Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Заиграев, А. В. Нагаев, А. Якубовский, Вероятности больших отклонений сумм решетчатых случайных векторов при тяжелых хвостах исходного распределения, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 3, 68–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:32:50

Вероятности больших отклонений сумм решетчатых случайных векторов при тяжелых хвостах исходного распределения

© 1997 г. А. Ю. Заиграев, А. В. Нагаев, А. Якубовский

Рассматривается проблема больших отклонений для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов. Предполагается, что исходное распределение обладает тяжелыми хвостами. Особое внимание уделяется роли, которую играет плотность носителя распределения на бесконечности. Доказываемые локальная и интегральная теоремы обобщают известные до сих пор результаты для распределений упомянутого типа.

Работа выполнена при поддержке Польского Комитета Научных Исследований, грант РВ 591/P03/95/08.

1. Введение

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, имеющие решетчатое распределение. Последнее означает, что ξ принимает значения из множества $\{x: x = Am + \lambda, m \in \mathbf{Z}^d\}$, где вектор $\lambda \in \mathbf{R}^d$ и невырожденная $d \times d$ матрица A фиксированы. Образует сумм

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дальнейшие рассуждения не потеряют в общности, если предположить, что $\lambda = 0$, а A — единичная матрица.

Пусть D — носитель исходного распределения, то есть

$$D = \{k \in \mathbf{Z}^d: p_k = \mathbf{P}(\xi = k) > 0\}.$$

Мы предполагаем, что шаг распределения равен 1, то есть D не содержится ни в одном классе смежности относительно любой подгруппы $\mathbf{Z}^d$. Аналитически это предположение записывается в следующем виде

$$\{t \in \mathbf{R}^d: |\mathbf{E}e^{2\pi i \langle t, \xi \rangle}| = 1\} = \{t \in \mathbf{R}^d: \mathbf{E}e^{2\pi i \langle t, \xi \rangle} = 1\} = \mathbf{Z}^d. \quad (1)$$

Утверждения относительно асимптотических свойств вероятности $\mathbf{P}(S_n = k)$ при $n \rightarrow \infty$ принято называть локальными предельными теоремами. Классическая локальная предельная теорема формулируется следующим образом (см., например, [10]).

Предложение 1. Если выполнено условие (1), $\mathbf{E}\xi = a$, а $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \left| n^{d/2} \mathbf{P}(S_n = k) - \varphi_B \left(n^{-1/2}(k - na) \right) \right| = o(1),$$

где B обозначает ковариационную матрицу ξ , а φ_B — плотность нормального распределения в $\mathbf{R}^d$ с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей B .

Из предложения 1, в частности, следует, что при $|k - na| = O(n^{1/2})$

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim n^{-d/2} \varphi_B \left(n^{-1/2}(k - na) \right). \quad (2)$$

Если же $n^{-1/2}|k - na| \rightarrow \infty$, то предложение 1 позволяет утверждать только, что

$$\mathbf{P}(S_n = k) = o(n^{-d/2}). \quad (3)$$

Значения k , при которых выполняется (3), принято называть большими отклонениями суммы S_n в отличие от нормальных отклонений k , для которых выполняется (2).

Асимптотика вероятности больших отклонений для сумм решетчатых случайных величин довольно полно изучена в одномерном случае (см. [6, 7, 5, 2, 3]). Случай $d > 1$ изучен гораздо слабее. Здесь стоит упомянуть работы В. Рихтера [9], Л. А. Анориной [1]. Наиболее близкими к содержанию данной заметки являются результаты, полученные в работах А. В. Нагаева [4] и Л. А. Анориной [1].

В частности, в работе А. В. Нагаева [4] приведено следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть $d = 1$. Предположим, что

- (1) $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$;
- (2) существует k_0 такое, что $p_k > 0$ для всех $k \geq k_0$;
- (3) при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = k^{-\gamma} l(k), \quad (4)$$

где $\gamma > 3$, а функция l медленно меняется на бесконечности.

Тогда при $n \rightarrow \infty$, $k \geq n^{1/2} \ln n$,

$$\mathbf{P}(S_n = k) = np_k(1 + o(1)).$$

Следующее утверждение содержится в работе Л. А. Анориной [1].

Предложение 3. Пусть $d = 2$. Предположим, что

- (1) $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$;
- (2) существует r_0 такое, что $p_k > 0$ для всех $|k| \geq r_0$;
- (3) при $|k| \rightarrow \infty$

$$p_k = |k|^{-\gamma} (1 + w(|k|)), \quad \gamma > 4,$$

где $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$, $|k| \geq n^{1/2} \ln n$,

$$\mathbf{P}(S_n = k) = np_k(1 + o(1)).$$

Как сформулировать естественный аналог условия (4) в многомерном случае? Насколько по существу условия 2 в предложениях 2 и 3? Заметим, что в цитируемых работах условия 2 специально не оговариваются, но в доказательствах предложений 2 и 3 они подразумеваются.

Основная цель данной заметки ответить на эти вопросы. Попутно мы устанавливаем предельное распределение для условного распределения максимального, в определенном смысле, слагаемого при условии $S_n = k$, где k лежит в области больших отклонений. Заметим, что из локальной теоремы можно получить различные формы интегральных теорем, то есть теорем о поведении вероятности $\mathbf{P}(S_n \in B)$, где B лежит в области больших отклонений.

Работа состоит из четырех параграфов. Во втором сформулированы основные результаты. Третий параграф посвящен их доказательству. В последнем содержатся замечания по поводу опущенных доказательств и приведен пример, дополняющий проведенное исследование.

2. Основные результаты

Пусть по-прежнему $p_k = \mathbf{P}(\xi = k)$, а $p_n(k) = \mathbf{P}(S_n = k)$. Через e_x обозначим единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $x \in \mathbf{R}^d$, то есть $e_x = |x|^{-1}x$.

Можно предложить следующее обобщение условия (4).

Будем говорить, что распределение $\{p_k\}$ удовлетворяет условию $\mathcal{R}$, если

$$p_k = r(|k|)(h(e_k) + w(|k|)), \quad k \in D,$$

где $r(t)$ правильно меняется при $t \rightarrow \infty$ с показателем $-\gamma$, $\gamma > d$, неотрицательная функция $h(e) \not\equiv 0$ непрерывна на единичной сфере S^{d-1} , а $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В условии $\mathcal{R}$ не содержится ответа на второй из вопросов, поставленных во введении. Поэтому рассмотрим следующие возможности прореживания носителя на хвостах исходного распределения.

Будем говорить, что носитель D распределения $\{p_k\}$ наполнен на хвостах или просто наполнен, если при $|k| \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, $L = o(|k|)$

$$|\{l \in \mathbf{Z}^d: \|l\| < L, k - l \notin D\}| = o(L^d), \quad (5)$$

где $\|\cdot\|$ есть макс-норма, то есть $\|(x_1, \dots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$.

Нетрудно показать, что при выполнении условия $\mathcal{R}$ из соотношения (5) следует правильное изменение хвостов исходного распределения, как оно понимается в работе Рвачевой [8]. Более точно, из (5) следует, что при $t \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq t, e_\xi \in E) = r_1(t) \left(\int_E h(e) \lambda(de) + o(1) \right), \quad (6)$$

где $r_1(t)$ правильно меняется при $t \rightarrow \infty$ с показателем $d - \gamma$, E — борелевское подмножество S^{d-1} , а λ — равномерная мера на этой сфере. Про распределения со свойством (6) принято говорить, что они обладают тяжелыми хвостами.

Будем называть носитель редким на хвостах или просто редким, если при $|k| \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, $L = o(|k|)$

$$|\{l \in \mathbf{Z}^d: \|l\| < L, k - l \in D\}| = o(L^d). \quad (7)$$

Если распределение удовлетворяет условию $\mathcal{R}$ и имеет редкий носитель, то вместо (6) при $t \rightarrow \infty$ мы имеем

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq t) = o(r_1(t)).$$

Следовательно, подобное распределение может и не иметь тяжелых хвостов.

Промежуточный случай мы получаем, когда вместо (5) или (7) для некоторого фиксированного $c \in (0, 1)$

$$|\{l \in \mathbf{Z}^d: \|l\| < L, k - l \in D\}| \sim c(2L)^d. \quad (8)$$

Будем называть подобный носитель правильно прореженным на хвостах или просто правильно прореженным.

Если распределение удовлетворяет условию $\mathcal{R}$ и имеет правильно прореженный носитель, то вместо (6) мы получаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(|\xi| \geq t, e_\xi \in E) = cr_1(t) \left(\int_E h(e) \lambda(de) + o(1) \right), \quad (9)$$

где функция $r_1(t)$ та же, что и в (6). Очевидно, подобные распределения также обладают тяжелыми хвостами.

Пусть S обозначает носитель функции h , а $S_\varepsilon = \{e \in S^{d-1}: h(e) \geq \varepsilon\}$. Не оговаривая специально, мы предполагаем, что во всех приводимых ниже утверждениях выполнены условия предложения 1, а $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть исходное распределение удовлетворяет условию $\mathcal{R}$ с $\gamma > d + 2$. Тогда

(1) если носитель D наполнен, то для произвольно малого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$p_n(k) = nr(|k - na|)h(e_{k-na})(1 + o(1)) \quad (10)$$

равномерно по $e_{k-na} \in S_\varepsilon$ и

$$p_n(k) = o(nr(|k - na|)) \quad (11)$$

равномерно по $e_{k-na} \notin S$;

(2) если носитель D редкий, то выполнено (11).

Во всех соотношениях $o(\cdot)$ означает последовательность, стремящуюся к нулю равномерно по $|k - na| \geq n^{1/2} \ln n$.

На основе теоремы 1 можно сформулировать различные формы интегральной предельной теоремы. Приведем одну из возможных формулировок.

Пусть $A_\rho = \{k \in \mathbf{Z}^d: |k| < \rho(e_k)\}$, где $\rho: S^{d-1} \rightarrow \mathbf{R}$ — положительная непрерывная функция, отделенная от нуля, то есть $\inf_{e \in S^{d-1}} \rho(e) > 0$.

Следствие 1. Если исходное распределение удовлетворяет условию $\mathcal{R}$ с $\gamma > d + 2$, а носитель D наполнен, то

$$\mathbf{P}(S_n - na \notin tA_\rho) = n\mathbf{P}(\xi \notin tA_\rho)(1 + o(1)), \quad t \geq n^{1/2} \ln n.$$

Следующий результат показывает исключительную роль максимального слагаемого в образовании большого отклонения суммы (ср., например, с теоремой 2 в работе Л. А. Анориной [1]). Пусть

$$\nu = \nu_{nk} = \min\{i: \langle \xi_i, e_{k-na} \rangle = \max_{1 \leq j \leq n} \langle \xi_j, e_{k-na} \rangle\}.$$

Следствие 2. В условиях следствия 1 для любого множества непрерывности лебеговой меры A и произвольно малого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(n^{-1/2}(\xi_\nu - k + na) \in A \mid S_n = k) = \int_A \varphi_B(u) du (1 + o(1))$$

равномерно по k , $|k - na| \geq n^{1/2} \ln n$, $e_{k-na} \in E_\varepsilon$.

Представляет несомненный интерес следующее утверждение относительно распределений с правильно прореженными носителями.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если D правильно прорежен, то соотношение (11) для указанной области изменения k сохраняет силу, а вместо (10) справедливо соотношение

$$p_n(k) = \text{snr}(|k - na|)h(e_{k-na})(1 + o(1)).$$

Заметим, что утверждение теоремы 2 является новым и для случая $d = 1$. Теорема 2 имеет следствия, аналогичные следствиям 1 и 2 из теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1 и следствий

Всюду в этом параграфе мы полагаем, специально не оговаривая это каждый раз, что $n \rightarrow \infty$, и $|k - na| \geq n^{1/2} \ln n$, а функция $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, выражение равномерно по k следует понимать равномерно по k , $|k - na| \geq n^{1/2} \ln n$, $n \rightarrow \infty$.

Определим следующие события

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\langle \xi_j, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|, j = 1, \dots, n\}, \\ A_1 &= \{\langle \xi_j, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|, j = 1, \dots, n-1, \langle \xi_n, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|\}, \\ A_2 &= \bigcup_{i,j=1, i \neq j}^n \{\langle \xi_i, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|, \langle \xi_j, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|\}, \end{aligned}$$

где $k_n = k - na$, а $\delta \in (0, 1)$ фиксировано.

Очевидно, $p_n(k)$ представимо в виде

$$p_n(k) = p_{n0}(k) + np_{n1}(k) + p_{n2}(k), \quad (12)$$

где $p_{nj}(k) = \mathbf{P}(S_n = k, A_j)$, $j = 0, 1, 2$.

Введем независимые одинаково распределенные случайные векторы $\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots$ такие, что

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi} = l) = \mathbf{P}(\xi = l \mid \langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|).$$

Обозначим

$$\tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n.$$

Так как сумма векторов

$$a' = \sum_{l \in L'} l p_l, \quad a'' = \sum_{l \in L''} l p_l,$$

где

$$L' = \{l \in \mathbf{Z}^d : \langle l, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|\}, \\ L'' = \{l \in \mathbf{Z}^d : \langle l, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|\},$$

равна a , то

$$|\mathbf{E}\tilde{\xi} - a| = O\left(\sum_{l \in L''} |l| p_l\right) = O\left(|k_n|^{-1} \sum_{l: |l| \geq \delta |k_n|} |l|^2 p_l\right) = o(|k_n|^{-1}) = o(n^{-1/2}).$$

Очевидно также, что $\mathbf{E}|\tilde{\xi}|^2 \rightarrow \mathbf{E}|\xi|^2$. Следовательно, для суммы $\tilde{S}_n$ справедливо соотношение (2).

Отметим важные свойства распределений, удовлетворяющих условию $\mathcal{R}$. Пусть $|k| \rightarrow \infty$. Если $k - l \in D$, и $|l| = o(|k|)$, то равномерно по $e_k \in S_\varepsilon$

$$p_{k-l} = r(|k|)h(e_k)(1 + o(1)) \asymp r(|k|); \quad (13)$$

если же $k - l \in D$, и $|l| = O(|k|)$, то равномерно по $e_k \in S_\varepsilon$

$$p_{k-l} = O(r(|k|)). \quad (14)$$

При этом в обоих случаях равномерно по $e_k \notin S$

$$p_{k-l} = o(r(|k|)). \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда если носитель D наполнен, то для произвольно малого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$p_{n1}(k) = r(|k - na|)h(e_{k-na})(1 + o(1))$$

равномерно по $e_{k-na} \in S_\varepsilon$ и

$$p_{n1}(k) = o(r(|k - na|)) \quad (16)$$

равномерно по $e_{k-na} \notin S$; если же носитель D редкий, то выполнено (16) равномерно по k .

Доказательство. По определению

$$p_{n1}(k) = \mathbf{P}^{n-1}(\langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|) \sum_{l \in \mathbf{Z}^d: \langle l-na, e_{k_n} \rangle \leq (1-\delta)|k_n|} p_{k-l} \mathbf{P}(\tilde{S}_{n-1} = l). \quad (17)$$

Ввиду неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\langle \xi, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|) = O(\mathbf{P}(|\xi| \geq \delta |k_n|)) = o(n^{-1}), \quad (18)$$

откуда

$$\mathbf{P}^n(\langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|) = 1 + o(1). \quad (19)$$

Пусть $X > 0$ произвольно большое фиксированное число. Разобьем область суммирования в (17) на две части

$$\begin{aligned} J_1 &= \{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, \|l-na\| < n^{1/2}X\}, \\ J_2 &= \{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, \|l-na\| \geq n^{1/2}X, \langle l-na, e_{k_n} \rangle \leq (1-\delta)|k_n|\}, \end{aligned}$$

и обозначим

$$I_1 = \sum_{l \in J_1} p_{k-l} P(\tilde{S}_{n-1} = l), \quad I_2 = \sum_{l \in J_2} p_{k-l} P(\tilde{S}_{n-1} = l).$$

Для $e_{k_n} \in S_\varepsilon$ ввиду (13)

$$I_1 = r(|k_n|)h(e_{k_n})\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D)(1 + o(1)), \quad (20)$$

а для $e_{k_n} \notin S$ ввиду (15)

$$I_1 = o(r(|k_n|)) \quad (21)$$

равномерно по k . Остается исследовать асимптотику величины

$$\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D).$$

Рассмотрим сначала случай, когда носитель наполнен. Из предложения 1 следует, что

$$\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \sim \sum_{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, \|l-na\| < n^{1/2}X} \varphi_B\left(\frac{l-na}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{n^{d/2}}.$$

Разобьем куб $\|x\| < n^{1/2}X$ на кубики с ребром $\varepsilon n^{1/2}$. Без ограничения общности можно считать, что $X\varepsilon^{-1} \in \mathbf{Z}_+^1$. Пусть V_n — один из таких кубиков. Легко понять, что при условии (5)

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, l-na \in V_n} \varphi_B((l-na)/\sqrt{n}) \frac{1}{n^{d/2}} &= (\varphi_B(z/\sqrt{n}) + \theta w(\varepsilon^{-1})) \\ &\times \frac{|\{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, l-na \in V_n\}|}{n^{d/2}} \sim \varepsilon^d (\varphi_B(z/\sqrt{n}) + \theta w(\varepsilon^{-1})) \\ &= \varepsilon^d (\phi_B(u) + \theta w(\varepsilon^{-1})), \quad (22) \end{aligned}$$

где z — центр кубика V_n , u — центр кубика V , который соответствует V_n при разбиении куба $\|x\| < X$ на кубики с ребром ε , а $|\theta| < 1$.

Суммируя по всем таким кубикам, получаем интегральные суммы для функции φ_B . Поскольку ε произвольно, (22) означает, что

$$\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \sim \int_{\|u\| < X} \varphi_B(u) du = 1 + \theta w(X) \quad (23)$$

равномерно по k , где $|\theta| < 1$.

Если же носитель D редкий, то аналогичные рассуждения приводят к соотношению

$$\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) = o(1) \quad (24)$$

равномерно по k и X .

Что касается суммы I_2 , то для нее, ввиду (14) и (23), вне зависимости от свойств носителя D справедлива оценка

$$I_2 \leq \mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| \geq n^{1/2}X) \sup_{l \in J_2} p_{k-l} \leq w(X)r(|k_n|). \quad (25)$$

Поскольку X произвольно, то из (17), (19)–(21), (23)–(25) получаем утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$p_{n2}(k) = o(nr(|k - na|)) \quad (26)$$

равномерно по k .

Доказательство. В силу (14) и (15)

$$\begin{aligned} p_{n2}(k) &\leq n^2 \sum_{l \in \mathbf{Z}^d: \langle l, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|} \sum_{m \in \mathbf{Z}^d: \langle m, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|} p_l p_m \mathbf{P}(S_{n-2} = k - l - m) \\ &= O(n^2 r(|k_n|) \mathbf{P}(\langle \xi, e_{k_n} \rangle \geq \delta |k_n|)). \end{aligned}$$

Утверждение леммы следует теперь из (18). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$p_{n0}(k) = o(nr(|k - na|)) \quad (27)$$

равномерно по k .

Доказательство. По определению

$$p_{n0}(k) = \mathbf{P}^n(\langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|) \mathbf{P}(\tilde{S}_n = k).$$

Используя (19) и неравенство Маркова, получаем, что

$$p_{n0}(k) = O(\mathbf{P}(\langle \tilde{\xi}_1 - a, e_{k_n} \rangle + \dots + \langle \tilde{\xi}_n - a, e_{k_n} \rangle \geq |k_n|)) = O(e^{-s|k_n|} f^n(s)), \quad (28)$$

где $f(s) = \mathbf{E} \exp s \langle \tilde{\xi} - a, e_{k_n} \rangle$. Положим

$$s = -|k_n|^{-1} \ln(n^{1/2} r(|k_n|)). \quad (29)$$

При нашем выборе k_n справедливы соотношения $s \rightarrow 0$, $s = O(n^{-1/2})$ и $s|k_n| \rightarrow \infty$.

Покажем, что

$$f(s) = 1 + O(n^{-1}) \quad (30)$$

при условии, что $0 < \delta < (\gamma - d - 2)(\gamma - 1)^{-1}$. При выполнении (30) утверждение леммы следует из (28) и (29).

Обозначим $\eta = \langle \tilde{\xi} - a, e_{k_n} \rangle$. Для доказательства (30) представим $f(s) = \mathbf{E} e^{s\eta}$ в виде

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s) + f_3(s),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \mathbf{E}(e^{s\eta}, \eta \leq -\beta/s), \\ f_2(s) &= \mathbf{E}(e^{s\eta}, |\eta| < \beta/s), \\ f_3(s) &= \mathbf{E}(e^{s\eta}, \beta/s \leq \eta < \delta|k_n| - \langle a, e_{k_n} \rangle) \end{aligned}$$

и $\beta > 0$ фиксировано.

Ввиду неравенства Чебышева

$$f_1(s) = O(\mathbf{P}(\eta \leq -\beta/s)) = O(s^2). \quad (31)$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \mathbf{P}(|\eta| < \beta/s) + s \int_{|u| < \beta s^{-1}} u d\mathbf{P}(\eta < u) + O(s^2) \\ &= 1 + O(s^2) + s \int_{|u| < \beta s^{-1}} u d\mathbf{P}(\eta < u). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int u d\mathbf{P}(\eta < u) = \langle \mathbf{E} \tilde{\xi} - a, e_{k_n} \rangle = o(n^{-1/2}),$$

окончательно,

$$f_2(s) = 1 + O(s^2) + o(sn^{-1/2}). \quad (32)$$

Наконец,

$$f_3(s) = O(\mathbf{E}(e^{s \langle \xi, e_{k_n} \rangle}, \beta'/s < \langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta|k_n|)) \quad (33)$$

для $0 < \beta' < \beta$ и

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(e^{s \langle \xi, e_{k_n} \rangle}, \beta'/s < \langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta|k_n|) \\ &\leq \frac{e^{s\delta|k_n|}}{\delta^{\beta'} |k_n|^{\beta'}} \mathbf{E}(\langle \xi, e_{k_n} \rangle^{\beta'}, \beta'/s < \langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta|k_n|). \end{aligned} \quad (34)$$

Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle \xi, e_{k_n} \rangle^{\beta'}, \beta'/s < \langle \xi, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|) &= \sum_{l: \beta' s^{-1} < \langle l, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|} \langle l, e_{k_n} \rangle^{\beta'} p_l \\ &= O \left(\sum_{l: \beta' s^{-1} < \langle l, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|} |l|^{\beta' - \gamma + \varepsilon} \right) \\ &= O \left(\int_{\beta' s^{-1} < \langle u, e_{k_n} \rangle < \delta |k_n|} |u|^{\beta' - \gamma + \varepsilon} du \right) = O(s^{1-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (35)$$

если положить $\beta' = \gamma - d - 1 > 1$. Поскольку $0 < \delta < (\gamma - d - 2)(\gamma - 1)^{-1}$, из (33)–(35) следует, что

$$f_3(s) = O \left(\frac{e^{s\delta|k_n|} s^{1-\varepsilon}}{|k_n|^{\gamma-d-1}} \right) = O \left(\left(\frac{1}{n^{1/2} r(|k_n|)} \right)^\delta \frac{1}{|k_n|^{\gamma-d-1} n^{(1-\varepsilon)/2}} \right) = o(n^{-1}). \quad (36)$$

Вместе (31), (32) и (36) приводят к (30). Тем самым, лемма доказана.

Объединяя (12) и Леммы 1–3, получаем все утверждения теоремы. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть X — произвольно большое фиксированное положительное число. Разобьем область

$$\{l \in \mathbf{Z}^d: l - na \notin tA_\rho\}$$

на две части

$$\begin{aligned} J_1 &= \{l \in \mathbf{Z}^d: |l - na| < Xt, l - na \notin tA_\rho\}, \\ J_2 &= \{l \in \mathbf{Z}^d: |l - na| \geq Xt\}, \end{aligned}$$

и обозначим

$$I_1 = \sum_{l \in J_1} p_n(l), \quad I_2 = \sum_{l \in J_2} p_n(l).$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S_n - na \notin tA_\rho) = I_1 + I_2. \quad (37)$$

Для произвольно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ представим I_1 в виде суммы трех слагаемых

$$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13}, \quad (38)$$

где суммирование производится, соответственно, по областям

$$\{l \in J_1: h(e_{l-na}) \geq \varepsilon\}, \quad \{l \in J_1: h(e_{l-na}) = 0\}, \quad \{l \in J_1: 0 < h(e_{l-na}) < \varepsilon\}.$$

Пусть $r(t) = t^{-\gamma}l(t)$, где $l(t)$ медленно меняется на бесконечности. Ввиду (10)

$$\begin{aligned} I_{11} &\sim n \sum_{l \in J_1, e_{l-na} \in S_\varepsilon} r(|l - na|) h(e_{l-na}) \sim nl(t) \sum_{l \in J_1, e_{l-na} \in S_\varepsilon} g(l - na) \\ &= nr_1(t) \sum_{l \in J_1, e_{l-na} \in S_\varepsilon} g((l - na)/t) t^{-d} \sim nr_1(t) \int_{\rho(e_u) \leq |u| < X, e_u \in S_\varepsilon} g(u) du \\ &= nr_1(t) \left(\int_{|u| \geq \rho(e_u)} g(u) du + \theta_1 w(X) + \theta_2 w(\varepsilon^{-1}) \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где $g(y) = h(e_y)|y|^{-\gamma}$, $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| < 1$. Далее, в силу (11)

$$I_{12} = \sum_{l \in J_1, h(e_{l-na})=0} o(nr(|l - na|)) = o \left(n \sum_{l \in J_1, h(e_{l-na})=0} r(|l - na|) \right). \quad (40)$$

Если $r(t)$ монотонно убывает при всех достаточно больших t , то

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J_1, h(e_{l-na})=0} r(|l - na|) &= O \left(\int_{t\rho(e_u) \leq |u| < Xt} r(|u|) du \right) \\ &= O \left(r_1(t) \int_{\rho(e_u) \leq |u| < X} |u|^{-\gamma} du \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Покажем, что всегда существует медленно меняющаяся на бесконечности функция $\tilde{l}(t) \sim l(t)$ со свойством $\tilde{l}'(t) = o(t^{-1}\tilde{l}(t))$, что означает монотонное убывание $\tilde{r}(t) = t^{-\gamma}\tilde{l}(t)$. Действительно, функция

$$l_1(t) = \int_1^e \frac{l(tu)}{u} du \sim l(t)$$

непрерывна, а

$$\tilde{l}(t) = \int_1^e \frac{l_1(tu)}{u} du \sim l_1(t) \sim l(t)$$

дифференцируема и

$$\tilde{l}'(t) = t^{-1}(l_1(te) - l_1(t)) = o(t^{-1}l_1(t)) = o(t^{-1}\tilde{l}(t)).$$

Таким образом, не ограничивая общности, мы можем считать, что все рассматриваемые нами правильно меняющиеся на бесконечности функции монотонно убывают.

Если же $l \in J_1, 0 < h(e_{l-na}) < \varepsilon$, то равномерно по указанным значениям l справедливо соотношение

$$p_n(l) = O(\varepsilon nr(|l - na|)),$$

из которого согласно (41) получаем, что

$$\begin{aligned} I_{13} &= \sum_{l \in J_1, 0 < h(e_{l-na}) < \varepsilon} O(\varepsilon nr(|l - na|)) \\ &= O(\varepsilon n \sum_{l \in J_1, 0 < h(e_{l-na}) < \varepsilon} r(|l - na|)) = O(\varepsilon nr_1(t)). \end{aligned} \quad (42)$$

Объединяя (38)–(42), находим, что в силу произвольности выбора ε и X

$$I_1 = nr_1(t) \left(\int_{|u| \geq \rho(e_u)} g(u) du + o(1) \right). \quad (43)$$

Что же касается I_2 , то достаточно грубой оценки

$$I_2 = O \left(n \sum_{l \in J_2} r(|k - na|) \right),$$

что ввиду (41) дает оценку

$$I_2 = O(nr_1(t)w(X)). \quad (44)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\xi \notin tA_\rho) = \sum_{k \in D: |k| \geq t\rho(e_k)} r(|k|)(h(e_k) + w(|k|)) \sim \frac{l(t)}{t^{\gamma-d}} \sum_{k \in D, |k| \geq t\rho(e_k)} g(k/t)t^{-d}.$$

Условие (5) обеспечивает достаточное количество точек для образования интегральных сумм функции g (см. доказательство леммы 1). Таким образом,

$$\mathbf{P}(\xi \notin tA_\rho) \sim r_1(t) \int_{|u| \geq \rho(e_u)} g(u) du. \quad (45)$$

Утверждение следствия следует из (37), (43)–(45).

Доказательство следствия 2. Используя (10), (12), (26) и (27), находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(n^{-1/2}(\xi_\nu - k_n) \in A \mid S_n = k) \\ &= (p_n(k))^{-1} (\mathbf{P}(S_n = k, n^{-1/2}(\xi_\nu - k_n) \in A, A_0) \\ & \quad + n\mathbf{P}(S_n = k, n^{-1/2}(\xi_n - k_n) \in A, A_1) + \mathbf{P}(S_n = k, n^{-1/2}(\xi_\nu - k_n) \in A, A_2)) \\ & \sim (p_n(k))^{-1} n\mathbf{P}(S_n = k, n^{-1/2}(\xi_n - k_n) \in A, A_1) \\ & \sim (r(|k_n|)h(e_{k_n}))^{-1} \sum_{l \in \mathbf{Z}^d: k-l \in D, n^{-1/2}(na-l) \in A} p_{k-l} \mathbf{P}(\tilde{S}_{n-1} = l) \\ & \sim \mathbf{P}(n^{-1/2}(na - \tilde{S}_{n-1}) \in A, k - \tilde{S}_{n-1} \in D). \end{aligned}$$

Остается показать, что если носитель D наполнен, то

$$\mathbf{P}(n^{-1/2}(na - \tilde{S}_{n-1}) \in A, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \sim \int_A \varphi_B(u) du. \quad (46)$$

Заметим, что соотношение (46) по сути обобщает (23). Для его доказательства разобьем $\mathbf{R}^d$ на кубики V с ребром ε , где ε — произвольно малое фиксированное число. Положим

$$A_\varepsilon^- = \bigcup_{V \subset A} V, \quad A_\varepsilon^+ = \bigcup_{V \cap A \neq \emptyset} V.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n^{-1/2}(na - \tilde{S}_{n-1}) \in A_\varepsilon^-, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \\ \leq \mathbf{P}(n^{-1/2}(na - \tilde{S}_{n-1}) \in A, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \\ \leq \mathbf{P}(n^{-1/2}(na - \tilde{S}_{n-1}) \in A_\varepsilon^+, k - \tilde{S}_{n-1} \in D). \end{aligned}$$

Для каждого отдельного кубика V с центром u справедлива формула (22). Суммируя по всем таким кубикам, получаем в силу произвольности выбора ε соотношение (46) (ср. с (23)).

4. Заключительные замечания

Доказательство теоремы 2 практически повторяет доказательство теоремы 1. Как несложно заметить из доказательства теоремы 1, главный вклад в асимптотику вероятности события $\{S_n = k\}$ вносит та его часть, которая содержится в

$$\{\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D\}.$$

Действительно, ввиду (12), (17), (20), (25)–(27) при $|k_n| \geq n^{1/2} \ln n$, $e_{k_n} \in S_\varepsilon$, $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{p_n(k)}{nr(|k_n|)h(e_{k_n})} &= \frac{p_{n0}(k) + np_{n1}(k) + p_{n2}(k)}{nr(|k_n|)h(e_{k_n})} = \frac{p_{n1}(k)}{r(|k_n|)h(e_{k_n})} + o(1) \\ &= \mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) + o(1). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, ведущие к асимптотике вероятности $\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D)$, заметим, что для правильно прореженных носителей в отличие от (22) имеем

$$\frac{|\{l \in \mathbf{Z}^d : k - l \in D, l - na \in V_n\}|}{n^{d/2}} \sim c\varepsilon^d.$$

Отсюда вместо (23) получаем соотношение

$$\mathbf{P}(\|\tilde{S}_{n-1} - na\| < n^{1/2}X, k - \tilde{S}_{n-1} \in D) \sim c \int_{\|u\| < X} \varphi_B(u) du = c + \theta w(X)$$

равномерно по k , где $|\theta| < 1$, откуда следует первая часть утверждения теоремы 2. Вторая же часть есть следствие соотношений (21), (25)–(27), которые справедливы и в данном случае.

Те же самые замечания можно сделать и в отношении доказательства интегральной теоремы, а также теоремы, подчеркивающей особую роль максимального слагаемого в сумме (см. доказательства, соответственно, следствий 1 и 2).

Сделаем несколько замечаний о плотности носителя на бесконечности. Полученные результаты свидетельствуют о том, что если распределение имеет носитель одного из рассмотренных выше типов, то $p_n(k)$ имеет вполне определенную асимптотику, которая в случаях наполненных или правильно прореженных носителей такова, как если бы распределение было регулярным. В случае распределений с иными носителями, асимптотика вероятности большого отклонения уже не имеет

вполне определенного вида и зависит от выбора последовательности k_n , как можно понять из приведенного ниже примера.

Пусть для простоты $d = 1$ и $a = 0$. Предположим, что распределение таково, что при $k \rightarrow \infty$ и $k \in D \subset \mathbb{Z}$

$$p_k = r(|k|)(1 + o(1)),$$

где $r(t)$ правильно меняется при $t \rightarrow \infty$ с показателем $-\gamma$, $\gamma > 3$, а носитель D таков, что его часть, содержащаяся в $[1, \infty)$, имеет вид

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} [l^2 - l/2, l^2 + l/2] \cap \mathbb{N}.$$

Очевидно, такое распределение удовлетворяет условию $\mathcal{R}$, однако его носитель не является ни наполненным, ни редким, ни правильно прореженным. Действительно, для последовательности $k'_n = n^2$ и $L_n = n/2$ $|\{l \in \mathbb{Z}: |l| < L_n, k'_n - l \notin D\}| = 0$, а для $k''_n = n^2 + n$ и L_n $|\{l \in \mathbb{Z}: |l| < L_n, k''_n - l \in D\}| = 0$. Нетрудно показать, что в этом случае

$$0 = \liminf_{k \in K_n} \frac{p_n(k)}{nr(|k|)} < \limsup_{k \in K_n} \frac{p_n(k)}{nr(|k|)} = 1,$$

где $K_n = \{k: |k| \geq n^{1/2} \ln n, n \rightarrow \infty\}$, причем нижний предел достигается на последовательности k''_n , а верхний предел на k'_n . Более того, можно показать, что множество предельных точек отношения $p_n(k)/(nr(|k|))$ заполняет весь интервал $(0, 1)$, то есть говорить об определенной асимптотике $p_n(k)$ не приходится.

Список литературы

1. Анорина Л. А. Локальная теорема с учетом больших отклонений и ее применение. В кн.: *Случайные процессы и статистические выводы*, Фан, Ташкент, 1971, 3–10.
2. Нагаев А. В. Локальные предельные теоремы с учетом больших отклонений. В кн.: *Предельные теоремы и вероятностные процессы*. Фан, Ташкент, 1967, 71–88.
3. Нагаев А. В. Локальные предельные теоремы с учетом больших отклонений, когда не выполнено условие Крамера. *Литов. матем. сб.* (1968) 8, №3, 553–579.
4. Нагаев А. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. *Диссерт. докт. физ.-матем. наук*. Ташкент, 1970.
5. Нагаев С. В. (1962). Локальные предельные теоремы для больших отклонений. *Вестник Ленинград. ун-та.* (1962), №1, 80–88.
6. Петров В. В. О больших отклонениях сумм случайных величин. *Вестник Ленинград. ун-та.* (1961), №1, 25–37.
7. Петров В. В. Предельные теоремы для больших отклонений при нарушении условия Крамера. *Вестник Ленинград. ун-та.* (1963), №19, 49–68.
8. Рвачева Е. Л. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. *Уч. зап. Львов. гос. ун-та.* (1954), 29, №6, 5–44.
9. Рихтер В. Многомерные локальные теоремы для больших отклонений. *Теория вероятн. и применения.* (1958) 3, №1, 107–114.
10. Спидер Ф. Принципы случайного блуждания. Мир, Москва, 1969.

Статья поступила 20.12.1996.