Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. М. Кудлаев, Разделимые статистики в схеме размещения по различным ячейкам конечной совокупности, состоящей из различных и неразличимых частиц, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 137–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:15:06

Разделимые статистики в схеме размещения по различным ячейкам конечной совокупности, состоящей из различных и неразличимых частиц

© 1997 г. Э. М. Кудлаев

Рассматривается задача размещения по различным ячейкам конечной совокупности, состоящей из различных и неразличимых частиц. Обсуждаются связь с разделимыми статистиками и, на примере этой задачи, способы построения новых разделимых статистик. Рассматриваются применения к задачам комбинаторики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-01-01273.

1. Случайные размещения частиц по ячейкам и условные распределения

Совокупность частиц, состоящая из $n_1 \geq 1$ различных и $n_2 \geq 1$ неразличимых частиц размещается по $N \geq 2$ различным ячейкам так, что каждая частица попадает в одну ячейку. Занумеруем ячейки числами от 1 до N и различные частицы числами от 1 до n_1 . Результат размещения можно трактовать как упорядоченное множество упорядоченных пар

$$(m_k(1), m_k(2)), \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где целые неотрицательные числа $m_1(i), \dots, m_N(i)$, $i = 1, 2$, называются заполнениями ячеек и удовлетворяют соотношениям

$$m_1(i) + \dots + m_N(i) = n_i, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Таким образом, $m_k(1)$ и $m_k(2)$ — числа различных и неразличимых частиц, соответственно, попавших в ячейку с номером k , $k = 1, \dots, N$. Введем следующее вероятностное пространство. Пусть

$$\Omega = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' = (a_1, \dots, a_{n_1}), \omega'' = [b_1, \dots, b_{n_2}], \\ a_i, b_j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2\}$$

где символ $[c_1, \dots, c_n]$ означает (см., например, [1]) неупорядоченную выборку (набор), составленную из чисел $c_1, \dots, c_n$. При этом a_k интерпретируется как номер

ячейки, в которую попала k -я частица из n_1 различных частиц, $k = 1, \dots, n_1$, а $b_1, \dots, b_{n_2}$ как номера ячеек, заполненных n_2 неразличимыми частицами. Между множеством всех наборов $[b_1, \dots, b_{n_2}]$ и упорядоченным множеством заполнений ячеек $(m_1(2), \dots, m_N(2))$ существует очевидное взаимно однозначное соответствие, а именно, для каждого набора $[b_1, \dots, b_{n_2}]$ указывается содержащееся в нем число единиц, двоек и так далее, то есть указываются числа $m_1(2), m_2(2), \dots$ соответственно. Хорошо известно (см., например [1, 2]), что мощности множеств Ω' , состоящего из всех последовательностей ω' , и Ω'' , состоящего из всех наборов ω'' , равны N^{n_1} и $\binom{N+n_2-1}{N-1}$ соответственно. В качестве алгебры событий $\mathcal{G}$ возьмем множество всех подмножеств Ω . Согласно классической схеме на множестве Ω всех элементарных событий введем вероятность, полагая

$$P(\omega) = \frac{1}{N^{n_1} \binom{N+n_2-1}{N-1}}, \quad \omega \in \Omega. \quad (3)$$

Если ν_k и κ_k — случайные величины, равные соответственно числу различных и неразличимых частиц, попавших в k -ю ячейку, то с учетом (2), (3) и того факта, что каждому решению уравнения (2) с $i = 1$ соответствует ровно

$$\frac{n_1!}{\prod_{k=1}^N m_k(1)!}$$

последовательностей ω' , получим, что

$$\begin{aligned} & P \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega \in \Omega : \nu_k(\omega) = m_k(1), \kappa_k(\omega) = m_k(2) \} \right\} \\ &= \frac{n_1!}{\prod_{k=1}^N m_k(1)! N^{n_1} \binom{N+n_2-1}{N-1}} \\ &= \sum_{\omega' : \nu_k((\omega', \omega'')) = m_k(1), k=1, \dots, N} \sum_{\omega'' \in \Omega''} P(\omega) \sum_{\omega' \in \Omega'} \sum_{\omega'' : \kappa_k((\omega', \omega'')) = m_k(2), k=1, \dots, N} P(\omega) \quad (4) \\ &= P \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega : \nu_k(\omega) = m_k(1) \} \right\} P \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega : \kappa_k(\omega) = m_k(2) \} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что случайные векторы $\nu(n_1, N) = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ и $\kappa(n_2, N) = (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$ независимы, причем первый из них имеет полиномиальное распределение с n_1 независимыми испытаниями и N равновероятными исходами, а вектор $\kappa(n_2, N)$ имеет распределение, называемое в статистической физике распределением Бозе–Эйнштейна [1, 2]. Известно (см., например, [3–5]), что распределение вектора $\nu(n_1, N)$ совпадает с условным совместным распределением независимых случайных величин $\theta'_1, \dots, \theta'_N$, распределенных по закону Пуассона

$$P_{\theta'_k} = \Pi(\lambda), \quad k = 1, \dots, N,$$

с произвольным параметром λ , при условии

$$\nu' = \sum_{k=1}^N \theta'_k = n_1,$$

а распределение вектора $\varkappa(n_2, N)$ совпадает с условным совместным распределением независимых случайных величин $\theta_1'', \dots, \theta_N''$, распределенных по геометрическому закону

$$\mathbf{P}_{\theta_k''} = NB(1, p), \quad k = 1, \dots, N,$$

с произвольным параметром $p \in (0, 1)$, при условии

$$\eta'' = \sum_{k=1}^N \theta_k'' = n_2.$$

Здесь и далее $NB(r, p)$ означает отрицательно-биномиальный закон распределения с натуральным параметром r и параметром p , так что

$$NB(r, p)(s) = q^r \binom{s+r-1}{s} p^s, \quad q = 1-p, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Отметим, что произвол в выборе параметров λ и p связан с тем, что суммы

$$\sum_{k=1}^N \theta_k', \quad \sum_{k=1}^N \theta_k''$$

являются соответствующими достаточными статистиками относительно этих параметров. Согласно терминологии статей [3, 5–7] случайные величины вида

$$\zeta' = \sum_{k=1}^N f_k(\nu_k), \quad \zeta'' = \sum_{k=1}^N g_k(\varkappa_k), \quad (6)$$

где $f_k, g_k, k = 1, \dots, N$, — произвольные действительные функции, называются разделимыми статистиками (РС), соответствующими схемам

$$(N, n_1, \mathbf{Z}, \mathbf{P}_{\theta_k'}, k = 1, \dots, N, \mathbf{R}), \quad (N, n_2, \mathbf{Z}, \mathbf{P}_{\theta_k''}, k = 1, \dots, N, \mathbf{R})$$

размещения n_1 различных и n_2 неразличимых частиц по N различным ячейкам. Здесь и далее $\mathbf{R}, \mathbf{Z}$ — топологические группы действительных и целых чисел соответственно с обычным сложением и соответственно с обычной и дискретной топологиями, представляющие собой локально компактные хаусдорфовы абелевы группы, порожденные носителями распределений случайных величин ζ' (или ζ'') и θ_1' (или θ_1''). Вторые компоненты схем РС представляют собой значения фиксирующие соответствующие суммы η' и η'' независимых случайных величин.

С одной стороны, случайные величины (6) широко используются в математике и других областях знаний, а с другой, в силу их связи с независимыми случайными величинами достаточно хорошо поддаются изучению с помощью классических результатов теории вероятностей, относящихся к суммированию независимых случайных величин (см. обзоры [3, 5], монографии [4–8] и статьи [7, 9–12]). Случайные величины ζ' представляют собой наиболее популярные РС дискретного типа. Помимо комбинаторных задач, связанных с размещениями различных частиц по различным ячейкам, они применяются и в математической статистике как при выборочном обследовании конечных совокупностей, так и при построении критериев согласия аддитивного вида (упомянем в связи с последними хорошо известные

критерии хи-квадрат и пустых ящиков). Разделимые статистики ζ'' применяются как в комбинаторике (при размещении неразличимых чачтиц по различным ячейкам), так и в задачах математической статистики, в частности, при построении аддитивных статистик критериев однородности, основанных на спейсинг-частотах (отметим, например, критерии пустых блоков и Диксона).

Пусть f_k , $k = 1, \dots, N$, — произвольные действительные функции, определенные на двумерной решетке с целочисленными неотрицательными координатами, и пусть

$$\zeta = \sum_{k=1}^N f_k(\nu_k, \kappa_k). \quad (7)$$

Статистики (7) являются более общими, чем (6), и кроме того, являются РС, соответствующими независимым случайным величинам $\theta_k = (\theta'_k, \theta''_k)$, $k = 1, \dots, N$, в схеме

$$(N, (n_1, n_2), \mathbf{Z}^2, \mathbf{P}_{\theta_k} = \mathbf{P}_{\theta'_k} \mathbf{P}_{\theta''_k}, k = 1, \dots, N, \mathbf{R}). \quad (8)$$

Предположим, что для каждого значения $k = 1, \dots, N$ функции f_k в (7) равны индикатору I_B непустого множества B , являющегося некоторым подмножеством множества всех упорядоченных пар целых нетрицательных чисел. Тогда статистика (7) принимает вид

$$\zeta = \sum_{k=1}^N I_B(\nu_k, \epsilon_k)$$

и равна числу различных ячеек, для которых заполнения (см. (1), (2)) удовлетворяет ограничениям

$$(m_k(1), m_k(2)) \in B, \quad k = 1, \dots, N, \quad (9)$$

при этом в схеме (8) последняя компонента $\mathbf{R}$ меняется на $\mathbf{Z}$.

2. Способы построения новых разделимых статистик

В предыдущем параграфе упорядоченное множество случайных пар

$$(\nu_k, \kappa_k), \quad k = 1, \dots, N,$$

порождало схему РС (8) и было составлено по независимым компонентам, каждая из которых порождала схему РС. Вообще, пусть каждая из независимых целочисленных последовательностей

$$\{w_{ik}, k = 1, \dots, N\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

порождает соответствующую схему РС

$$(N, a_i, \mathbf{Z}, \mathbf{P}_{\theta_{k(i)}}, k = 1, \dots, N), \quad i = 1, \dots, s.$$

Тогда последовательность случайных векторов

$$(w_{1k}, \dots, w_{sk}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

порождает схему РС

$$\left(N, (a_1, \dots, a_s), \mathbf{Z}^s, \mathbf{P}_{\theta_k} = \prod_{i=1}^s \mathbf{P}_{\theta_k(i)}, k = 1, \dots, N \right)$$

с соответствующими этой схеме РС

$$\zeta = \sum_{k=1}^N f_k(w_{1k}, \dots, w_{sk}), \quad (11)$$

где $f_k, k = 1, \dots, N$, — произвольные функции, определенные на s -мерной решетке с целочисленными координатами. Пусть, в частности, в (10) w_{ik} для каждого i есть заполнение k -й ячейки после размещения n_i различных частиц из i -го множества; РС вида (11), соответствующая этой схеме, изучались в работах [12–18]. Могут представлять интерес и статистики вида (11), когда в (10) w_{ik} для каждого i есть заполнение k -й ячейки после размещения n_i неразличимых частиц из i -го множества. В случае

$$n_1 = \dots = n_s = 1$$

РС последней схемы сводятся к РС ζ' упомянутым в [6], для которых $n_1 = s$.

Рассмотрим еще один способ получения новых РС [19] из одной РС. Пусть задана РС общего [5–7] вида

$$\zeta = \sum_{k=1}^N f_k(w_k). \quad (12)$$

Здесь случайные величины $w_1, \dots, w_N$ и соответствующие независимые случайные величины $\theta_1, \dots, \theta_N$ принимают значения в некотором борелевском пространстве $\mathcal{G} = (G_2, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств из G_2 , и определены на вероятностных пространствах

$$(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mathbf{P}_1), \quad (\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mathbf{P}_2)$$

соответственно. Предполагается, что существует такая точка $a \in \mathcal{G}_2$, что совместное распределение величин $w_1, \dots, w_N$ совпадает с условным совместным распределением величин $\theta_1, \dots, \theta_N$ при условии

$$\eta = \sum_{k=1}^N \theta_k = a. \quad (13)$$

Для заданного множества $B \in \mathcal{B}$ положим

$$\Omega_1(B) = \{\omega_1 \in \Omega_1 : w_k(\omega_1) \in B, k = 1, \dots, N\},$$

$$\Omega_2(B) = \{\omega_2 \in \Omega_2 : \theta_k(\omega_2) \in B, k = 1, \dots, N\},$$

$$C = \{\omega_2 \in \Omega_2 : \eta(\omega_2) = a\},$$

$$\mathfrak{S}_j(B) = \mathfrak{S}_j \cap \Omega_j(B), \quad j = 1, 2.$$

Предположим, что выполняется условие

$$\mathbf{P}_2(\Omega_2(B) \cap C) > 0. \quad (14)$$

Из (14) следует, что вероятности

$$\mathbf{P}_2(\Omega_2(B)), \quad \mathbf{P}(C), \quad \mathbf{P}_1(\Omega_1(B)) = \frac{\mathbf{P}_2(\Omega_2(B) \cap C)}{P_2(C)}$$

положительны. Для всех $A \in \mathfrak{S}_j(B)$ положим

$$\mathbf{P}_j^{(B)}(A) = \frac{\mathbf{P}_j(A)}{\mathbf{P}_j(\Omega_j(B))}, \quad j = 1, 2, \quad (15)$$

и введем суженные вероятностные пространства

$$(\Omega_j(B), \mathfrak{S}_j(B), \mathbf{P}_j^{(B)}), \quad j = 1, 2.$$

Формулы

$$\begin{aligned} w_k^{(B)}(\omega_1) &= w_k(\omega_1), & \omega_1 &\in \Omega_1(B), \\ \theta_k^{(B)}(\omega_2) &= \theta_k(\omega_2), & \omega_2 &\in \Omega_2(B), \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

задают функции $w_k^{(B)}$ и $\theta_k^{(B)}$, являющиеся соответственно сужениями функций w_k и θ_k на соответствующие вероятностные пространства. Обозначим $f_k^{(B)}$ сужение функции f_k на множество $G_2 \cap B$, $k = 1, \dots, N$. В [19] показано, что при условии (14) и при некоторых слабых ограничениях на функции f_k , $k = 1, \dots, N$, множество B и точки фиксации a суммы (13) величина

$$\zeta^{(B)} = \sum_{k=1}^N f_k^{(B)}(w_k^{(B)}) \quad (16)$$

также является РС. Тем самым, разделимая статистика вида (12) порождает целое семейство (индексированное множествами B) суженных РС (16).

Еще один подход построения новых РС из заданных состоит в использовании комбинации двух первых способов. Этот третий подход будет проиллюстрирован ниже.

3. Размещения частиц с ограничениями на заполнения ячеек

Возвращаясь к величинам (7) и используя подходы описанные в предыдущем параграфе, рассмотрим специальный случай статистики (16)

$$\zeta^{(B)} = \sum_{k=1}^N f_k^{(B)}((\nu_k, \kappa_k)^{(B)}), \quad (17)$$

где B — непустое подмножество (необязательно собственное) множества G_2 упорядоченных пар целых неотрицательных чисел, класс множеств $\mathcal{B}$ совпадает с множеством всех подмножеств G_2 и $f_k^{(B)}$, $k = 1, \dots, N$, — произвольные действительные функции, определенные на множестве $G_2 \cap B$.

Теорема 1. Случайная величина (17) является разделимой статистикой со схемой

$$(N, (n_1, n_2), \mathbf{Z}^2, \mathbf{P}_{\theta_k^{(B)}} = \mathbf{P}_{\theta_k} / \mathbf{P}_{\theta_k^{(B)}}, k = 1, \dots, N, \mathbf{R}),$$

где независимые случайные величины $\theta_k^{(B)}$, $k = 1, \dots, N$, одинаково распределены по закону, определяемому для всех $(r_1, s_1) \in B$ формулами

$$\mathbf{P}_{\theta_1^{(B)}}((r_1, s_1)) = \frac{\lambda^{r_1} p^{s_1}}{r_1! B(\lambda, p)},$$

где

$$B(\lambda, p) = \sum_{(r,s) \in B} \frac{\lambda^r p^s}{r!}.$$

Доказательство. В обозначениях предыдущего параграфа для случая (17) $\Omega_1 = \Omega$, $\mathfrak{S}_1$ — множество всех подмножеств Ω , $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ и

$$\theta_k = (\theta'_k, \theta''_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad a = (n_1, n_2).$$

Компоненты θ'_k и θ''_k вектора θ_k независимы и имеют распределение Пуассона и геометрическое распределение соответственно, поэтому для любых неотрицательных целых чисел r_k, s_k , $k = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega_2 \in \Omega_2 : (\theta'_k(\omega_2), \theta''_k(\omega_2)) = (r_k, s_k) \} \right\} \\ = \mathbf{P}_2 \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta'_k(\omega_2) = r_k \} \right\} \mathbf{P}_2 \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta''_k(\omega_2) = s_k \} \right\} \\ = (1-p)^N e^{-N\lambda} \prod_{k=1}^N \frac{1}{r_k!} \lambda^r p^s, \end{aligned} \quad (18)$$

где $r = r_1 + \dots + r_N$ и $s = s_1 + \dots + s_N$.

В силу (15) совместное распределение усеченных случайных величин

$$\theta_k^{(B)} = (\theta'_k, \theta''_k)^{(B)}, \quad k = 1, \dots, N,$$

определяется формулами

$$\mathbf{P}_2^{(B)} \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \theta_k^{(B)}(\omega_2) = (r_k, s_k) \} \right\} = \prod_{k=1}^N \frac{1}{r_k!} \lambda^r p^s / (B(\lambda, p))^N \quad (19)$$

для всех $(r_k, s_k) \in B$ и $k = 1, \dots, N$ (напомним, что здесь $r = r_1 + \dots + r_N$ и $s = s_1 + \dots + s_N$).

Положим

$$W_N = (w_1, \dots, w_N), \quad W_N^{(B)} = (w_1^{(B)}, \dots, w_N^{(B)}),$$

где $w_k = (\nu_k, \varepsilon_k)$, $k = 1, \dots, N$,

$$\Theta(N) = (\theta_1, \dots, \theta_N), \quad \Theta(N)^{(B)} = (\theta_1^{(B)}, \dots, \theta_N^{(B)}),$$

$B^N = B \times \dots \times B$, где B повторяется N раз,

$$A_N = ((r_1, s_1), \dots, (r_N, s_N)),$$

где $(r_k, s_k) \in B$, $k = 1, \dots, N$.

Воспользовавшись формулами (7), (8) и (15), получим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_1^{(B)} \{ \{ \omega_1 \in \Omega_1^{(B)} : W_N^{(B)}(\omega_1) = A_N \} \} \\ &= \frac{\mathbf{P}_1 \{ \{ \omega_1 \in \Omega_1^{(B)} : W_N^{(B)}(\omega_1) = A_N \} \}}{\mathbf{P}_1 \{ \Omega_1(B) \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_1 \{ \{ \omega_1 \in \Omega_1 : W_N(\omega_1) = A_N \} \}}{\mathbf{P}_1 \{ \{ \omega_1 \in \Omega_1 : W_N(\omega_1) \in B^N \} \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) = A_N \} \mid \theta_1 + \dots + \theta_N = (n_1, n_2) \}}{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) \in B^N \} \mid \theta_1 + \dots + \theta_N = (n_1, n_2) \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) = A_N, \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}}{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) \in B^N, \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \Theta(N)(\omega_2) = A_N, \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}}{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2^{(B)} \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \Theta(N)^{(B)}(\omega_2) = A_N, \theta_1^{(B)}(\omega_2) + \dots + \theta_N^{(B)}(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}}{\mathbf{P}_2^{(B)} \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \theta_1^{(B)}(\omega_2) + \dots + \theta_N^{(B)}(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}} \\ &= \mathbf{P}_2^{(B)} \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \Theta(N)^{(B)}(\omega_2) = A_N \} \mid \theta_1^{(B)} + \dots + \theta_N^{(B)} = (n_1, n_2) \} \} \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) следует утверждение теоремы.

Исследование величин (17), в том числе получение их предельных распределений (при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$) как при основной, так и при альтернативных гипотезах может осуществляться стандартными методами теории РС (см., например, [3–5, 8, 10, 20]). Из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если множество B есть прямоугольник

$$B = B_1 \times B_2, \quad (20)$$

то, как и в случае (7), когда усечение отсутствует, компоненты векторов $\theta_k^{(B)} = (\theta'_k, \theta''_k)^{(B)}$, $k = 1, \dots, N$, независимы и

$$\mathbf{P}_{\theta_1^{(B)}}((r_1, s_1)) = \mathbf{P}_{(\theta'_1)^{(B_1)}}(r_1) \mathbf{P}_{(\theta''_1)^{(B_2)}}(s_1) = \frac{\lambda^{r_1} p^{s_1}}{r_1! B_1(\lambda) B_2(p)}, \quad (21)$$

где $r_1 \in B_1$, $s_1 \in B_2$ и

$$B_1(\lambda) = \sum_{r \in B_1} \frac{\lambda^r}{r!}, \quad B_2(p) = \sum_{s \in B_2} p^s.$$

Если множества B_1 и B_2 в представлении (20) равны множеству всех целых неотрицательных чисел, то (17) есть разделимая статистика в схеме (8) отсутствия усечения. Если же множества B_1 и B_2 являются одноточечными и равны соответственно $\{r_0\}$ и $\{s_0\}$, то случайные величины $\theta_k^{(B)}$, $k = 1, \dots, N$ (также, как и $\zeta^{(B)}$), имеют вырожденное распределение, сосредоточенное в (r_0, s_0) .

4. Применения к задачам комбинаторики

Рассмотрим связь схемы РС, соответствующей величинам (17), с задачами комбинаторики, учитывающими ограничения на заполнения ячеек. Ранее такая связь исследовалась, например, в [9] для случая различных частиц и в [8, 20] в случае неразличимых частиц.

Обозначим через $\rho = \rho(n, N, B)$, $n = (n_1, n_2)$, число исходов пространства Ω , при которых заполнения ячеек удовлетворяют ограничениям (9).

Теорема 2. В обозначениях теоремы 1

$$\rho(n, N, B) = \frac{n! B(\lambda, p)^N}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} \times \mathbf{P}_2^{(B)} \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2(B) : \theta_1^{(B)}(\omega_2) + \dots + \theta_N^{(B)}(\omega_N) = (n_1, n_2) \} \}. \quad (22)$$

Доказательство. Воспользовавшись обозначениями предыдущего параграфа, учитывая связь РС (7) с соответствующими условными распределениями (см. (8)) и действуя, как при выводе формулы (2.9) в [16], находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{N^{n_1} \binom{N+n_2-1}{N-1}} &= \mathbf{P}_1 \left\{ \bigcap_{k=1}^N \{ \omega_1 \in \Omega_1 : (\nu_k(\omega_1), \kappa_k(\omega_1)) \in B \} \right\} \\ &= \mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) \in B \} \mid \theta_1 + \dots + \theta_N = (n_1, n_2) \} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) \in B^N \} \cap \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \}}{\mathbf{P}_2 \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = n_1, n_2 \}} \\ &= \frac{\mathbf{P}_2 \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \Theta(N)(\omega_2) \in B^N \}}{\mathbf{P}_2 \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta'_1(\omega_2) + \dots + \theta'_N(\omega_2) = n_1 \}} \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}_2 \{ \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta_1(\omega_2) + \dots + \theta_N(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \mid \Theta(N) \in B^N \}}{\mathbf{P}_2 \{ \omega_2 \in \Omega_2 : \theta''_1(\omega_2) + \dots + \theta''_N(\omega_2) = n_2 \}} \\ &= \mathbf{P}_2^{(B)} \{ \omega_2 \in \Omega_2^{(B)} : \theta_1^{(B)}(\omega_2) + \dots + \theta_N^{(B)}(\omega_2) = (n_1, n_2) \} \frac{(B(\lambda, p))^N n_1!}{(N\lambda)^{n_1} p^{n_2} \binom{N+n_2-1}{N_1}}. \end{aligned} \quad (23)$$

В последнем из равенств мы воспользовались известными фактами о том, что сумма N независимых одинаково распределенных по закону Пуассона с параметром λ случайных величин имеет распределение Пуассона с параметром λN , а сумма N независимых одинаково распределенных по геометрическому закону с параметром p случайных величин имеет распределение $NB(N, p)$. Из (23) прямо следует (22).

Следуя методике статьи [9], рассмотрим некоторые применения Теоремы 2. Будем считать пары заполнений k -й ячейки $(m'_k(1), m'_k(2))$ и $(m''_k(1), m''_k(2))$ различными, если хотя бы одна компонента этих пар различна, то есть при одинаковых вторых заполнениях первые отличаются либо численно, либо, в случае равенства этих чисел, наборами различных частиц, если же в парах одинаковы первые наборы, то отличаются числа неразличимых частиц. Два размещения считаются различными, если они отличаются хотя бы одной парой заполнений, размещения по $N_1 \neq N_2$ ячейкам всегда считаются различными. Обозначим через $T(n, A, B)$, где $n = (n_1, n_2)$ и $A \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}$, число различных размещений конечной совокупности,

состоящей из n_1 различных и n_2 неразличимых частиц, по $N \in A$ различным ячейкам с ограничениями (9) на заполнения ячеек. Формула (22) остается справедливой и при $N = 1$, далее будем считать, что в ней при $N = 0$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k^{(B)}(\omega_2) = (0, 0).$$

Поэтому так же, как в [9], можно положить

$$\begin{aligned} T(n, \{0\}, B) &= \rho(n, \{0\}, B), \quad n \neq (0, 0), \\ T((0, 0), \{0\}, B) &= \rho((0, 0), \{0\}, B) = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Положим $\Omega_0(A) = A$ и возьмем множество всех подмножеств $\Omega_0(A)$ в качестве сигма-алгебры $\mathfrak{S}_0(A)$. Полагая

$$A(x) = \sum_{j \in A} x^j, \quad x \in (0, 1),$$

введем вероятностную меру

$$\mathbf{P}_0^{(A)}(\omega_0) = \frac{(B(\lambda, p))^{\omega_0}}{A(B(\lambda, p))}, \quad \omega_0 \in \Omega_0(A), \quad (25)$$

на измеримом пространстве $(\Omega_0(A), \mathfrak{S}_0(A))$. Рассмотрим произведение вероятностных пространств

$$(\Omega_0(A) \times \Omega_2(B), \mathfrak{S}_0(A) \times \mathfrak{S}_2(B), \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_0^{(A)} \times \mathbf{P}_2^{(B)}) \quad (26)$$

и на нем независимые случайные величины $\nu = \nu_{A,B}$ и $\hat{\theta}_m^{(B)}$, $m \geq 1$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \nu(\omega_0, \omega_2) &= \omega_0, \\ \hat{\theta}_m^{(B)}(\omega_0, \omega_2) &= (\hat{\theta}_m', \hat{\theta}_m'')^{(B)}(\omega_0, \omega_2) = (\theta_m', \theta_m'')^{(B)}(\omega_2) = \theta_m^{(B)}(\omega_2), \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (27)$$

при $(\omega_0, \omega_2) \in \Omega_0(A) \times \Omega_2(B)$, и формулами (19) и (25).

Считая, что

$$0 < p < 1, \quad 0 < \lambda < \ln(1 - p), \quad (28)$$

и действуя аналогично выводу формулы (2.12) в [9], с учетом соотношений (22), (24) и (25), получим, что

$$\begin{aligned} T((n_1, n_2), A, B) &= \sum_{N \in A} \rho(n, N, B) \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} \sum_{N \in A} (B(\lambda, p))^N \mathbf{P}_2^{(B)}\{\omega_2 \in \Omega_2(B) : \theta_1^{(B)}(\omega_2) + \dots + \theta_N^{(B)}(\omega_2) = n\} \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} A(B(\lambda, p)) \sum_{N \in A} \hat{\mathbf{P}}\{\nu = N\} \hat{\mathbf{P}}\{\hat{\theta}_1^{(B)} + \dots + \hat{\theta}_N^{(B)} = n\} \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} A(B(\lambda, p)) \\ &\quad \times \hat{\mathbf{P}}\{(\omega_0, \omega_2) \in \Omega_0 \times \Omega_2(B) : \hat{\theta}_1^{(B)}(\omega_0, \omega_2) + \dots + \hat{\theta}_N^{(B)}(\omega_0, \omega_2) = (n_1, n_2)\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что ряд во второй строке в (29) сходится, так как в силу (28) он мажорируется сходящимся рядом:

$$\sum_{N \in A} (B(\lambda, p))^N \leq \sum_{N \in A} (q^{-1} e^\lambda)^N.$$

Так как

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \hat{\mathbf{P}}\{\hat{\theta}_1^{(B)} + \dots + \hat{\theta}_N^{(B)} = (n_1, n_2)\} = 1,$$

следуя выводу формулы (2.14) в [9], из (29) получаем, что

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} T((n_1, n_2), A, B) \frac{\lambda^{n_1} p^{n_2}}{n!} = A(B(\lambda, p)). \quad (30)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть ν и $\hat{\theta}_m^{(B)}$, $m \geq 1$, — независимые случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (26) формулами (27), (19) и (25). Тогда при выполнении (24) и (28) число размещений $T((n_1, n_2), A, B)$, где

$$n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0, \quad A \subseteq \{0\} \cup \mathbf{N}, \quad B \subseteq \{(r, s): r, s = 0, 1, 2, \dots\},$$

удовлетворяет соотношениям (29) и (30).

Рассмотрим некоторые применения теоремы 3. Учитывая (21) и (27), из (29) и (30) получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Если имеет место представление (20), то соотношения (29) и (30) принимают вид

$$\begin{aligned} & T((n_1, n_2), A, B_1 \times B_2) \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} A(B_1(\lambda) B_2(p)) \hat{\mathbf{P}}\{(\omega_0, \omega_2) \in \Omega_0 \times \Omega_2(B_1 \times B_2): \\ & \quad ((\hat{\theta}_1')^{(B_1)}, (\hat{\theta}_1'')^{(B_2)})(\omega_0, \omega_2) + \dots + ((\hat{\theta}_N')^{(B_1)}, (\hat{\theta}_N'')^{(B_2)})(\omega_0, \omega_2) = (n_1, n_2)\} \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n_1} p^{n_2}} \sum_{N=0}^{\infty} (B_1(\lambda) B_2(p))^N \\ & \quad \times \mathbf{P}_2^{(B_1 \times B_2)}\{\omega_2 \in \Omega_2(B_1 \times B_2): (\theta_1')^{(B_1)}(\omega_2) + \dots + (\theta_N')^{(B_1)}(\omega_2) = n_1\} \\ & \quad \times \mathbf{P}_2^{(B_1 \times B_2)}\{\omega_2 \in \Omega_2(B_1 \times B_2): (\theta_1'')^{(B_2)}(\omega_2) + \dots + (\theta_N'')^{(B_2)}(\omega_2) = n_2\}, \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n_1} p^{n_2}}{n!} T((n_1, n_2), A, B_1 \times B_2) = A(B_1(\lambda) B_2(p)) \quad (32)$$

соответственно. Здесь распределение случайных величин $(\theta_k')^{(B_1)}$ и $(\theta_k'')^{(B_2)}$, $k = 1, \dots, N$ определяются формулами (21).

Формула (29) (или (31)) аналогична формуле (2.4) из [9] и вместе с локальными предельными теоремами для сумм случайного числа слагаемых может быть использована с целью получения асимптотических формул для $T((n_1, n_2), A, B)$ при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$. Следующее утверждение аналогично формуле (2.15) в [9] и совместно с многомерным методом перевала [21, 22] дает еще один способ исследования асимптотического поведения левой части (29) (или (31)).

Следствие 3. Пусть числа c_1 и c_2 таковы, что

$$0 < c_1 < \ln(1 - c_2), \quad 0 < c_2 < 1, \quad (33)$$

и пусть

$$\Gamma = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_m| = c_m, m = 1, 2\}.$$

Тогда

$$T((n_1, n_2), A, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(B(z_1, z_2))}{z_1^{n_1+1} z_2^{n_2+1}} dz_1 dz_2,$$

где $A(B(z_1, z_2))$ определена в (30).

Доказательство. В силу (33) и (28) ряд

$$A(B(z_1, z_2)) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} T((n_1, n_2), A, B) \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n!}$$

сходится в

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_m| < c'_m, m = 1, 2\},$$

где c'_m , $m = 1, 2$, удовлетворяют (33) и превосходят соответственно числа c_m , $m = 1, 2$. Поэтому для каждого z_2 такого, что $|z_2| = p \in (0, c'_2)$, функция $A(B(\cdot, z_2))$ является голоморфным продолжением функции $A(B(\cdot, z_2))$, заданной при всех $\lambda \in (0, c'_1)$. Аналогично, для каждого z_1 такого, что $|z_1| = \lambda \in (0, c'_1)$, функция $A(B(z_1, \cdot))$ является голоморфным продолжением функции $A(B(z_1, \cdot))$, заданной при всех $p \in (0, c'_2)$. Согласно теореме Хартогса [23] голоморфность по каждой комплексной переменной влечет голоморфность по их совокупности. Воспользовавшись многомерным вариантом интегральной формулы Коши [23], получим требуемое утверждение.

Список литературы

1. Ширяев А. Н. *Вероятность*. Наука, Москва, 1989.
2. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 1, Мир, Москва, 1984.
3. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Дискретные задачи в теории вероятностей. *Итоги науки и техники*, т. 22. ВИНТИ, Москва, 1984, с. 3–60.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
5. Кудлаев Э. М. Разделимые статистики. *Итоги науки и техники*, т. 26. ВИНТИ, Москва, 1988, с. 97–149.

6. Кудлаев Э. М. Классификация разделимых статистик. В кн.: *Вероятностные процессы и их применения*. МИЭМ, Москва, 1989, с. 101–114.
7. Kudlaev E. M. On an existence theorem for decomposable statistics. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proc. 3rd Petrozavodsk Conf. TVP/VSP, Moscow/Utrecht, 1993*, pp. 271–286.
8. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
9. Holst L. On numbers related to partitions of unlike objects and occupancy problem. *Europ. J. Combinatorics* (1981) **2**, 231–237.
10. Holst L. Some conditional theorems in exponential families. *Ann. Probab.* (1981) **9**, 818–830.
11. Levin B. A representation for multinomial cumulative distribution function. *Ann. Statist.* (1981) **9**, 1123–1126.
12. Попова Т. В. Предельные теоремы в одной модели размещения частиц двух типов. *Теория вероятностей и ее применения* (1968) **13**, №3, 524–548.
13. Morris C. Central limit theorems for multinomial sums. *Ann. Statist.* (1975) **3**, №1, 165–188.
14. Асимов А. О многомерной предельной теореме в задаче размещения нескольких типов частиц. *Изв. АН УзССР* (1982) №3, 3–6.
15. Ивченко Г. И., Левин В. В. Асимптотическая нормальность одного класса статистик в полиномиальной схеме. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №1, 190–195.
16. Левин В. В. Критерий однородности для s выборок из полиномиального распределения. *Научные труды Кубанского госуниверситета* (1977) **247**, 38–45.
17. Форманов Ш. К., Асимов А. О локальной предельной теореме для одной схемы размещения частиц по ячейкам. В кн.: *Предельные теоремы для случайных процессов и статистические выводы*. ФАН, Ташкент, 1981, с. 202–214.
18. Holst L. Some limit theorems with applications in sampling theory. *Ann. Statist.* (1973) **1**, №4, 644–658.
19. Кудлаев Э. М. Разделимые статистики, получаемые из заданной разделимой статистики методом сужения вероятностного пространства. В кн.: *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*. Пермский госуниверситет, Пермь, 1993, с. 109–117.
20. Трунов А. Н. Предельные распределения в задаче размещения одинаковых частиц по различным ячейкам. *Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова* (1986) **177**, 157–176.
21. Севастьянов Б. А. Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа пустых ящиков в классической задаче о дробинках. *Теория вероятностей и ее применения* (1967) **12**, №1, 144–154.
22. Федорюк М. В. *Метод перевала*. Наука, Москва, 1977.
23. Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 26.12.1995.