Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Лебедев, О новом равновесии в циклических играх на графах, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 94–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:16:08

О новом равновесии в циклических играх на графах

© 1997 г. В. Н. Лебедев

Доказано существование равновесия в стационарных стратегиях в циклических играх, где игра проходит на вершинах некоторого графа до первого цикла и платеж одного игрока другому равен сумме максимальной и минимальной стоимостей этого цикла.

1. Введение

Рассматриваются вопросы оптимального поведения двух лиц с противоположными интересами в играх на графах, где стороны последовательно друг за другом осуществляют переходы по ребрам графа и платеж первого игрока второму определяется как некоторое предельное значение локальных платежей на возникающей траектории.

Хорошо известным примером подобной задачи является игра на графе, где платеж определяется как среднее предельное значение [1, 2]. Также известна ситуация гарантированного результата, в [3] доказано существование стационарных оптимальных поведений в этом случае.

В данной работе стоимость траектории симметрична по отношению к обоим игрокам и определяется как сумма верхнего и нижнего пределов локальных стоимостей, доказано существование равновесия в стационарных стратегиях на симметрических ориентированных графах.

2. Постановка задачи и формулировка основной теоремы

Рассматривается антагонистическая игра двух лиц, задаваемая ориентированным симметрическим двудольным графом без тупиков и кратных ребер $(B, A; E; c)$ с долями A и B , являющимися позициями первого и второго игроков соответственно, множеством ориентированных ребер E и целочисленной стоимостной функцией $c: E \rightarrow \mathbb{Z}$, заданной на ребрах графа. Симметричность графа означает, что если в графе есть ребро $(v_1 v_2)$ из вершины v_1 в вершину v_2 , то есть и обратное ребро $(v_2 v_1)$, а отсутствие тупиков означает, что для каждой вершины v_1 множество $E(v_1)$ ребер с этим началом непусто. Величину $c(v_1 v_2)$ называют локальным платежом перехода $(v_1 v_2)$, причем функция c также предполагается симметричной, то есть $c(v_1 v_2) = c(v_2 v_1)$ для всех $(v_1 v_2) \in E$.

Из некоторой начальной вершины v_0 фишка поочередно переносится игроками по ребрам графа и проходит бесконечную траекторию $T: v_0 v_1 v_2 \dots$, где каждые две последовательные вершины соединены ребром графа. Стоимость траектории определяется как

$$c(T) = \limsup_{i \rightarrow \infty} c(v_1 v_{i+1}) + \liminf_{i \rightarrow \infty} c(v_i v_{i+1}).$$

Величина $c(T)$ есть платеж первого игрока второму, первый игрок стремится уменьшить, а второй увеличить этот платеж.

Множество возможных стратегий первого и второго игроков будем обозначать S_1 и S_2 соответственно. Траекторию, соответствующую паре стратегий $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$ и начальной вершине v_0 , обозначим $T(s_1, s_2, v_0)$, а ее стоимость $c(v_1, v_2, v_0)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для любой игры $(B, A; E; c)$ найдутся такие стратегии s'_1 и s'_2 первого и второго игроков, что для любой начальной вершины v_0

$$\sup_{s_2} c(s'_1, s_2, v_0) = \inf_{s_1} c(s_1, s'_2, v_0).$$

Величину $c(v_0) = \sup_{s_2} c(s'_1, s_2, v_0) = \inf_{s_1} c(s_1, s'_2, v_0)$ называют ценой игры в вершине v_0 . Далее будет показано, что оптимальные и равномерные (равномерность означает независимость от начала v_0) стратегии s'_1 и s'_2 найдутся среди так называемых стационарных стратегий β и α .

Определение 1. Стационарной стратегией β первого игрока (соответственно, α второго игрока) в игре $(B, A; E; c)$, $|B| = n$, $|A| = m$, называют множество n (соответственно, m) ребер, по одному исходящему из каждой вершины доли B (соответственно, доли A).

Ясно, что

$$\beta = \{E_1 \subseteq E: |E_1| = n, \forall v \in B \exists (vv_1) \in E_1\}.$$

Аналогично может быть записана стационарная стратегия второго игрока.

Стационарная стратегия β для каждой вершины из $v \in B$ определяет переход по ребру $(vv_1) \in \beta$ всякий раз, когда фишка попадает в вершину v .

Стратегии s'_1 и s'_2 в теореме можно считать стационарными.

Определение 2. Эргодическим разбиением графа $(B, A; E; c)$ называют разбиение вершин на непересекающиеся множества $V_1, \dots, V_k$, для которого подграф, порожденный множеством V_i , не имеет тупиков, $i = 1, \dots, k$, и для каждой вершины первого игрока i -го блока отсутствуют переходы в блоки с меньшими номерами, то есть $(vw) \notin E$ для всех $v \in V_i \cap B$, $w \in V_j$, $j < i$; аналогично, для каждой вершины второго игрока i -го блока отсутствуют переходы в блоки с большими номерами, $i = 1, \dots, k$.

Определение 3. Граф $(B, F; E(B), E(A); c)$, где $E(B)$ и $E(A)$ — ребра с началами в B и A соответственно, называется равновесным с ценой J , если найдется такая пара стационарных стратегий β и α , что в графе $(B, A; \beta, E(A); c)$ все простые циклы имеют стоимость, меньшую или равную J , а в графе $(B, A; E(B), \alpha; c)$ все простые циклы имеют стоимость, большую или равную J .

Здесь под стоимостью цикла понимают сумму максимального и минимального локальных платежей переходов по ребрам цикла.

Легко заметить, что если граф равновесный с ценой J , то имеются оптимальные стационарные стратегии, не зависящие от начальной вершины, и цена игры также не зависит от начальной вершины и равна J .

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма 1. Для любой игры $(B, A; E; c)$ найдется такое эргодическое разбиение вершин $V_1, \dots, V_k$ и такая возрастающая последовательность целых чисел $J_1, \dots, J_k$, что граф, порожденный вершинами V_i , является равновесным с ценой J_i , $i = 1, \dots, k$.

3. Доказательство теоремы

Вначале докажем следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого графа $(B, A; T; c)$ и любого целого J найдется такое эргодическое разбиение V_1, V_2 , $V_1 = B_1 \cup A_1$, $V_2 = B_2 \cup A_2$, (возможно, что одно из множеств V_1 или V_2 пусто), что

в графе $(V_1; \beta, E(A_1); c)$ все простые циклы имеют стоимость, меньшую J ; здесь β — некоторая стационарная стратегия первого игрока, $E(A_1)$ — множество ребер с началами в A_1 в графе, порожденном вершинами V_1 , здесь и далее под c понимается ограничение стоимостной функции на рассматриваемый подграф;

в графе $(V_2; E(B_2), \alpha; c)$ все простые циклы имеют стоимость, большую или равную J ; здесь α — некоторая стационарная стратегия второго игрока в графе, порожденном вершинами V_2 .

Таким образом, в графе $G(V_1)$ первый игрок обеспечивает платеж, меньший J , следуя стратегии β , а в графе $G(V_2)$ второй игрок обеспечивает платеж, не меньший J , следуя стратегии α . Далее $G(V')$ — подграф, порожденный вершинами V' .

Доказательство. Доказательство утверждения проведем индукцией по числу вершин в графе игры $(B, A; E; c)$. Положим $V = B \cup A$.

Для графов из двух вершин утверждение очевидно. Требуемое разбиение состоит из $V_1 = V$, $V_2 = \emptyset$, если $2c(v_1v_2) < J$, и $V_1 = \emptyset$, $V_2 = V$, если $2c(v_1v_2) \geq J$.

Пусть утверждение доказано для графов с не более, чем n вершинами, $n \geq 2$. Докажем его для графа $(B, A; E; c)$ с $n + 1$ вершиной и произвольного числа J . Пусть в графе максимальный и минимальный локальные платежи равны M и m , т.е.

$$M = \max_{(vw) \in E} c(vw),$$

$$m = \min_{(vw) \in E} c(vw).$$

Возможны две ситуации: $M + m \geq J$ и $M + m < J$.

Пусть $M + m \geq J$. Выберем такую вершину $v \in A$, что существует ребро (vw) , для которого $c(vw) = M$. Такая вершина существует в силу симметричности графа и платежной функции. Для v рассмотрим гамак

$$\Gamma(v) = \{v_1 : E(v_1) = \{v_1 v\}\},$$

т.е. множество таких вершин, для которых единственное исходящее из каждой из них ребро ведет в вершину v . Теперь удалим из графа множество $v \cup \Gamma(v)$ и все ребра с началами или концами в этом множестве. Ясно, что для полученного графа $G' = (B', A'; E', c)$ доли равны

$$B' = B - \Gamma(v), \quad A' = A - v.$$

Полученный граф либо пуст и тогда очевидно, что утверждение для множества $v \cup \Gamma(v)$ справедливо. В противном случае G' обладает требуемыми свойствами, он симметричен, не имеет тупиков и число его вершин меньше, чем $n + 1$. Поэтому по предположению индукции найдется такое эргодическое разбиение вершин V'_1, V'_2 , где $V'_1 = B'_1 \cup A'_1$, $V'_2 = B'_2 \cup A'_2$, что

(1) в графе $(V'_1; \beta_1, E(A'_1); c)$ все простые циклы имеют стоимость, меньшую J ;

(2) в графе $(V'_2; E(B'_2), \alpha_2; c)$ все простые циклы имеют стоимость, не меньшую J .

Пусть $V'_1 = \emptyset$. В этом случае $V'_2 = V'$ и в графе $(V'; E(B'), \alpha_2; c)$ все простые циклы имеют стоимость, не меньшую J . Поэтому в графе $(V; E(B), \alpha_2 \cup (vw); c)$ все простые циклы также имеют стоимость, не меньшую J , так как любой цикл в этом графе либо проходит только по вершинам V' и тогда его стоимость не меньше J в силу предыдущего рассуждения, либо цикл проходит через вершину v и тогда его стоимость не меньше J , так как $M + m \geq J$.

Пусть $V'_1 \neq \emptyset$. Рассмотрим максимальный локальный платеж $M(v)$ на ребрах с началами в вершине v и концами в $\Gamma(v)$. Пусть $v_1 \in \Gamma(v)$ и $c(vv_1) = M(v)$.

Если $2M(v) \geq J$, то разбиение $V'_1, V'_2 \cup v \cup \Gamma(v)$ — требуемое эргодическое разбиение, так как в $(V'_1; \beta_1, E(A'_1); c)$ все простые циклы имеют стоимость, меньшую J по первому предположению индукции, а в $(V'_2 \cup v \cup \Gamma(v); E(B'_2) \cup E(\Gamma(v)), \alpha_2 \cup (vv_1); c)$, где $E(B'_2)$ — множество всех ребер с началами в B'_2 , все циклы имеют стоимость, не меньшую J , так как это либо старые циклы и их стоимость не меньше J по первому предположению индукции, либо это цикл vv_1v , который тоже имеет стоимость, не меньшую J .

Пусть теперь $2M(v) < J$. Если нет ребер $(vv_2) \in T$, где $v_2 \in V'_2$, то разбиение $V'_1 \cup v \cup \Gamma(v), V'_2$ — требуемое эргодическое разбиение, так как в графе $(V'_1 \cup v \cup \Gamma(v); \beta_1 \cup E(\Gamma(v)), E(A'_1) \cup E(v); c)$ все циклы имеют стоимость, меньшую J , поскольку это либо старые циклы и их стоимость меньше J по первому предположению индукции, либо это цикл vv_2v , $v_2 \in \Gamma(v)$, и его стоимость меньше J .

Если найдется ребро (vv_2) , где $v_2 \in V'_2$, то рассмотрим подграф, порожденный множеством $V'' = V'_2 \cup v \cup \Gamma(v)$. Ясно, что $|V''| < n + 1$, так как V'_1 не пусто, и граф симметричен и не имеет тупиков. Поэтому по предположению индукции найдется такое эргодическое разбиение вершин V''_1, V''_2 , что в графе $(V''_1; \beta^1, E(A''_1); c)$ все циклы имеют стоимость, меньшую J , а в графе $(V''_2; E(B''_2), \alpha^2; c)$ стоимости всех циклов не меньше J . Здесь

$$V''_1 = A'_1 \cup B''_1, \quad V''_2 = A''_2 \cup B''_2,$$

β^1 и α^2 — некоторые стационарные стратегии игроков в графах $G(V''_1)$ и $G(V''_2)$. Тогда $V'_1 \cup V''_1, V''_2$ — требуемое эргодическое разбиение, так как в графе

$$(V'_1 \cup V''_1; \beta_1 \cup \beta^1; E(A'_1) \cup E(A''_1); c)$$

все циклы либо проходят только по вершинам V''_1 , либо только по вершинам V'_1 и поэтому их стоимости меньше J , а в графе $(V''_2; E(B''_2); \alpha^2; c)$ все циклы имеют стоимость, не меньшую J . Таким образом, предположение индукции при $m + M \geq J$ полностью доказано. Случай $m + M < J$ путем изменения знака платежной функции с нетрудно свести к предыдущему.

Докажем теперь лемму. При $J = 2m$ эргодическое разбиение из предложения 1 имеет вид V_1, V_2 , где $V_1 = \emptyset$. При $J = 2M + 1$ эргодическое разбиение из предложения 1 имеет вид V_1, V_2 , где $V_2 = \emptyset$. Рассмотрим наименьшее значение $J = J_1$, при котором эргодическое разбиение из предложения 1 имеет вид V_1, V'_1 , где V_1 непусто. Тогда, если взять значение $J = J_1 - 1$, то разбиение состоит из всего V и найдется такая стратегия α второго игрока, что в графе $(V; E(B), \alpha; c)$ все циклы имеют стоимость, не меньшую J . Возьмем ограничение α_1 стратегии α на подграф $G(V_1)$. Тогда граф $(V_1; E(B_1), \alpha_1; c)$ содержит только циклы не меньшей стоимости, чем J , а граф $(V_1; \beta_1, E(A_1); c)$ содержит только циклы меньшей стоимости, чем J . Поэтому подграф $G(V_1)$ равновесный и имеет цену $J_1 - 1$. Далее, если $V'_2 = \emptyset$, то лемма доказана. В противном случае в подграфе $G(V'_2)$ есть такая стратегия α_2 второго игрока, что граф $(V'_2; E(B_2), \alpha_2; c)$ содержит только циклы, стоимость которых не меньше J . Поэтому наименьшее значение $J = J_2$, при котором в графе $G(V'_2)$ разбиение V_2, V'_3 , где $V_2 \neq \emptyset$, является эргодическим, удовлетворяет неравенству $J_2 > J_1$. Проводя аналогичные рассуждения, показываем, что граф, порожденный вершинами V_2 , является равновесным с ценой $J_2 - 1$ и $J_2 - 1 > J_1 - 1$. Далее рассуждаем аналогично относительно подграфа $G(V'_3)$ и так далее, до тех пор пока не приходим к эргодическому разбиению V_k, V'_{k+1} , где $V_{k+1} = \emptyset$. Тогда эргодическое разбиение $V_1, V_2, \dots, V_k$ и последовательность целых чисел $J_1 - 1, J_2 - 1, \dots, J_k - 1$ удовлетворяют требованиям леммы.

Доказательство теоремы 1 теперь не представляет труда. Возьмем эргодическое разбиение $V_1, \dots, V_k$ и последовательность целых чисел $J_1, \dots, J_k$, существование которых утверждается в лемме. Так как каждый граф $G(V_i)$ является равновесным с ценой J_i , найдутся пары оптимальных стационарных стратегий β_i, α_i в каждом графе $G(V_i)$, дающие игрокам платеж J_i , $i = 1, \dots, k$, а так как разбиение вершин эргодическое и последовательность $J_1, \dots, J_k$ возрастающая, пара стационарных стратегий $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_k$ и $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$ является парой оптимальных равномерных стратегий, дающей каждому из игроков платеж не хуже J_i , если игра начинается в i -м блоке, $i = 1, \dots, k$.

Список литературы

1. Gillette D., Stochastic games with zero stop probabilities. *Ann. Math. Stud.* (1957) **39**, 179–187.
2. Гурвич В. А., Карзанов А. В., Хачиян Л. Г., Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах. *Журнал выч. матем. и матем. физики* (1988) **9**, №9, 1407–1417.
3. Kazakov A. V., Lebedev V. N., Cyclic games with prohibitions. *Math. Programming* (1993) **60**, №3, 351–360.

Статья поступила 13.10.1994.