Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чеплюкова, Предельные распределения числа вершин в слоях случайного леса, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 150–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:17:50

Предельные распределения числа вершин в слоях случайного леса

© 1997 г. И. А. Чеплюкова

Рассматриваются случайные леса, состоящие из N корневых и n некорневых вершин с достаточно общими ограничениями на классы деревьев. Получен ряд предельных теорем для числа вершин в слоях такого случайного леса.

В книге [1] изучается множество лесов, состоящих из N корневых деревьев с n некорневыми вершинами. Это исследование основано на установленной связи между случайными лесами и ветвящимися процессами Гальтона–Ватсона, начинающимися с N частиц, при достаточно общих ограничениях как на распределение числа потомков одной частицы, так и на класс вероятностных мер, индуцируемых на множестве лесов соответствующими им ветвящимися процессами. В данной статье получен ряд теорем, описывающих предельное поведение числа вершин в слоях такого леса. Мы будем придерживаться обозначений и терминологии книги [1].

Пусть $\mathcal{F}_{N,n}$ — множество лесов с N корневыми (корни занумерованы) и n некорневыми вершинами, помеченными некоторым способом. В [1] показано, что такому множеству можно поставить в соответствие множество траекторий начинающегося с N частиц ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона G при условии, что $\nu_N = N + n$, где ν_N — общее число частиц, существовавших в процессе G до его вырождения. Каждой конкретной траектории $G_{N,n}$ процесса G соответствует целый класс лесов $\Delta(G_{N,n})$, отличающихся друг от друга только перенумерацией вершин. Если производящая функция распределения числа прямых потомков каждой частицы процесса G имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad (1)$$

то этот процесс естественным образом индуцирует распределение вероятностей на множестве классов вида $\Delta(G_{N,n})$, при этом если $f \in \mathcal{F}_{N,n}$, то

$$\mathbf{P}\{f \in \Delta(G_{N,n}) \mid \nu_N = N + n\} = \frac{p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}},$$

где m_r — число частиц процесса G , имевших ровно r прямых потомков, $r = 0, 1, \dots, n$, $m_0 + m_1 + \dots + m_n = N + n$; $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$. Ниже, как и в [1], рассматриваются такие множества лесов $\mathcal{F}_{N,n}$, для которых выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu_N = N + n\} = \frac{|\Delta(G_{N,n})|}{|\mathcal{F}_{N,n}|},$$

где $|\Delta(G_{N,n})|$ и $|\mathcal{F}_{N,n}|$ — мощности множеств $\Delta(G_{N,n})$ и $\mathcal{F}_{N,n}$ соответственно. Обозначим $\mu(t, N, n)$ случайную величину, равную числу вершин в слое t леса из $\mathcal{F}_{N,n}$. Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Будем считать, что распределение (2) имеет максимальный шаг d , производящую функцию (1), а множество значений ξ_1 , имеющих ненулевую вероятность, содержит нуль и не совпадает с $\{0, 1\}$. Пусть $\mathbf{M}\xi_1 = 1$, $\mathbf{D}\xi_1 = B$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. При $n, t \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $N/t \rightarrow 0$, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$, для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{2\mu(t, N, n)}{Bt} \leq x\right\} \rightarrow 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

Теорема 2. При $N, n, t \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $2N/(Bt) \rightarrow \alpha$, где α — положительная постоянная, для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{2\mu(t, N, n)}{Bt} \leq x\right\} \rightarrow e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} K_{2k+4}(2x),$$

где $K_{2k+4}(2x)$ — значение функции распределения χ^2 с $2k+4$ степенями свободы в точке $2x$.

Теорема 3. Если $N, n \rightarrow \infty$, так, что $N/\sqrt{n} \leq \gamma < \infty$, $N/t \rightarrow \infty$ и $\mathbf{M}\xi_1^3 < \infty$, то для любого фиксированного x

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu(t, N, n)}{\sqrt{NBt}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Теорема 4. Пусть $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, где β — положительная постоянная, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $\mathbf{M}\xi_1^3 < \infty$. Тогда для любых фиксированных $x_2 > x_1 > 0$

$$\mathbf{P}\left\{x_1 \leq \frac{2\mu(t, N, n)}{Bt} \leq x_2\right\} \rightarrow F(x_1, x_2),$$

где

$$F(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \frac{x}{(1-y)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}\right\} dG_\beta(x, y) \quad (3)$$

и функция распределения $G_\beta(x, y)$ имеет характеристическую функцию

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\operatorname{sh} u}{u} - i\theta_1 \left(\frac{2 \operatorname{sh}(u/2)}{u}\right)^2\right)^{-1}, \quad u = \beta\sqrt{-2i\theta_2}. \quad (4)$$

Теорема 5. Если $N, n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, $N/\sqrt{n} \rightarrow \gamma$, где β и γ — положительные постоянные, $M\xi_1^3 < \infty$, то для любых фиксированных $x_2 > x_1 > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{2\mu(t, N, n)}{Bt} \leq x_2 \right\} \rightarrow F_\gamma(x_1, x_2),$$

где

$$F_\gamma(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \frac{\beta x \sqrt{B} \exp \{ -x^2 \beta^2 / (8(1-y)) \} (1 - e^{-\gamma \sqrt{B}/\beta})}{2\gamma(1-y)^{3/2}} dG_{\beta, \gamma}(x, y) \quad (5)$$

и функция распределения $G_{\beta, \gamma}(x, y)$ имеет характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\theta_1, \theta_2) &= (1 - \exp\{-2\gamma/(\beta\sqrt{B})\})^{-1} \\ &\quad \times (\exp\{-\gamma\sqrt{-2i\theta_2/B} - 2\gamma f(\theta_1, \theta_2)/(\beta\sqrt{B})\} \\ &\quad - \exp\{-\gamma\sqrt{-2i\theta_2/B} - 2\gamma f(\theta_2)/(\beta\sqrt{B})\}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$f(\theta_2) = ue^{-u}(1 - e^{-u})^{-1}, \quad u = \beta\sqrt{-2i\theta_2}, \quad (7)$$

$$f(\theta_1, \theta_2) = e^{-u}((-i\theta_1 - u/2)^{-1} + (1 - e^{-u})/u)^{-1}. \quad (8)$$

Для ветвящегося процесса G обозначим $\mu_N(t)$ число частиц t -го поколения, $\mu_N^{(r)}(t)$ — число частиц t -го поколения, имеющих ровно r потомков, $\nu_N(t) = \mu_N(0) + \mu_N(1) + \dots + \mu_N(t-1)$. Рассматриваемый процесс распадается на N независимых процессов, каждый из которых начинается с одной частицы. Тогда $\mu_N(t) = \mu^{(1)}(t) + \mu^{(2)}(t) + \dots + \mu^{(N)}(t)$, $\nu_N = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \dots + \nu^{(N)}$, $\nu_N(t) = \nu^{(1)}(t) + \dots + \nu^{(N)}(t)$, где $\mu^{(i)}(t)$ и $\nu^{(i)}$ означают соответственно число частиц t -го поколения и общее число частиц за все время существования процесса, начинающегося с i -й частицы, $i = 1, \dots, N$, $\nu^{(i)}(t) = \mu^{(i)}(0) + \dots + \mu^{(i)}(t-1)$.

Через $\mu_r(t, N, n)$ обозначим число вершин леса, имеющих высоту t и кратность r , $r = 0, 1, \dots, n$, а через $M = \|m_r^{(t)}\|$, $r, t = 0, 1, \dots, n$, — матрицу, составленную из целых неотрицательных чисел. В [1] показано, что распределения случайных величин $\mu_r(t, N, n)$ и $\mu_N^{(r)}(t)$ связаны следующим образом.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\|\mu_r(t, N, n)\| = M\} = \mathbf{P}\{\|\mu_N^{(r)}(t)\| = M \mid \nu_N = N + n\}.$$

Поскольку случайные величины $\mu(t, N, n)$ и $\mu_N(t)$ одинаково выражаются соответственно через $\mu_r(t, N, n)$ и $\mu_N^{(r)}(t)$, из леммы 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 2. При любых x и t справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu(t, N, n) \leq x\} = \mathbf{P}\{\mu_N(t) \leq x \mid \nu_N = N + n\}.$$

Леммы 1 и 2 сводят доказательство теорем 1–5 к получению соответствующих результатов для условных ветвящихся процессов. Ниже будут получены вспомогательные результаты о таких процессах, с помощью которых будут доказаны теоремы 1–5.

Рассмотрим предельное поведение $\mu_N(t)$ при условии $\mu_N(t) > 0$. По аналогии с леммами 4.5.2–4.5.5 книги [1] нетрудно получить следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть $t \rightarrow \infty$, $N/t \rightarrow 0$. Тогда для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{2\mu_N(t)}{tB} \leq x \mid \mu_N(t) > 0 \right\} \rightarrow 1 - e^{-x}.$$

Лемма 4. При $N, t \rightarrow \infty$, $2N/(Bt) \rightarrow \alpha$, где α — положительная постоянная, для любого фиксированного $x > 0$ условное распределение $2\mu_N(t)/(Bt)$ при условии $\mu_N(t) > 0$ слабо сходится к распределению с плотностью

$$\alpha \frac{e^{-(\alpha+x)}}{1 - e^{-\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Лемма 5. Если $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, где β — положительная постоянная, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, то совместное распределение $(2\mu_N(t)/(Bt), \nu_N(t)/n)$ при условии, что $\mu_N(t) > 0$, слабо сходится к распределению с характеристической функцией (4).

Лемма 6. Если $N, n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, $N/\sqrt{n} \rightarrow \gamma$, где β и γ — положительные постоянные, то совместное распределение $(2\mu_N(t)/(Bt), \nu_N(t)/n)$ при условии, что $\mu_N(t) > 0$, слабо сходится к распределению с характеристической функцией (6).

Рассмотрим предельное поведение $\mu_N(t)$ при условии $\nu_N = N + n$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 7. При $n, t \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $N/t \rightarrow 0$, $t/\sqrt{n} \rightarrow 0$, для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x \mid \nu_N = N + n \right\} \rightarrow 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству теоремы 2.3.3 книги [2], при этом используется утверждение леммы 3 и равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) > 0\} = 2N/(Bt)(1 + o(1)). \quad (9)$$

Лемма 8. При $N, n, t \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $2N/(Bt) \rightarrow \alpha$, где α — положительная постоянная, для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x \mid \nu_N = N + n \right\} \rightarrow e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} K_{2k+4}(2x),$$

где $K_{2k+4}(2x)$ — значение функции распределения χ^2 с $2k + 4$ степенями свободы в точке $2x$.

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству теоремы 2.3.3 книги [2], при этом используется утверждение леммы 4 и равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) > 0\} = (1 - \exp\{-2N/(Bt)\})(1 + o(1)).$$

Лемма 9. Если $N, n \rightarrow \infty$, $N/\sqrt{n} \leq \gamma < \infty$, $N/t \rightarrow \infty$ и $M\xi_1^3 < \infty$, то для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_N(t) - N}{\sqrt{NtB}} \leq x \mid \nu_N = N + n \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Доказательство. Эта лемма доказывается по схеме, описанной при доказательстве теоремы 5.4 работы [3].

Пусть $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Для произвольных фиксированных $x_1 < x_2$ положим

$$k_1 = N + x_1 \sqrt{NBt}, \quad k_2 = N + x_2 \sqrt{NBt}.$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{x_1 \leq (\mu_N(t) - N)/\sqrt{NBt} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n\} \\ = \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \sum_{N \leq s \leq N+n-k} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} \frac{\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Разобьем область суммирования по параметру s на две части:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{s: N \leq s \leq n\sqrt{t/N}\}, \\ M_2 &= \{s: n\sqrt{t/N} < s \leq N + n - k\}, \end{aligned}$$

и обозначим соответствующие суммы S_1 и S_2 . Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{\mu_N(t) - N}{\sqrt{NBt}} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n \right\} = S_1 + S_2. \quad (11)$$

Оценим S_1 . Известно [2], что для $n \geq k \geq 0$, $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\nu_k = n\} = (k/n) \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = n - k\}, \quad (12)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение (2). Используя локальную предельную теорему о сходимости к нормальному закону, согласно которой при $l \rightarrow \infty$ равномерно относительно целых m

$$\sigma\sqrt{l} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_l = m\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(m - al)^2}{2\sigma^2 l} \right\}, \quad (13)$$

где a и σ^2 равны соответственно математическому ожиданию и дисперсии случайной величины ξ_1 , получаем, что

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} = \frac{Nd(1 + o(1))}{n\sqrt{2B\pi n}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\} = \frac{Nd(1 + o(1))}{n\sqrt{2B\pi n}}. \quad (15)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{x_1 \leq x \leq x_2} \sum_{s \in M_1} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s\} (1 + o(1)) \\ &= (\mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2\} - \mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2, \nu_N(t) > n\sqrt{t/N}\}) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Легко показать, что справедливы соотношения $\mathbf{M}\mu^{(1)}(t) = 1$, $\mathbf{D}\mu^{(1)}(t) = Bt$, $\mathbf{M}(\mu^{(1)}(t))^3 \leq C_1 t^2$; здесь и далее символами $C_1, C_2, \dots$ обозначены некоторые положительные постоянные. Используя эти соотношения, нетрудно проверить, что для последовательности случайных величин $(\mu^{(i)}(t) - 1)/\sqrt{B N t}$, $i = 1, \dots, N$, выполнено условие Ляпунова. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du + o(1). \quad (17)$$

Нетрудно показать, что $\mathbf{D}\nu^{(1)}(t) = Bt(t-1)(2t-1)/6$. Тогда, используя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{k_1 \leq \mu_N(t) \leq k_2, \nu_N(t) > n\sqrt{t/N}\} &\leq \mathbf{P}\{\nu_N(t) > n\sqrt{t/N}\} \\ &\leq \mathbf{P}\{|\nu_N(t) - Nt| > n\sqrt{t/N} - Nt\} \\ &\leq \mathbf{P}\{|\nu_N(t) - Nt| > n/2\sqrt{t/N}\} \\ &\leq \frac{4\mathbf{D}\nu_N(t)}{n^2(t/N)} \leq C_2 N^2 \frac{t^2}{n^2} = o(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (16)–(18) следует, что

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du + o(1). \quad (19)$$

Оценим сумму S_2 . Рассмотрим $\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}$. Из (12) следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} = \frac{k\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N+n-s} = N + n - s - k\}}{N + n - s}. \quad (20)$$

Согласно теореме 7.3.16 книги [4],

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N+n-s} = N + n - s - k\} = \frac{d \exp\{-k^2/(2By)\}}{\sqrt{2By}} + \frac{b_k(N, n, s)}{y(1 + k^3 y^{-3/2})}, \quad (21)$$

где $|b_k(N, n, s)| \leq C_3$ и $y = N + n - s$. Функция $y^{-3/2} \exp\{-k^2/(2By)\}$ достигает максимума при $y = k^2/(2B)$ и, поскольку $y \geq k$, получаем, что

$$\left| \frac{k b_n(N, n, s)}{y^2 + k^3 y^{1/2}} \right| \leq \frac{C_4}{k + k^{5/2}} \leq \frac{C_5}{k^2} \leq \frac{C_6}{N^2}.$$

Отсюда и из (20), (21) следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} \leq \frac{C_7}{k^2} + \frac{C_6}{N^2} \leq \frac{C_8}{N^2}. \quad (22)$$

Из (10), (15), (18) и (22) получаем, что

$$S_2 \leq C_9 \frac{t^2}{N n^{1/2}} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (19) следует утверждение леммы 9 при $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Доказательство для случая $0 < C_{10} \leq N/\sqrt{n} \leq \gamma$ проводится аналогично.

Лемма 10. Если $n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, где β — положительная постоянная, $N/\sqrt{n} \rightarrow 0$, $M\xi_1^3 < \infty$, то для любых фиксированных $0 < x_1 < x_2$

$$\mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n \right\} \rightarrow F(x_1, x_2),$$

где функция распределения $F(x_1, x_2)$ определена соотношением (3).

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.5.10 книги [1]. Для произвольных $x_1 < x_2$ положим

$$k_1 = x_1 t B / 2, \quad k_2 = x_2 t B / 2.$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n \right\} \\ = \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \sum_{N \leq s \leq N+n-k} \mathbf{P} \{ \mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s \} \frac{\mathbf{P} \{ \nu_k = N + n - s \}}{\mathbf{P} \{ \nu_N = N + n \}}. \end{aligned}$$

Для произвольного δ , $0 < \delta < 1$, разобьем сумму по параметру s на две части: на сумму от 1 до $(1 - \delta)n$ и на сумму от $(1 - \delta)n$ до $N + n - k$. Обозначая эти суммы соответственно через S_1 и S_2 , получаем, что

$$\mathbf{P} \left\{ x_1 \leq \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n \right\} = S_1 + S_2. \quad (23)$$

Рассмотрим сумму S_1 . Из соотношений (12) и (13) легко видеть, что

$$\mathbf{P} \{ \nu_k = N + n - s \} = \frac{kd(1 + o(1))}{(n - s)^{3/2} \sqrt{2\pi B}} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2B(n - s)} \right\}, \quad (24)$$

$$\mathbf{P} \{ \nu_N = N + n \} = \frac{Nd(1 + o(1))}{n\sqrt{2\pi Bn}}. \quad (25)$$

Обозначая $y = s/n$ и $k = xtB/2$, нетрудно получить, что

$$\frac{\mathbf{P} \{ \nu_k = N + n - s \}}{\mathbf{P} \{ \nu_N = N + n \}} = \frac{k}{N(1 - y)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 \beta^2}{8(1 - y)} \right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно целых k и s , для которых $x_1 \leq x \leq x_2$, $y \leq 1 - \delta$. Отсюда и из (9) получаем, что

$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \sum_{N \leq s \leq (1 - \delta)n} \mathbf{P} \{ \mu_N(t) = k, \nu_N(t) = s \mid \mu_N(t) > 0 \} \\ \times \frac{x}{(1 - y)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 \beta^2}{8(1 - y)} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Обозначая $G_\beta(x, y)$ функцию распределения с характеристической функцией (4) и используя утверждение леммы 5, получаем, что

$$S_1 \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{1 - \delta} \frac{x}{(1 - y)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 \beta^2}{8(1 - y)} \right\} dG_\beta(x, y). \quad (26)$$

Рассмотрим сумму S_2 . Используя теорему 7.3.16 из [4] для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}$, так же, как при оценке $\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\}$ в лемме 9, нетрудно показать, что справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\nu_k = N + n - s\} \leq C_1/N^2, \quad 0 < C_1 < \infty.$$

Отсюда и из (25) получаем, что для некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$S_2 \leq \frac{C_2 t^2}{N\sqrt{n}} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Таким образом, из (26) и (27) следует утверждение леммы 10.

Лемма 11. Если $N, n, t \rightarrow \infty$ так, что $t\sqrt{B/n} \rightarrow \beta$, $N/\sqrt{n} \rightarrow \gamma$, где β и γ — положительные постоянные, $\mathbf{M}\xi_1^3 < \infty$, то при любых фиксированных $0 < x_1 < x_2$

$$\mathbf{P}\left\{x_1 \leq \frac{2\mu_N(t)}{Bt} \leq x_2 \mid \nu_N = N + n\right\} \rightarrow F_\gamma(x_1, x_2),$$

где функция распределения $F_\gamma(x_1, x_2)$ определена соотношением (5).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 10, при этом используют утверждение леммы 6.

Теперь мы можем доказать теоремы 1–5. Их утверждения непосредственно следуют из леммы 2 и, соответственно, лемм 7–11.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л. *Случайные леса*. Карельский научн. центр РАН, Петрозаводск, 1996.
2. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
3. Калугин И. Б. Один класс случайных отображений. *Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова* (1986) **177**, 75–104.
4. Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 24.03.97.