Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, Об областях, полностью определяющих булевы функции, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 21–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:10:40

Об областях, полностью определяющих булевы функции

© 1997 г. А. В. Чашкин

Показано, что произвольная булева функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, сложность которой удовлетворяет неравенству $L(f) \leq 2^{n-5}/n$, полностью определяется своими значениями на некоторых четырех областях $D_1, D_2, D_3, D_4 \subseteq \{0, 1\}^n$.

Сложностью $L(f)$ булевой функции f назовем сложность минимальной схемы, реализующей эту функцию в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$. Функцию $g: D \rightarrow \{0, 1\}$ назовем сужением функции f , если $g(x) = f(x)$ при любом $x \in D$. Сужение функции f на область D будем обозначать через f_D , то есть $f_D = g$. Пусть $M(L, n)$ — множество неизоморфных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, имеющих n входов, один выход и сложность, не превосходящую L . Положим $|M(L, n)| = N(L, n)$. Схемы из $M(L, n)$ занумеруем произвольным образом числами от 1 до $N(L, n)$. Минимальную схему S , реализующую некоторую булеву функцию h , назовем первой минимальной схемой функции h , если среди всех минимальных схем, реализующих h , схема S имеет минимальный номер. Пусть S — первая минимальная схема введенной выше функции g . Очевидно, что схема S реализует некоторую полностью определенную булеву функцию. Такую функцию назовем продолжением функции g и обозначим через $\hat{g}$. Легко видеть, что любая частичная булева функция обладает только одним продолжением.

Теорема. Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ и $L(f) \leq 2^{n-5}/n$. Тогда существуют такие четыре области $D_1, D_2, D_3, D_4 \subseteq \{0, 1\}^n$, что

- (i) $|D_i| \leq (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$;
- (ii) значения функции f на произвольном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ определяются ее значениями на областях D_1, D_2, D_3 и D_4 .

Доказательство теоремы основано на доказываемой ниже лемме 2. В доказательстве леммы 2 используется лемма 1 (см. лемму 6 в [1]).

Лемма 1. Пусть a, c и d — положительные целые числа и b — положительное число. Пусть $\lfloor (2ab)^{1/2} \rfloor \leq d \leq a/2$ и $a > 2b > 5$. Тогда максимальное c , удовлетворяющее неравенству

$$\binom{a}{d} / \binom{a-c}{d} \leq e^b,$$

не превосходит d .

Лемма 2. Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $L(f) \leq 2^{n-5}/n$, $H \subseteq \{0, 1\}^n$ и

$$|H| \leq (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}.$$

Тогда существуют область $D \subseteq \{0, 1\}$ и частичная функция $g: D \cup H \rightarrow \{0, 1\}$ такие, что

$$(1) |D| = \lfloor (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2} \rfloor;$$

(2) функция $\hat{g}$ совпадает с f не менее, чем на $2^n - (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}$ наборах из $\{0, 1\}^n$.

Доказательство. Доказательство леммы во многом аналогично доказательству леммы 1 из [1]. Введем натуральный параметр d , полагая

$$d = \lfloor (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2} \rfloor.$$

Рассмотрим множество областей

$$M_d = \{V_i \mid V_i \subseteq \{0, 1\}^n, H \subseteq V_i, |V_i| = |H| + d\},$$

и сужения f_{V_i} функции f на области этого множества. Очевидно, что $L(f_{V_i}) \leq L(f)$. Сравнивая число различных схем сложности не более, чем $L(f)$, то есть величину $N(L(f), n)$ с числом областей, принадлежащих множеству M_d , заключаем, что существует схема S , реализующая одновременно не менее

$$\binom{2^n - |M|}{d} / N(L(f), n) \quad (1)$$

различных функций f_{V_i} и являющаяся для этих функций первой минимальной схемой. Пусть области V_i , на которых S является первой минимальной схемой для функций f_{V_i} , образуют область V . Оценим величину этой области. Для этого воспользуемся леммой 1. Из (1) следует, что величина $|V|$ должна удовлетворять неравенству

$$\binom{2^n - |M|}{d} / \binom{|V|}{d} \leq N(L(f), n). \quad (2)$$

Из леммы D.3 из [2] легко следует, что при $L > n$

$$N(L, n) \leq (cL)^L,$$

где c — некоторая постоянная. Так как $L(f) \leq 2^{n-5}/n$, легко видеть, что, начиная с некоторого n ,

$$\log_2 N(L(f), n) \leq 2^{n-5}.$$

Следовательно, полагая $a = 2^n - |H|$ и $b = \log_2 N(L(f), n)$, видим, что

$$\lfloor (2ab)^{1/2} \rfloor \leq d = \lfloor (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2} \rfloor \leq (2^{n+1+n-5})^{1/2} = 2^{n-2}.$$

С другой стороны,

$$a/2 \geq \frac{1}{2}(2^n - ((2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}) \geq \frac{3}{8}2^n > 2^{n-2};$$

поэтому можно воспользоваться леммой 1. Из (2) и леммы 1 следует, что

$$|V| \geq 2^n - ((2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}).$$

Таким образом, если область V содержит область V_i , то область $V_i \setminus H$ может быть взята в качестве области D , а функция f_{V_i} может быть взята в качестве g . Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Положим $H = \emptyset$ и применим лемму 2 к функции f . Пусть D_1 — область, существование которой гарантирует лемма 2. Очевидно, что

$$|D_1| = \lfloor (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2} \rfloor, \quad (3)$$

и функция $\hat{f}_{D_1}$ совпадает с f не менее, чем на $2^n - (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}$ наборах из $\{0, 1\}^n$. Положим

$$D_2 = \{x \mid \hat{f}_{D_1}(x) \neq f(x)\}.$$

Тогда

$$|D_2| \leq (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}. \quad (4)$$

Положим $H = D_2$ и вновь воспользуемся леммой 2. В этом случае существует такая область D_3 , что

$$|D_3| = \lfloor (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2} \rfloor, \quad (5)$$

и функция $\hat{f}_{D_2 \cup D_3}$ совпадает с f на не менее, чем на $2^n - (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}$ наборах из $\{0, 1\}^n$. Положим

$$D_4 = \{x \mid \hat{f}_{D_2 \cup D_3}(x) \neq f(x)\}.$$

Тогда

$$|D_4| \leq (2^{n+1} \log_2(N(L(f), n)))^{1/2}. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию $\hat{f}_{D_2 \cup D_4}$. Из определения функций $\hat{f}_{D_1}$, $\hat{f}_{D_2 \cup D_3}$ и $\hat{f}_{D_2 \cup D_4}$ следует, что

$$f = \hat{f}_{D_1} \hat{f}_{D_2 \cup D_3} \vee \hat{f}_{D_1} \hat{f}_{D_2 \cup D_4} \vee \hat{f}_{D_2 \cup D_3} \hat{f}_{D_2 \cup D_4}.$$

Таким образом, значение функции f на произвольном наборе $x \in \{0, 1\}^n$ определяется через значения функций $\hat{f}_{D_1}$, $\hat{f}_{D_2 \cup D_3}$, $\hat{f}_{D_2 \cup D_4}$ на этом наборе. В свою очередь, значения указанных функций на любом наборе из $\{0, 1\}^n$ однозначно определяется значениями функции f на областях D_1 , D_2 , D_3 , D_4 . Второе утверждение теоремы доказано. Первое утверждение следует из (3)–(6).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Чашкин А. В. О сложности сужений булевых функций. *Дискретная математика* (1996) 8, №2, 133–150.
2. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Проблемы кибернетики* (1965) 14, 31–110.