного элемента, либо совпадает с E_k (если одно из множеств G_i , H_i содержит более одного, но менее k элементов, то отношение $E_2(x)$ получается очевидным образом). Тогда имеет место эквивалентность (5), где отношения $\sigma_2(x_1, x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_3)$ определяют, как в лемме 4. Отсюда сразу следует, что множеству $[\{E_1(x)\}]_S$ не принадлежит одно из отношений $\sigma_2(x_1, x_2)$, $\sigma_3(x_1, x_3)$.

Пусть среди отношений $\rho_0, \dots, \rho_{k-1}$ имеется хотя бы одна диагональ $x_2 = x_3$. Все отношения $\rho_0, \dots, \rho_{k-1}$ не могут совпадать с $x_2 = x_3$, поскольку в этом случае отношение ρ оказывается в множестве $[\{E_1(x)\}]_S$. Без ограничения общности можно считать, что отношения $\rho_0, \dots, \rho_m$ совпадают с диагональю $x_2 = x_3$, а отношения $\rho_{m+1}, \dots, \rho_{k-1}$ имеют вид (3). Если среди множеств $G_{m+1}, \dots, G_{k-1}$ имеется хотя бы одно одноэлементное, то в множество $[\{E_1(x)\}]_S$ не входит отношение $\sigma_2(x_1, x_2)$, а если $G_{m+1} = \dots = G_{k-1} = E_k$, то отношение $\rho(x_1, x_2, b)$, где $b \in H_{m+1}$. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть ρ — отношение на E_4 . Если $\rho \notin [\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$, то множество $[\{E_1(x), \kappa_4, \rho\}]_S$ содержит одно из отношений $E_2(x)$, η_4^4 или основное отношение 11; если $\rho \notin [\{E_1(x), \eta_4^4\}]_S$, то множество $[\{E_1(x), \eta_4^4, \rho\}]_S$ содержит либо отношение $E_2(x)$, либо основное отношение 11; если $\rho \notin [\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$, то множество $[\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \rho\}]_S$ содержит отношение η_4^4 .

Доказательство. Доказательство первых двух утверждений в значительной степени повторяет соответствующую часть доказательства предыдущей леммы. Остановимся поэтому на некоторых отличительных моментах.

Пусть ρ — двуместное отношение вида (2), где $E = E_4$. Если $\rho \notin [\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$, то по лемме 3 из [15] подстановка π в представлении (2) отношения ρ не принадлежит четверной группе Клейна. Поэтому согласно лемме 2 из [15] справедливо включение $\eta_4^4 \in [\{\rho\}]_S$.

Пусть ρ — трехместное отношение, все отношения $\rho_0, \dots, \rho_3$ имеют вид (2), где $E = E_4$, и $\rho \notin [\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$. Замечаем, что все отношения вида (2) из множества $[\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$ имеют вид $x_1 + a = x_2$, где $a \in E_4$ и сложение рассматривается в поле $\text{GF}(4)$. Пусть поэтому для $i \in E_4$ отношение $\rho_i(x_2, x_3)$ имеет вид $x_2 + a_i = x_3$. В случае $a_0 = \dots = a_3$ отношение ρ оказывается в множестве $[\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$. Если множество $\{a_0, \dots, a_3\}$ содержит более одного, но менее четырех различных элементов, то множеству $[\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$ не принадлежит отношение $\rho(x_1, x_2, 0)$. В

противном случае обозначим через φ такую подстановку, что $\varphi(i) = a_i$. Тогда

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (\varphi(x_1) + x_2 = x_3).$$

Откуда

$$(\exists y)(\rho(y, x_1, x_2) \& \rho(y, x_3, x_4) \equiv (x_1 + x_2 = x_3 + x_4).$$

Случай $\rho \notin [\{E_1(x), \eta_4^4\}]_S$ рассматривается аналогичным образом.

Пусть $R = [\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$ и $\rho \notin R$. Нетрудно показать (см. также лемму 2 из [17] и лемму 6), что всякое отношение из R можно представить в виде конъюнкции отношений

$$x_1 + \dots + x_m = a, \quad (20)$$

где $m \geq 1$, $a \in E_4$ и сложение рассматривается в поле $\text{GF}(4)$.

Предположим сначала, что отношение ρ зависит не более чем от двух переменных. Так как при $m = 2$ отношения (20) исчерпывают все отношения вида (2), где $E = E_4$ и подстановка π входит в четверную группу Клейна, а множество $\{E_1(x), \rho\}$ согласно теореме из [15] S -эквивалентно некоторому набору основных отношений, то в множество $[\{E_1(x), \rho\}]_S$ входит одно из основных отношений 1 (при $i = 2, 3$), 2–5, 7–10. Как установлено в [15], во всех перечисленных случаях через указанные основные отношения можно определить одно из отношений $E_2(x)$, η_4^4 . При $\rho(x) \equiv E_2(x)$ отношение

$$\varepsilon(x_1, x_2) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)((x_1 + x_2 = y_1 + y_2) \& E_2(y_1) \& E_2(y_2))$$

представляет собой отношение эквивалентности на E_4 с двумя классами эквивалентности $\{0, 1\}$ и $\{2, 3\}$. В лемме 17 из [15] установлено, что $\mu_4^4 \in [\{E_1(x), \varepsilon\}]_S$. Тогда по лемме 1 из [15] получаем, что $\eta_4^4 \in [\{E_1(x), \varepsilon\}]_S$.

Пусть отношение ρ зависит от n переменных, $n \geq 3$. Так же, как в лемме 7, вводим отношения ρ_i и предполагаем, что все отношения $\rho_0, \dots, \rho_3$ непусты (иначе мы либо имели для отношения ρ представление вида $(x = i) \& \rho_i(x_2, \dots, x_n)$, либо получили из отношения ρ отношение $E_2(x)$). Далее показываем, что можно ограничиться рассмотрением двух случаев, когда либо $n = 3$, либо $n > 3$ и одно из отношений $\rho_0, \dots, \rho_3$ имеет вид (20), где $m = n - 1$.

Пусть $n = 3$. Замечаем, что любому двуместному отношению из R удовлетворяют 1, 4 или 16 наборов. Предположим, что одно из отношений $\rho_0, \dots, \rho_3$, например ρ_0 , полно. Все остальные отношения $\rho_1, \dots, \rho_3$ не могут быть полными. Поэтому можно выбрать такое $b \in E_4$ и такое i , $1 \leq i \leq 3$, что одно из отношений $\rho_i(b, x_3)$, $\rho_i(x_2, b)$ неполно. Значит, соответствующему двуместному отношению $\rho(x_1, b, x_3)$ или $\rho(x_1, x_2, b)$ удовлетворяет более четырех, но менее шестнадцати наборов. Это влечет за собой невхождение данного двуместного отношения в R .

Пусть все отношения $\rho_0, \dots, \rho_3$ неполны и одно из них, например ρ_0 , имеет вид $x_2 = b$. Как и выше, можно считать, что все отношения $\rho_1(b, x_3), \dots, \rho_3(b, x_3)$ непусты. Они не могут быть одновременно полными, так как в этом случае отношение $\rho(x_1, x_2, x_3)$ совпадает с отношением $x_2 = b$. Значит, отношению $\rho(x_1, b, x_3)$ удовлетворяют более четырех, но менее шестнадцати наборов.

Пусть отношения $\rho_0, \dots, \rho_3$ неполны, отличны от отношений вида $x_2 = b, x_3 = b$ и одно из них, например ρ_0 , имеет вид $x_2 + x_3 = b$. Если среди отношений $\rho_1, \dots, \rho_3$ есть хотя бы одно отношение вида $(x_2 = c) \& (x_3 = d)$, то отношению $(\exists x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет более четырех, но менее шестнадцати наборов.

Пусть $\rho_i(x_2, x_3) \equiv (x_2 + x_3 = b_i)$. Если $1 < |\{b_0, \dots, b_3\}| < 4$, то отношению $(\exists x_1)\rho(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет более четырех, но менее шестнадцати наборов. Случай $b_0 = \dots = b_3$ невозможен, поскольку тогда $\rho(x_1, x_2, x_3)$ совпадает с отношением $x_2 + x_3 = b_0$. Если же $\{b_0, \dots, b_3\} = E_4$, то отношению $\rho(x_1, x_2, x_1)$ удовлетворяют ровно четыре набора вида $(i, b_i + i)$. Так как $i + (b_i + i) = b_i$, отношение $\rho(x_1, x_2, x_1)$ не входит в R .

Пусть при любом $i, i \in E_4$, отношение $\rho_i(x_2, x_3)$ имеет вид $(x_2 = c_i) \& (x_3 = d_i)$. Так как $\rho \notin R$, множество $\{(c_0, d_0), \dots, (c_3, d_3)\}$ содержит не менее двух различных наборов. Если число их менее четырех, либо $1 < |\{c_0, \dots, c_3\}| < 4$, либо $1 < |\{d_0, \dots, d_3\}| < 4$, либо $\{c_0, \dots, c_3\} = \{d_0, \dots, d_3\} = E_4$ и суммы $c_0 + d_0, \dots, c_3 + d_3$ не все одинаковы, то отношение $(\exists x_1)\rho(x_1, x_2, x_3)$ не входит в R . Если $c_0 = \dots = c_3$ и $\{d_0, \dots, d_3\} = E_4$, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_2 = c_0) \& (\exists x_2)\rho(x_1, x_2, x_3)$$

и, следовательно, множеству R не принадлежит отношение $(\exists x_2)\rho(x_1, x_2, x_3)$. Если же $\{c_0, \dots, c_3\} = E_4$ и $c_0 + d_0 = \dots = c_3 + d_3 = b$, то

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists x_3)\rho(x_1, x_2, x_3) \& (x_2 + x_3 = b).$$

Так как $\rho \notin R$, из этой формулы следует, что множеству R не принадлежит отношение $(\exists x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)$.

Пусть теперь $n > 3$ и одно из отношений $\rho_0, \dots, \rho_3$, например ρ_0 , имеет вид $x_2 + \dots + x_n = a$. Рассмотрим сначала случай, когда в конъюнктивное представление отношения ρ_i , $1 \leq i \leq 3$, входит отношение вида (20), где $m < n - 1$. Пусть, например, это будет отношение ρ_1 и сомножитель $x_2 + \dots + x_m = b$, где $1 \leq m < n$. Положим

$$\sigma(x_1, \dots, x_m) \equiv (\exists x_{m+1}) \dots (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Тогда отношение $\sigma_0(x_2, \dots, x_m)$ полно, а отношение $\sigma_1(x_2, \dots, x_m)$ является непустым сужением отношения $x_2 + \dots + x_m = b$ (все отношения $\rho_1, \dots, \rho_3$, очевидно, можно считать непустыми). Если $m \geq 3$, то выберем значения $c_4, \dots, c_m$ так, чтобы отношение $\sigma_1(x_2, x_3, c_4, \dots, c_m)$ было непустым. Полагая

$$\tau(x_1, x_2, x_3) \equiv \sigma(x_1, x_2, x_3, c_4, \dots, c_m),$$

видим, что $\tau_0(x_2, x_3)$ — полное отношение, а $\tau_1(x_2, x_3)$ есть (непустое) сужение отношения $x_2 + x_3 + c_4 + \dots + c_m = b$. В частности, $\tau_1(x_2, x_3)$ неполно. Тогда, как в начале рассмотрения случая $n = 3$, устанавливаем, что одно из отношений вида $\tau(x_1, d, x_3), \tau(x_1, x_2, d)$ не входит в R .

При $m = 2$ в R не входит само отношение $\sigma(x_1, x_2)$, так как ему удовлетворяют более четырех, но менее шестнадцати наборов.

Предположим, наконец, что ни в одно из конъюнктивных представлений отношений $\rho_1, \dots, \rho_3$ не входят сомножители вида (20), где $m < n - 1$. Тогда можно считать, что при любом $i, i \in E_4$,

$$\rho_i(x_2, \dots, x_n) \equiv (x_2 + \dots + x_n = a_i).$$

Так как $\rho \notin R$, множество $\{a_0, \dots, a_3\}$ содержит по крайней мере два элемента. Далее образуем трехместное отношение $\rho(x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0)$ и повторяем для него соответствующие рассуждения, приведенные выше для случая $n = 3$. Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть R — набор основных отношений на E_k , $\{\lambda_k, \chi_k^i\} \subseteq R$ и $\chi_k^j \notin R$ при $j > i$. Тогда множество $[R]_S$ состоит из отношений, представимых в виде конъюнкции одноместных отношений из $[R]_S$, двуместных отношений из $[R]_S$ вида (2) и отношений из $[R]_S$ вида

$$(x_1 \in F_1) \& \dots \& (x_m \in F_m) \& \sigma(x_1, \dots, x_m), \quad (21)$$

где $|F_1| = \dots = |F_m| = i$, σ — произвольное отношение на E_k . При этом дополнительно, если все неодноместные отношения из R принадлежат множеству $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$, то $F_1 = \dots = F_m$; если $k = 4$, все неодноместные отношения из R содержатся в множестве $\{\lambda_4, \mu_4^2, \chi_4, \chi_4^1, \zeta_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\chi_4, \chi_4^1, \zeta_4\} \neq \emptyset$, то любые два множества из числа $F_1, \dots, F_m$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. Покажем, во-первых, что при выполнении условий леммы в множество $[R]_S$ будут входить лишь те отношения, которые представимы в указанном в лемме виде. Проведем индукцию по построению отношений в множестве $[R]_S$. Справедливость утверждения для отношений из R выполняется тривиально. Из порождающих операций внимание следует уделить лишь операции проектирования. Если операция проектирования применяется к конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений вида (2), то можно воспользоваться леммой 3. Рассмотрим далее отношение

$$(\exists x_m)(\rho_1(x_1, \dots, x_m) \& \rho_2(\tilde{x}_2, x_m) \& \dots \& \rho_s(\tilde{x}_s, x_m)), \quad (22)$$

где, например, отношение ρ_1 имеет вид (21), а $\rho_2, \dots, \rho_s$ — одноместные отношения, или двуместные отношения вида (2), или отношения вида (20). Пусть множества $F_1, \dots, F_m$ в отношении ρ_1 подчиняются только условию $|F_1| = \dots = |F_m| = i$. Если отношение ρ_j ($2 \leq j \leq s$) одноместно, $\rho_j(x_m) \equiv (x_m \in G_j)$, то, очевидно, можно предполагать, что $G_j \subseteq F_m$ и потому $|G_j| \leq i$. Если отношение ρ_j имеет вид (2), то совершенно аналогично можно считать, что $|E| \leq i$ и потому отношение ρ_j представимо в виде (21). Таким образом, отношение, стоящее в формуле (22) под квантором $\exists x_m$, имеет вид (21). Тогда и само отношение (22) будет иметь вид (21).

С небольшими изменениями эти рассуждения применимы и в других случаях. Так, если все неодноместные отношения из R содержатся в $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$, то все они имеют вид (21), где $|F_1| = \dots = |F_m|$. Поэтому можно предполагать, что этот вид имеют все отношения $\rho_2, \dots, \rho_s$. Пусть отношение ρ_j имеет вид (21) и переменная x_m в нем подчиняется условию $x_m \in F$. Случаи $F = F_m$ и $F \cap F_m = \emptyset$ тривиальны. Если же $F \neq F_m$ и $F \cap F_m \neq \emptyset$, то (поскольку $i = 2$) множество $F \cap F_m$ одноэлементно. Значит, применение операции $\exists x_m$ сводится к подстановке константы, что сохраняет вид отношений (21).

В случае, когда $k = 4$, все неодноместные отношения из R принадлежат множеству $\{\lambda_4, \mu_4^2, \chi_4, \chi_4^1, \zeta_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\chi_4, \chi_4^1, \zeta_4\} \neq \emptyset$. Дополнительно необходимо отметить следующее свойство. Если $\tau \in \{\chi_4, \chi_4^1, \zeta_4\}$, $E \subseteq E_4$, $|E| = 2$ и отношению $(x_1 \in E) \& \tau(x_1, x_2)$ удовлетворяют два набора, то это отношение можно представить в виде (2), где либо $\pi(E) = E$, либо $\pi(E) \cup E = E_4$.

Покажем теперь, что множество $[R]_S$ содержит все требуемые отношения вида (21). Как установлено в лемме 18 из [15], в $[\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_S$ входят все отношения вида (21), где $F_1 = \dots = F_m = E_i$. Соображения двойственности дают сразу более широкий класс, когда $F_1 = \dots = F_m$ и $|F_1| = i$.

Если $k = 4$, все неоднместные отношения из R входят в $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \chi_4^1, \zeta_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \chi_4^1, \zeta_4\} \neq \emptyset$, то из отношений множества $R \cap \{\kappa_4, \chi_4^1, \zeta_4\}$ и отношения $E_2(x)$ легко получаем отношение $\varphi(x_1, x_2)$ вида (2), где $E = \{2, 3\}$ и $\pi(E) = E_2$. Чтобы построить теперь отношения вида (21), где, например, $F_1 = \dots = F_l = E_2$ и $F_{l+1} = \dots = F_m = \{2, 3\}$, достаточно выбрать подходящее отношение $\rho_1(x_1, \dots, x_m)$ вида (21), удовлетворяющее условию $F_1 = \dots = F_m = E_2$, и образовать отношение

$$(\exists y_{l+1}) \dots (\exists y_m)(\varphi(x_{l+1}, y_{l+1}) \& \dots \& \varphi(x_m, y_m) \& \varphi(x_1, \dots, x_l, y_{l+1}, \dots, y_m)).$$

Остальные отношения этого типа можно получить переходом к двойственным отношениям.

Обратимся к общему случаю. Предположим сначала, что $\nu_k^2 \in [R]_S$. Так же, как в лемме 18 из [15], показываем, что множеству $[R]_S$ принадлежат все отношения вида (21). Выясним, в каких случаях отношение ν_k^2 принадлежит множеству $[R]_S$. Согласно лемме 18 из [15] при $i \geq 3$ имеем, в частности, что $\nu_k^2 \in [\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_S$. Множеству $[R]_S$, очевидно, принадлежит отношение $E_2(x)$. Поэтому если $m \geq 3$ и $\mu_k^m \in R$ или $\nu_k^m \in R$, то $\nu_k^2 \in [R]_S$, поскольку

$$\nu_k^2(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2\}) \& \mu_k^m(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2\}) \& \nu_k^m(x_1, x_2).$$

Если $m \geq 4$ и $\eta_k^m \in R$, то ν_k^2 будет двойственно отношению $(x_1 \in \{0, 3\}) \& \eta_k^m(x_1, x_2)$. Отношению ν_k^2 двойственно также отношение $(x_1 \in \{0, 3\}) \& \theta_k(x_1, x_2)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть ρ — произвольное отношение на E_k . Тогда множество $\{E_1(x), \rho\}$ S -эквивалентно некоторому набору основных отношений.

Доказательство. Можно, очевидно, предполагать, что $\rho \notin [\{E_1(x)\}]_S$. Покажем вначале, что достаточно ограничиться случаем, когда отношение $E_2(x)$ входит в $[\{E_1(x), \rho\}]_S$, которое (при $k = 4$) не содержит отношения $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. В самом деле, при $k \geq 5$ включение $E_2(x) \in [\{E_1(x), \rho\}]_S$ установлено в лемме 9. Пусть $k = 4$. Тогда в силу леммы 9 множество $[\{E_1(x), \rho\}]_S$ содержит одно из отношений $E_2(x)$, κ_4 . Если $\rho \in [\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$, то теорема доказана. Предположим, что $\kappa_4 \in [\{E_1(x), \rho\}]_S$ и $\rho \notin [\{E_1(x), \kappa_4\}]_S$. Тогда согласно лемме 10 множество $[\{E_1(x), \kappa_4, \rho\}]_S$ содержит одно из отношений $E_2(x)$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ или η_4^4 . В первом случае согласно построениям из леммы 10 отношение κ_4 входит в множество $[\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$. Поэтому либо $\rho \in [\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$, и теорема доказана, либо по лемме 10 множество $[\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \rho\}]_S$ содержит отношение η_4^4 . Очевидно, что $E_1(x) \in [\{\eta_4^4\}]_S$. Множество $[\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \eta_4^4\}]_S$ определяет класс квазилинейных [18] функций в P_4 , самодвойственных относительно всех четных подстановок. В [10] этот класс обозначен через $A_4^4 L_4$. Там же доказано, что в $A_4^4 L_4$ единственным предполным классом является класс $S_4^4 L_4$ квазилинейных функций, самодвойственных относительно всех подстановок на E_4 . По определению, этот класс задается множеством отношений $[\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \mu_4^4\}]_S$. Класс $S_4^4 L_4$ имеет только один собственный подкласс — класс всех селекторных функций [19, 8]. Таким образом, множество $[\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$ содержится только в трех S -замкнутых множествах отношений $[\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \eta_4^4\}]_S$, $[\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \mu_4^4\}]_S$ и P_4 . В связи с этим далее можно не рассматривать собственные расширения множества $[\{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S$. В частности, если

в $\{[E_1(x), \kappa_4, \rho]\}_S$ входит отношение $E_2(x)$ или η_4^4 , то будем предполагать, что в это множество не входит отношение $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Поэтому если $\rho \notin \{[E_1(x), \eta_4^4]\}_S$, то по лемме 10 получаем, что в $\{[E_1(x), \eta_4^4, \rho]\}_S$ входит отношение $E_2(x)$.

Обозначим через R множество всех основных отношений, входящих в $\{[E_1(x), \rho]\}_S$. По доказанному, можно предполагать, что $E_2(x) \in R$ и множество $\{[E_1(x), \rho]\}_S$ не содержит (при $k = 4$) отношения $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Дальнейшее доказательство будем вести индукцией по числу переменных у отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$. Случай $n = 1$ тривиален. Если $n = 2$, то в соответствии с теоремой из [15] множество $\{E_1(x), \rho\}$ S -эквивалентно набору основных отношений R .

Пусть $n \geq 3$. Для набора R существуют четыре возможности: все двуместные отношения из R имеют вид (2); набор R не содержит отношения λ_k ; набор R не содержит отношений χ_k^i ; набор R содержит отношение λ_k и некоторое отношение χ_k^i . В первых трех случаях, если $\rho \notin [R]_S$, то в множество $[R \cup \{\rho\}]_S$ в силу лемм 4, 6, 8 входит двуместное отношение, не принадлежащее множеству $[R]_S$. Получаем противоречие с определением набора R и теоремой из [15]. В связи с этим далее рассматриваем только четвертую возможность для набора R , причем параметр i выбираем максимально возможным. Предполагаем также, что $\rho \notin [R]_S$.

Согласно лемме 18 из [15] множество $\{[\lambda_k, \chi_k^i]\}_S$ содержит все отношения вида (21), где $F_1 = \dots = F_m$, $|F_1| = i$ и σ — произвольное отношение на E_k . Рассмотрим сначала случай, когда в $[R]_S$ входят все отношения (21), где $|F_1| = \dots = |F_m| = i$.

Для любого j , $1 \leq j \leq n$, полагаем

$$G_j = \{a : \rho(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \text{ не пусто}\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $|G_1| \leq \dots \leq |G_n|$. Так как $\rho \notin [R]_S$, то $|G_n| > i$. По аналогии с рассуждениями из лемм 4, 6, 8 будем предполагать, что $G_1 = E_t$, $t \geq 2$, и отношения $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ принадлежат множеству $[R]_S$.

Если для любого j из E_t отношению

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho_j(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (23)$$

удовлетворяет ровно один элемент, то в силу неравенства $|G_1| \leq |G_n|$ получаем, что $|G_1| = |G_n| = t$ и существует такая подстановка π на E_k , что $\pi(E_t) = G_n$ и

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 \in E_t) \& (\pi(x_1) = x_n) \& (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Так как, очевидно,

$$(x_1 \in E_t) \& (\pi(x_1) = x_n) \equiv (\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho(x_1, \dots, x_n),$$

то ввиду рассмотренного случая $n = 2$ отношение $(x_1 \in E_t) \& (\pi(x_1) = x_n)$ можно считать принадлежащим множеству $[R]_S$. Следовательно, этому множеству не принадлежит отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Далее предполагаем, что среди отношений (23) есть отношение, которому удовлетворяет более одного элемента.

Если среди отношений (23) имеются различные, то отношение

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho(x_1, \dots, x_n)$$

отлично от конъюнкции одноместных отношений, не имеет вида (2) и в силу неравенства $|G_n| > i$ и леммы 11 не принадлежит множеству $[R]_S$.

Допустим, что все отношения (23) совпадают и, следовательно, равны отношению $x_n \in G_n$. Так как $|G_n| > i$, в силу предположения $\{\rho_0, \dots, \rho_{t-1}\} \subset [R]_S$ и леммы 11 получаем, что каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ удовлетворяет одному из условий: либо оно представимо в виде конъюнкции отношения $x_n \in G_n$ и отношения от переменных $x_2, \dots, x_{n-1}$, либо в виде конъюнкции, содержащей сомножитель

$$(x_j \in G_j) \& (\pi_j(x_j) = x_n), \quad (24)$$

причем проекция отношения по всем переменным, отличным от x_j, x_n , совпадает с отношением (24).

Если каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ удовлетворяет первому условию, то, очевидно, для отношения ρ будем иметь представление

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_n \in G_n) \& (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Отсюда следует, что множеству $[R]_S$ не принадлежит $(n-1)$ -местное отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть отношение ρ_s есть конъюнкция отношения $x_n \in G_n$ и отношения от переменных $x_2, \dots, x_{n-1}$, а отношение ρ_p удовлетворяет второму из сформулированных условий с конъюнктивным сомножителем (24). Выберем в множестве G_j такой элемент a , что отношение

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{j-1}) (\exists x_{j+1}) \dots (\exists x_{n-1}) \rho_s(x_2, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (25)$$

совпадает с отношением $x_n \in G_n$. Тогда в силу неравенства $|G_n| > i$ и леммы 11 множеству $[R]_S$ не принадлежит двуместное отношение

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{j-1}) (\exists x_{j+1}) \dots (\exists x_{n-1}) \rho(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n). \quad (26)$$

Предположим, что для любого p из E_t найдется такое j , $2 \leq j \leq n-1$, что отношение ρ_p удовлетворяет второму условию с конъюнктивным сомножителем (24). Если все эти сомножители совпадают, то

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_j \in G_j) \& (\pi_{p_j}(x_j) = x_n) \& (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Так как отношение (24), очевидно, содержится в множестве $[\{\rho\}]_S$, то согласно рассмотренному случаю $n=2$ оно принадлежит множеству $[R]_S$. Следовательно, этому множеству не принадлежит $(n-1)$ -местное отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть среди отношений (24) имеются различные. Рассмотрим сначала случай, когда для некоторых отношений ρ_s, ρ_p ($s \neq p$) переменная x_j одна и та же. Выберем i -элементное подмножество G в множестве G_j так, чтобы выполнялось неравенство $\pi_{j_s}(G) \neq \pi_{j_p}(G)$, где подстановки π_{j_s}, π_{j_p} отвечают отношениям ρ_s, ρ_p . Тогда $|\pi_{j_s}(G) \cup \pi_{j_p}(G)| > i$. Следовательно, согласно лемме 11 множеству $[R]_S$ не принадлежит отношение

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) ((x_j \in G) \& \rho(x_1, \dots, x_n)).$$

Предположим, наконец, что отношения ρ_s, ρ_p удовлетворяют второму условию с конъюнктивными сомножителями от переменных x_j, x_n и x_l, x_n , где $j \neq l$. Будем предполагать также, что переменные x_j, x_n в отношении ρ_p не связаны отношением (24). Иными словами, пусть отношение

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{j-1}) (\exists x_{j+1}) \dots (\exists x_{n-1}) \rho_p(x_2, \dots, x_n) \quad (27)$$

не имеет вида (24). Так как проекция отношения (27) по переменной x_j дает отношение $x_n \in G_n$, отношение (27) как элемент из $[R]_S$ может быть лишь конъюнкцией отношений $x_j \in H_j$, $x_n \in G_n$, где $H_j \subseteq G_j$. Поэтому, как и выше, выбрав элемент a из H_j , получим, что отношение (26) не принадлежит множеству $[R]_S$.

Обратимся теперь к случаю, когда $k = 4$, все неоднόμεстные отношения из R содержатся в $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4\} \neq \emptyset$. При $|G_n| > 2$ справедливы приведенные выше рассуждения. Пусть $|G_n| = 2$. Если среди множеств $G_1, \dots, G_n$ имеется не более двух взаимнодополнительных (до E_4) множеств, то в силу леммы 11 получаем $\rho \in [R]_S$, что противоречит сделанному ранее предположению. Допустим, что среди множеств $G_1, \dots, G_n$ имеются различные пересекающиеся множества и, например, G_{n-1}, G_n — такие два множества. Будем предполагать также, что $G_1 = E_2$ и ρ_0, ρ_1 принадлежат множеству $[R]_S$.

Пусть отношение ρ_0 как отношение из $[R]_S$ содержит конъюнктивно сомножитель (24), где $|G_j \cap G_n| = 1$, причем проекция отношения ρ_0 по всем переменным, отличным от x_j, x_n , совпадает с отношением (24). Тогда из отношения (24) (и, следовательно, из отношения ρ) на основании леммы 6 из [15] можно получить отношение ν_4^2 . Это противоречит предположению о включении всех неоднόμεстных отношений из R в $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \chi_4^2\}$. Аналогичные рассуждения применимы для отношения ρ_1 .

Таким образом, на основании леммы 11 можно считать, что каждое из отношений ρ_0, ρ_1 представимо в виде конъюнкции отношений типа (21), причем переменные этих отношений (21) не пересекаются, а любые два множества из числа $F_1, \dots, F_m$ либо совпадают, либо взаимнодополнительны. Пусть для ρ_0 этими отношениями будут $\varphi_1(\tilde{x}), \varphi_2(\tilde{y}, x_{n-1}), \varphi_3(\tilde{z}, x_n)$, а для ρ_1 они равны $\psi_1(\tilde{u}), \psi_2(\tilde{v}, x_{n-1}), \psi_3(\tilde{w}, x_n)$ (для E_4 существует лишь три пары двухэлементных взаимнодополнительных множеств).

Если каждому из отношений

$$(\exists \tilde{z})\varphi_3(\tilde{z}, x_n), \quad (\exists \tilde{w})\psi_3(\tilde{w}, x_n) \quad (28)$$

удовлетворяет по одному элементу (которые, очевидно, различны), то отношение ρ представимо в виде

$$E_2(x_1) \& (\tau(x_1) = x_n) \& (\exists x_n)\rho(x_1, \dots, x_n),$$

где τ — подстановка на E_4 и $\tau(E_2) = G_n$. Как и выше, из этого представления легко следует, что множеству $[R]_S$ не принадлежит $(n-1)$ -местное отношение $(\exists x_n)\rho(x_1, \dots, x_n)$.

Далее предполагаем, что хотя бы одному из отношений (28) удовлетворяют ровно два элемента. Аналогичное предположение будем считать выполненным для отношений $(\exists \tilde{y})\varphi_2(\tilde{y}, x_{n-1})$ и $(\exists \tilde{v})\psi_2(\tilde{v}, x_{n-1})$.

Так как $|G_n \cap G_{n-1}| = 1$, пусть, например, $|G_n \cap G_2| = 1$. Если отношения $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ и $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$ совпадают, то для некоторого отношения ω

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \omega(\tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1}) \& \varphi_3(\tilde{z}, x_n).$$

Так как $\varphi_3 \in [R]_S$, отсюда следует, что множеству $[R]_S$ не принадлежит менее чем n -местное отношение $\omega(\tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1})$. Если же отношения $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ и $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$ различны, то пусть a — такой элемент, что оба значения $(\exists \tilde{y})\varphi_2(\tilde{y}, a)$, $(\exists \tilde{v})\psi_2(\tilde{v}, a)$ истинны (такой элемент существует в силу предположения об отношениях $(\exists \tilde{y})\varphi_2(\tilde{y}, x_{n-1})$ и

$(\exists \tilde{v})\psi_2(\tilde{v}, x_{n-1})$). Тогда в силу леммы 11 множеству $[R]_S$ не принадлежит отношение $\rho(x_1, \dots, x_{n-2}, a, x_n)$, поскольку $|G_n \cap E_2| = 1$ и в конъюнктивные представления отношений $\rho_0(x_2, \dots, x_{n-2}, a, x_n)$, $\rho_1(x_2, \dots, x_{n-2}, a, x_n)$ входят различные непустые сомножители $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$, $\psi_3(\tilde{v}, x_n)$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда все неоднотестные отношения из R входят в $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$. Теорема доказана.

В справедливости следующих шести утверждений можно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 12. Пусть R — набор основных отношений на E_k , включающий отношение $E_1(x)$ и не содержащий отношений λ_k , χ_k^i , $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Тогда набор R S -эквивалентен одному из следующих попарно не S -эквивалентных наборов:

$$\begin{aligned}
 &\{E_i(x)\}, \text{ где } 1 \leq i \leq k-1; \\
 &\{\mu_k^i\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k; \\
 &\{\nu_k^i\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k-1; \\
 &\{\eta_k^i\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k; \\
 &\{\theta_k\}; \\
 &\{\kappa_k\}, \text{ где } k \geq 5; \\
 &\{\zeta_k\}, \text{ где } k \text{ четно}; \\
 &\{\kappa_4^1\}; \\
 &\{E_i(x), \mu_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i < k \text{ или } i = k-1, j = k; \\
 &\{E_i(x), \nu_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i < k; \\
 &\{E_i(x), \eta_k^j\}, \text{ где } 3 \leq j < i < k \text{ или } i \in \{k-1, k-2\}, j = k; \\
 &\{E_i(x), \kappa_k\}, \text{ где } k = 4, 1 \leq i \leq 3 \text{ или } k > 4, 4 < i < k; \\
 &\{E_i(x), \zeta_k\}, \text{ где } k \text{ четно, } k/2 < i < k; \\
 &\{\nu_k^{k-1}, \eta_k^k\}; \\
 &\{\nu_4^2, \kappa_4\}; \\
 &\{\nu_4^3, \kappa_4\}; \\
 &\{\theta_4, \kappa_4\}; \\
 &\{\nu_4^2, \kappa_4^1\}; \\
 &\{E_3(x), \nu_4^2, \kappa_4\}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Обозначим через $N_1(k)$ число наборов, содержащихся в списке (29). Непосредственный подсчет показывает, что

$$N_1(k) = \begin{cases} 3k^2/2 - 7k/2 + 18, & \text{если } k = 4, \\ 3k^2/2 - 3k + 7, & \text{если } k \text{ четно, } k \geq 6. \end{cases}$$

Лемма 13. Пусть R — набор основных отношений на E_k , включающий отношение $E_1(x)$ и не содержащий отношений λ_k , $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Тогда набор R S -эквивалентен либо одному из наборов (29), либо одному из следующих попарно

не S -эквивалентных наборов:

$$\begin{aligned}
 & \{\chi_k^i\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k; \\
 & \{E_i(x), \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i < k \text{ или } 3 \leq i \leq k-1, j = k; \\
 & \{\mu_k^i, \chi_k^j\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k \text{ или } i = j = 2; \\
 & \{\nu_k^i, \chi_k^j\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k-1, 2 \leq j \leq k \text{ или } i = j = 2; \\
 & \{\eta_k^i, \chi_k^j\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq k; \\
 & \{\theta_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq k; \\
 & \{\varkappa_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq k; \\
 & \{\zeta_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k \text{ четно, } j = 2 \text{ при } k = 4 \text{ или } 2 \leq j \leq k \text{ при } k \geq 6; \\
 & \{\varkappa_4^1, \chi_4^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq 4; \\
 & \{E_i(x), \mu_k^j, \chi_k^m\}, \text{ где } \max(j, m) < i < k, 3 \leq j \leq k-2, 2 \leq m \leq k-2, \\
 & \quad \text{или } i = k-1, j = k, 2 \leq m \leq k, m \neq k-1, 3 \leq j < i < k, m = k, \\
 & \quad \text{или } 2 < i < k, j = m = 2; \\
 & \{E_i(x), \nu_k^j, \chi_k^m\}, \text{ где } \max(j, m) < i < k, 3 \leq j \leq k-2, 2 \leq m \leq k-2, \\
 & \quad \text{или } 3 \leq j < i < k, m = k, \text{ или } 2 < i < k, j = m = 2; \\
 & \{E_i(x), \eta_k^j, \chi_k^m\}, \text{ где } \max(j, m) < i < k, 3 \leq j \leq k-2, 2 \leq m \leq k-2, \\
 & \quad \text{или } i = k-1, j = k, 2 \leq m \leq k, m \neq k-1, \\
 & \quad \text{или } i = k-2, j = k \geq 5, 2 \leq m \leq k, m \notin \{k-2, k-1\}, \\
 & \quad \text{или } 3 \leq j < i < k, m = k; \\
 & \{E_i(x), \varkappa_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k = 4, i = 3, j \in \{2, 4\}, \\
 & \quad \text{или } k \geq 5, \max(4, j) < i < k, 2 \leq j \leq k-2, \text{ или } k \geq 5, 4 < i < k, j = k; \\
 & \{E_i(x), \zeta_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k \text{ четно и } k = 4, i = 3, j = 2, \\
 & \quad \text{или } k \geq 6, \max(k/2, j) < i < k, 2 \leq j \leq k-2, \\
 & \quad \text{или } k \geq 6, k/2 < i < k, j = k; \\
 & \{\nu_k^{k-1}, \eta_k^k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq k; \\
 & \{\nu_4^2, \varkappa_4, \chi_4^2\}; \\
 & \{\nu_4^3, \varkappa_4, \chi_4^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq 4; \\
 & \{\theta_4, \varkappa_4, \chi_4^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq 4; \\
 & \{\nu_4^2, \varkappa_4^1, \chi_4^2\}; \\
 & \{E_3(x), \nu_4^2, \varkappa_4, \chi_4^2\}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Пусть $N_2(k)$ — число наборов, содержащихся в списке (30). Непосредственный подсчет показывает, что

$$N_2(k) = \begin{cases} k^3 - 7k^2/2 + 23k/2 - 1, & \text{если } k = 4, \\ k^3 - 25k^2/8 + 45k/4 - 19, & \text{если } k \text{ четно, } k \geq 6. \end{cases}$$

Лемма 14. Пусть R — набор основных отношений на E_k , включающий отношение $E_1(x)$ и не содержащий отношений χ_k^i , $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Тогда набор

R S -эквивалентен одному из наборов (29) или одному из следующих попарно не S -эквивалентных наборов:

$$\begin{aligned}
 & \{\lambda_k\}; \\
 & \{E_i(x), \lambda_k\}, \text{ где } 2 < i < k; \\
 & \{\mu_k^i, \lambda_k\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k; \\
 & \{\nu_k^i, \lambda_k\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k-1; \\
 & \{\eta_k^i, \lambda_k\}, \text{ где } 3 \leq i \leq k; \\
 & \{\theta_k, \lambda_k\}; \\
 & \{\varkappa_k, \lambda_k\}; \\
 & \{\zeta_k, \lambda_k\}, \text{ где } k \text{ четно}; \\
 & \{\varkappa_4^1, \lambda_4\}; \\
 & \{E_i(x), \mu_k^j, \lambda_k\}, \text{ где } 3 \leq j < i < k, \text{ или } i = k-1, j = k; \\
 & \{E_i(x), \nu_k^j, \lambda_k\}, \text{ где } 2 \leq j < i < k; \\
 & \{E_i(x), \eta_k^j, \lambda_k\}, \text{ где } 3 \leq j < i < k, \\
 & \quad \text{или } i \in \{k-2, k-1\}, j = k \geq 5, \text{ или } i = 3, j = k = 4; \\
 & \{E_i(x), \varkappa_k, \lambda_k\}, \text{ где } i = 3, k = 4 \text{ или } k \geq 5, 4 < i < k; \\
 & \{E_i(x), \zeta_k, \lambda_k\}, \text{ где } k \text{ четно и } k/2 < i < k; \\
 & \{\nu_k^{k-1}, \eta_k^k, \lambda_k\}; \\
 & \{\nu_4^2, \varkappa_4, \lambda_4\}; \\
 & \{\nu_4^3, \varkappa_4, \lambda_4\}; \\
 & \{\theta_4, \varkappa_4, \lambda_4\}; \\
 & \{\nu_4^2, \varkappa_4^1, \lambda_4\}; \\
 & \{E_3(x), \nu_4^2, \varkappa_4, \lambda_4\}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Обозначим через $N_3(k)$ число наборов из списка (31). Непосредственный подсчет показывает, что

$$N_3(k) = \begin{cases} 3k^2/2 - 9k/2 + 17, & \text{если } k = 4, \\ 3k^2/2 - 4k + 8, & \text{если } k \text{ четно, } k \geq 6. \end{cases}$$

Лемма 15. Пусть R — набор основных отношений на E_k , содержащий отношение λ_k , отношение вида χ_k^i и не содержащий отношения $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Тогда набор R S -эквивалентен одному из следующих попарно не S -эквивалентных наборов:

$$\begin{aligned}
 & \{\lambda_k, \chi_k^i\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k; \\
 & \{E_i(x), \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i < k; \\
 & \{\mu_k^i, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i \leq k; \\
 & \{\nu_k^i, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } i = j = 2 \text{ или } 2 \leq j < i \leq k-1; \\
 & \{\eta_k^i, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j < i \leq k;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{\theta_k, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq k-2; \\
& \{\varkappa_k, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } 2 \leq j \leq 3; \\
& \{\zeta_k, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k \text{ четно и } k=4, j=2 \text{ или } k \geq 6, 2 \leq j < k/2; \\
& \{\varkappa_4^1, \lambda_4, \chi_4^2\}; \\
& \{E_i(x), \mu_k^j, \lambda_k, \chi_k^m\}, \text{ где } 2 \leq m < j < i < k \text{ или } i = k-1, j = k, 2 \leq m \leq k-2; \\
& \{E_i(x), \nu_k^j, \lambda_k, \chi_k^m\}, \text{ где } 2 < i < k, j = m = 2 \text{ или } 2 \leq m < j < i < k; \\
& \{E_i(x), \eta_k^j, \lambda_k, \chi_k^m\}, \text{ где } 2 \leq m < j < i < k \text{ или } i \in \{k-2, k-1\}, j = k, 2 \leq m < i; \\
& \{E_i(x), \varkappa_k, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k=4, i=3, j=2 \text{ или } k \geq 5, 4 < i < k, j \in \{2, 3\}; \\
& \{E_i(x), \zeta_k, \lambda_k, \chi_k^j\}, \text{ где } k \text{ четно и } k=4, i=3, j=2 \\
& \text{или } k \geq 6, 2 \leq j < k/2 < i < k; \\
& \{\nu_k^{k-1}, \eta_k^k, \lambda_k, \chi_k^i\}, \text{ где } 2 \leq i \leq k-2; \\
& \{\nu_4^i, \varkappa_4, \lambda_4, \chi_4^2\}, \text{ где } i \in \{2, 3\}; \\
& \{\theta_4, \varkappa_4, \lambda_4, \chi_4^2\}; \\
& \{\nu_4^2, \varkappa_4^1, \lambda_4, \chi_4^2\}; \\
& \{E_3(x), \nu_4^2, \varkappa_4, \lambda_4, \chi_4^2\}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Пусть $N_4(k)$ — число отношений из списка (31). Непосредственный подсчет показывает, что

$$N_4(k) = \begin{cases} k^3/2 - 5k^2/2 + 14k - 20, & \text{если } k=4, \\ k^3/2 - 9k^2/4 + 13k - 31, & \text{если } k \text{ четно, } k \geq 6. \end{cases}$$

Лемма 16. Пусть R — набор основных отношений на E_4 , содержащий отношения $E_1(x)$ и $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Тогда набор R либо S -эквивалентен набору всех основных отношений, либо одному из следующих попарно не S -эквивалентных наборов:

$$\begin{aligned}
& \{E_1(x), x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}, \\
& \{\eta_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}, \\
& \{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Лемма 17. Любые два набора отношений, принадлежащие различным спискам (29)–(33), не являются S -эквивалентными.

Из лемм 11–16 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть R — набор основных отношений на E_k , содержащий отношение $E_1(x)$. Тогда набор R S -эквивалентен одному из наборов, представленных в списках (29)–(33).

Если через $N(k)$ обозначить число попарно не S -эквивалентных наборов основных отношений на E_k , содержащих отношение $E_1(x)$, то из приведенных выше фор-

мул для величин $N_1(k), \dots, N_4(k)$ и леммы 16 следует, что

$$N(k) = \begin{cases} 3k^3/2 - 3k^2 + 35k/2 + 17, & \text{если } k = 4, \\ 3k^3/2 - 19k^2/8 + 69k/4 - 35, & \text{если } k \text{ четно, } k \geq 6. \end{cases}$$

Из теорем 1 и 2 получаем один из центральных результатов работы.

Теорема 3. *Произвольный S -замкнутый класс функций из I_k определяется S -замыканием одного из наборов основных отношений, содержащихся в списках (29)–(33).*

Все S -замкнутые классы квазилинейных функций в P_4 (всего имеется 25 таких классов) содержательным образом описаны в работах [7–10, 12, 13]. Три из них, которые лежат в классе I_k идемпотентных функций и отличны от класса селекторов, определяются S -замыканиями наборов из списка (33). Еще три, которые содержатся в классе K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна, можно определить S -замыканиями наборов:

$$\{\kappa_4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}, \quad \{\alpha, \kappa_4\}, \quad \{\varepsilon, \kappa_4\}, \quad (34)$$

где $\alpha(x, y, z)$ — такое отношение на E_4 , которому удовлетворяют все наборы вида (a, a, a) и $(\pi(0), \pi(1), \pi(2))$, где $a \in E_4$ и π — четная подстановка на E_4 , а

$$\varepsilon(x, y) \equiv ((x, y \in E_2) \vee (x, y \in \{2, 3\})).$$

Из оставшихся S -замкнутых классов квазилинейных функций выделим еще три, которые не лежат в классе SLP_4 Слупецкого (сюда относится и сам класс QL_4). Эти классы определяются S -замыканиями следующих наборов:

$$\{x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}, \quad \{\alpha\}, \quad \{\varepsilon\}. \quad (35)$$

Приведем итоговый результат работы.

Теорема 4. *Произвольный S -замкнутый класс функций из P_k , не лежащий в классе SLP_k , определяется S -замыканием одного из наборов отношений, представленных в списках (29)–(35), либо набором $\{\kappa_4\}$. Число различных S -замкнутых классов, не лежащих в классе Слупецкого, дается формулой*

$$3k^3/2 - 3k^2 + 35k/2 + 23,$$

если $k = 4$, и формулой

$$3k^3/2 - 19k^2/8 + 69k/2 - 35,$$

если k четно и $k \geq 6$.

Доказательство. В [12] установлено, что при $k \geq 5$ все S -предполные в P_k классы исчерпываются классами I_k и SLP_k , при $k = 4$ к ним добавляются классы K_4 , QL_4 . Из [13] следует, что $K_4 \cap I_4$, $K_4 \cap QL_4$ суть все S -предполные классы в K_4 . Таким образом, все S -замкнутые классы, отличные от P_4 , K_4 и не лежащие в классе SLP_k , содержатся в классах I_k и QL_4 . Остается воспользоваться теоремой 2, равенством $K_4 = [\{\kappa_4\}]_S$ и описанием S -замкнутых классов квазилинейных функций, данным с помощью наборов (33)–(35).

Список литературы

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.
2. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k -значной логики. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики I*. Наука, Москва, 1974, 9–66.
3. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
4. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* (1941) **5**.
5. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
6. Марченко С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы кибернетики* (1979) **36**, 5–22.
7. Марченко С. С. Об однородных алгебрах. *Докл. АН СССР* (1981) **256**, №4, 787–790.
8. Марченко С. С. Однородные алгебры. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 85–106.
9. Марченко С. С. О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, №3, 533–536.
10. Марченко С. С. Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Матем. вопросы кибернетики* (1989) **2**, 100–122.
11. Нгуен Ван Хоа, О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
12. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
13. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами. *Докл. АН Беларуси* (1994) **38**, №3, 16–19.
14. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I, II. *Кибернетика* (1969) **3**, 1–10; **5**, 1–9.
15. Марченко С. С. Основные отношения S -классификации функций многозначной логики. *Дискретная математика* (1996) **8**, №1, 99–128.
16. Марченко С. С. S -классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем. *Докл. РАН* (1996) **348**, №5, 587–589.
17. Марченко С. С. О замкнутых классах в k -значной логике, содержащих переключающую однородную функцию. *Дискретный анализ и исследование операций* (1995) **2**, №2, 49–61.
18. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozpr. ČSAV Řada Math. Přír. Věd. Praha* (1970) **80**, 3–93.
19. Csákvány B., Gavalcova T. Finite homogeneous algebras I. *Acta Sci. Math.* (1980) **42**, 57–65.

Статья поступила 23.03.1994.

Переработанный вариант поступил 23.09.1996.