Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. К. Форманов, О методе Стейна–Тихомирова и его приложениях в неклассических предельных теоремах, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 27–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:38:43

О методе Стейна–Тихомирова и его приложениях в неклассических предельных теоремах

© 2007 г. Ш. К. Форманов

В работе приведены необходимые и достаточные условия справедливости центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин в терминах характеристических функций в неклассической постановке, когда допускается существенный вклад отдельных слагаемых в сумму. Эти условия сформулированы с использованием введенного в статье оператора Стейна–Тихомирова.

Статья написана на основе доклада, прочитанного на VI международной Петрозаводской конференции “Вероятностные методы в дискретной математике”, состоявшейся в Петрозаводске в 2004 году.

1. Модифицированный вариант метода Стейна–Тихомирова

В теории суммирования независимых и слабо зависимых случайных величин все большую популярность приобретает метод Стейна, основы которого изложены, например, в [1, 2]. Суть этого метода заключается в следующем: пусть требуется доказать предельную теорему о том, что последовательность функций распределений $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$. Для этого предварительно изучается задача о характеристизации распределения путем аннулирования некоторого соотношения для функции распределения $F(x)$. После этого доказывается, что это утверждение имеет место для функции распределения F_n в асимптотическом смысле (при больших n). Например, в случае центральной предельной теоремы важную роль играет следующее предложение.

Лемма 1 ([2]). Пусть $F(x)$ — функция распределения, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1.$$

Тогда для того чтобы

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dF(x)$$

для любой кусочно непрерывно дифференцируемой функции g такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)| e^{-x^2/2} dx < \infty. \quad (1)$$

Применение метода Стейна сопряжено со следующим дифференциальным уравнением (см. [1, 2]):

$$y'(u) - uy(u) = h(u) - Nh, \quad (2)$$

где $h(u)$ — ограниченная борелевская функция на прямой и функционал

$$Nh = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-x^2/2} dx.$$

Для конкретных применений метода Стейна следует решить уравнение (2) в классе кусочно непрерывно дифференцируемых функций g , для которых выполняется условие (1). В первоначальной работе Ч. Стейна [1] в качестве функции h рассмотрена индикаторная функция

$$h(u) = h_x(u) = I_{(-\infty, x)}(u), \quad x \in \mathbf{R}.$$

В этом случае непосредственно можно убедиться в том, что

$$y(u) = y_x(u) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{u^2/2} \Phi(u)(1 - \Phi(x)) & \text{при } u \leq x, \\ \sqrt{2\pi} e^{u^2/2} (1 - \Phi(u)) \Phi(x) & \text{при } u > x. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть ξ — произвольная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Положив в (2) $u = \xi$ и взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, получаем, что

$$F(x) - \Phi(x) = \mathbf{E} y'_x(\xi) - \mathbf{E} \xi y_x(\xi)$$

(при этом следует учитывать равенство $\Phi(x) = Nh_x$).

Таким образом, оценка отклонения $F(x)$ от $\Phi(x)$ сводится к оценке величины (характеристики нормальности)

$$\sup_x |\mathbf{E} y'_x(\xi) - \mathbf{E} \xi y_x(\xi)|, \quad (4)$$

где y_x определяется равенством (3). Последнее согласуется с леммой 1, и при этом можно убедиться в том, что $Ny_x < \infty$ для любого $x \in \mathbf{R}$ (см. лемму 2 в [2]). Из сказанного и леммы 1 получаем удобный вариант доказательства центральной предельной теоремы: если дана последовательность случайных величин $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} |g'(w_n) - w_n g(w_n)| = 0, \quad (5)$$

то распределение случайных величин w_n асимптотически нормально.

В цитированной работе [1] Ч. Стейн высказал мнение о том, что его метод не имеет никакого отношения к известному методу характеристических функций. Но А. Н. Тихомиров [3] на примере оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме показал, что именно сочетание методов Стейна и характеристических функций может играть важную роль в теории суммирования слабо зависимых случайных величин. В последующем

приемы доказательств центральной предельной теоремы и оценки остаточного члена в этой теореме, использующие идеи работ [1, 3], в собирательном смысле стали называться методом Стейна–Тихомирова. В работе [4] автора был предложен модифицированный (по отношению к ранее используемым) вариант метода Стейна–Тихомирова, который основывается на следующем характеристическом свойстве нормального распределения в терминах характеристических функций.

Лемма 2. Для того чтобы случайная величина w с $\mathbf{E}w = 0$, $\mathbf{E}w^2 = \sigma^2$ имела нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2)$ необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическая функция удовлетворяла равенству

$$f'(t) = -\sigma^2 t f(t). \quad (6)$$

Если рассмотреть равенство (6) как дифференциальное уравнение с начальным условием $f(0) = 1$, то утверждение леммы 2 становится очевидным.

Теперь, основываясь на равенстве (6), в классе характеристических функций

$$\mathbf{F}_N = \{f(t): f'(0) = 0, f''(0) = -\sigma^2 > -\infty\}$$

введем оператор Стейна–Тихомирова

$$\Delta(f(t)) = f'(t) + \sigma^2 t f(t). \quad (7)$$

Последнее равенство (7) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с правой частью $\Delta(f(t))$ и с начальным условием $f(0) = 1$. Из его решения (см., например, стр. 28 в [5]) получаем, что

$$f(t) - e^{-\sigma^2 t^2/2} = e^{-\sigma^2 t^2/2} \int_0^t \Delta(f(s)) e^{\sigma^2 s^2/2} ds. \quad (8)$$

Здесь знаки переменной интегрирования s и величины t совпадают, причем $|s| \leq |t|$. Из равенств (6) и (8) также следует, что равенство

$$\Delta(f(t)) = 0 \quad (9)$$

полностью характеризует характеристическую функцию нормального распределения с параметрами $(0, \sigma^2)$. В свою очередь, из леммы 2 и равенства (9) вытекает, что если для любого $t \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathbf{E}e^{itw_n}) = 0, \quad (10)$$

то распределение случайной величины w_n асимптотически нормально.

Метод доказательства центральной предельной теоремы, основанный на предельном соотношении (10), может быть рассмотрен как модифицированный вариант метода Стейна–Тихомирова, и во многих случаях проверка выполнения равенства (10) проще по сравнению с проверкой условия (5).

В приложениях к проблемам теории суммирования независимых случайных величин важную роль играет следующее свойство оператора Δ .

Лемма 3. Пусть характеристические функции $f, g \in \mathbf{F}_N$. Тогда

$$\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f). \quad (11)$$

то есть оператор по отношению к произведению характеристических функций представляет собой операцию дифференцирования.

Доказательство. Пусть характеристические функции $f, g \in \mathbf{F}_N$ и

$$\sigma_1^2 = -f''(0), \quad \sigma_2^2 = -g''(0).$$

Тогда по определению оператора Δ

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= (fg)' + t(-(fg)''|_{t=0})fg = f'g + g'f + t(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)fg \\ &= (f' + \sigma_1^2 t f)g + f(g' + \sigma_2^2 t g) = f\Delta(g) + g\Delta(f). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

2. Неклассические варианты центральной предельной теоремы в терминах характеристических функций

Основным объектом исследования теории суммирования независимых случайных величин, называемой также центральной предельной проблемой, являются последовательности сумм

$$S_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nk_n},$$

где $X_{n1}, X_{n2}, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, образующих схему серий (число слагаемых k_n может быть как конечным, так и бесконечным). При этом основной задачей является описание класса законов распределений, которые могут выступать в качестве предельных (в смысле слабой сходимости) для распределения суммы S_n . На этом пути и появляется ограничение, известное под названием условия равномерной бесконечной малости: при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_j \mathbf{P}(|X_{nj}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (12)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Необходимость появления условия (12) объясняется тем, что при его выполнении предельный закон становится нечувствительным к поведению отдельных слагаемых. Но при решении задач, связанных с отысканием условий сходимости распределения суммы S_n к заданному закону, введение ограничения типа условия равномерной бесконечной малости (12) не представляется обязательным (см. [6]). В качестве тривиального примера сходимости к заданному невырожденному распределению с нарушением условия (12) можно указать последовательность

$$\mathbf{P}(X_{n1} < x) = F_{n1} = F(x), \quad X_{nj} = 0, \quad j \geq 2.$$

Следуя В. М. Золотареву [6], предельные теоремы для распределения сумм S_n , доказанные без привлечения условия (12), называют неклассическими.

Далее будем предполагать, что

$$\mathbf{E}X_{nj} = 0, \quad \sigma_{nj}^2 = \mathbf{D}X_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \sum_j \sigma_{nj}^2 = 1. \quad (13)$$

В случае выполнения (13) условие (12) превращается в следующее условие: при $n \rightarrow \infty$

$$\max_j \sigma_{nj}^2 \rightarrow 0. \quad (14)$$

Как хорошо известно, в предельных теоремах теории вероятностей важную роль играет расстояние Леви, которое для функций распределения F и G определяется формулой

$$L(F, G) = \inf \{ \varepsilon > 0, G(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon, -\infty < x < \infty \}.$$

Особое значение этого расстояния заключается в том, что оно метризует слабую сходимость распределений. Дополнительно к введенным обозначениям положим

$$F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x), \quad F_{nj}(x) = \mathbf{P}(X_{nj} < x), \quad \Phi_{nj}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nj}}\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

В этих обозначениях утверждение центральной предельной теоремы равносильно тому, что при $n \rightarrow \infty$

$$L(F_n, \Phi) \rightarrow 0. \quad (15)$$

Первым неклассическим вариантом центральной предельной теоремы является следующая теорема, доказанная В. М. Золотаревым [6].

Теорема А. *Сходимость (15) имеет место тогда и только тогда, когда при неограниченном возрастании n оказываются выполненными следующие два условия:*

$$\alpha_n = \sup_j L(F_{nj}, \Phi_{nj}) \rightarrow 0; \quad (16)$$

при каждом положительном ε

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j \in A_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{nj} \rightarrow 0, \quad (17)$$

где множество A_n содержит те значения индексов j , для которых

$$\sigma_{nj}^2 \leq \sqrt{\alpha_n}. \quad (18)$$

Смысл условий (16)–(18) сводится к тому, что сначала в сумме S_n выделяются те слагаемые, которые удовлетворяют условию равномерной бесконечной малости (14), а потом для этих слагаемых требуется выполнение классического условия Линдеберга. С другой стороны, легко видеть, что если выполнено условие (14), то выполняется условие (16) ($\alpha_n \rightarrow 0$). Таким образом, теорема А представляет собой обобщение классической теоремы Линдеберга–Феллера.

В работе В. И. Ротаря [7] условия (16), (17) теоремы А заменяются одним другим условием.

Теорема В. *Пусть выполнено условие (13). При $n \rightarrow \infty$*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0 \quad (19)$$

тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_j \int_{|x| \geq \varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx \rightarrow 0. \quad (20)$$

Поскольку функция нормального распределения $\Phi(x)$ является непрерывной в любой точке, утверждение $L(F_n, \Phi) \rightarrow 0$ равносильно (19). Далее, условие (20) никак не связано с условием равномерной бесконечной малости (14), и поэтому теорема В является неклассическим вариантом центральной предельной теоремы.

Представляют особый интерес задачи о нахождении необходимых и достаточных условий для справедливости центральной предельной теоремы в неклассической ситуации в терминах характеристических функций. Следующие соображения могут служить обоснованием правомерности использования условий на характеристические функции в задачах, связанных с центральной предельной теоремой. Во-первых, характеристическая функция однозначно определяет распределение соответствующей случайной величины. Во-вторых, условия в терминах характеристических функций могут иметь более простой вид по сравнению с условиями, формулируемыми в терминах функций распределения.

Теорема 1. При условии (13)

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда при любом t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| = 0, \quad (21)$$

где $f_{nj}(t) = \mathbf{E}e^{itX_{nj}}$ — характеристическая функция случайной величины X_{nj} .

Доказательство. Доказательство достаточности совсем простое, в особенности, по сравнению с приводимыми во многих книгах доказательствами теоремы Линдеберга (см., например, §4 гл. 8 в [10]). Действительно, если положить

$$f_n(t) = \mathbf{E}e^{itS_n},$$

то для доказательства (19), согласно (10), достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta(f_n(t))| = 0. \quad (22)$$

В свою очередь, в силу леммы 3,

$$\Delta(f_n(t)) = \sum_j \prod_{k \leq j-1} f_{nk}(t) \Delta(f_{nj}(t)) \prod_{k \geq j+1} f_{nk}(t).$$

Следовательно,

$$|\Delta(f_n(t))| \leq \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))|. \quad (23)$$

Теперь соотношения (21)–(23) доказывают достаточность условия теоремы 1.

Докажем необходимость условия (21).

Воспользовавшись равенством

$$\Delta(\varphi_{nj}(t)) = \Delta(e^{-\sigma_{nj}^2 t^2/2}) = 0,$$

справедливым при любом j , находим, что

$$\begin{aligned} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| &= \sum_j |\Delta(f_{nj}(t)) - \Delta(\varphi_{nj}(t))| \\ &= \sum_j |(f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)) + t\sigma_{nj}^2(f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t))| \leq \Sigma_{n1}(t) + \Sigma_{n2}(t), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_{n1} &= \sum_j |f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)|, \\ \Sigma_{n2} &= |t| \sum_j \sigma_{nj}^2 |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)|. \end{aligned}$$

Оценим сначала $\Sigma_{n2}(t)$. С учетом того, что

$$\mathbf{E}X_{nj} = 0, \quad \sigma_{nj}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\Phi_{nj},$$

проведя интегрирование по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{(itx)^2}{2} \right) d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} it(e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj} - \Phi_{nj}) dx \right| \leq I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= |t| \int_{|x| \leq \varepsilon} |e^{itx} - 1 - itx| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx, \\ I_2 &= |t| \int_{|x| > \varepsilon} |e^{itx} - 1 - itx| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством

$$|e^{itx} - 1 - itx| \leq \frac{t^2 x^2}{2},$$

находим, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{|t|^3}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^2 |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \leq \frac{|t|^3}{2} \varepsilon \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \\ &= \frac{|t|^3}{2} \varepsilon \left(\int_{-\varepsilon}^0 (-x) |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx + \int_0^{\varepsilon} x |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \right) \\ &\leq \frac{|t|^3}{2} \varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon} x(1 - F_{nj}(x) + F_{nj}(-x)) dx + \int_0^{\varepsilon} x(1 - \Phi_{nj}(x) + \Phi_{nj}(-x)) dx \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Непосредственно можно убедиться в том, что для функции распределения $F(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F(x) + F(-x)) dx. \quad (27)$$

Теперь из (26), (27) получаем, что

$$I_1 \leq \frac{|t|^3}{4} \varepsilon (\sigma_{nj}^2 + \sigma_{nj}^2) = \frac{|t|^3}{2} \varepsilon \sigma_{nj}^2. \quad (28)$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$|e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

находим, что

$$I_2 \leq 2|t|^2 \int_{|x|>\varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx. \quad (29)$$

Проведя суммирование по j в оценках (28) и (29), с учетом (25) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_j |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| &\leq \frac{|t|^3}{2} \varepsilon + 2t^2 \int_{|x|>\varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx \\ &= \frac{|t|^3}{2} \varepsilon + 2t^2 R_n(\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

Из теоремы В (см. (20)) и последнего соотношения (30), в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует, что при любом t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{n2}(t) = 0. \quad (31)$$

Займемся теперь оценкой $\Sigma_{n1}(t)$. Предварительно заметим, что

$$|f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(e^{itx} - 1 - itx) d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right|.$$

Произведя интегрирование по частям в интеграле под знаком модуля, получаем, что

$$|f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)| \leq I_3 + I_4, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} I_3 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj} - \Phi_{nj}) dx \right|, \\ I_4 &= |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(e^{itx} - 1)(F_{nj} - \Phi_{nj}) dx \right|. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{t^2}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx + \int_{|x| > \varepsilon} |e^{itx} - 1| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \\ &\quad + |t| \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \varepsilon \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx + 2|t| \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Из равенства (27) получаем, что

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \leq 2\sigma_{nj}^2. \quad (34)$$

С учетом соотношений (32)–(34) можно получить оценку

$$I_3 \leq t^2 \varepsilon \sigma_{nj}^2 + 2|t| \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx. \quad (35)$$

Далее, имея ввиду неравенство $|e^{itx} - 1| \leq 2$, получаем оценку

$$I_4 \leq t^2 \varepsilon \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx + 2|t| \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx.$$

В свою очередь, принимая во внимание (34), находим, что

$$I_4 \leq 2t^2 \varepsilon \sigma_{nj}^2 + 2|t| \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx. \quad (36)$$

Из соотношений (32), (35), (36) окончательно получаем, что

$$\sum_j |f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)| \leq \frac{5}{2} t^2 \varepsilon + 4|t| R_n(\varepsilon). \quad (37)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (37) следует, что при любом t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{n1}(t) = 0. \quad (38)$$

Необходимость условия (21) следует из соотношений (24), (31), (38). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Поскольку характеристические функции $f_{nj}(t)$ и $f'_{nj}(t)$ являются равномерно непрерывными на любом конечном отрезке, условие (21) теоремы 1 может быть записано в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| = 0$$

при любом $T > 0$.

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы 1, по части необходимости в нем существенную роль играет введенная Ротарем характеристика $R_n(\varepsilon)$ из теоремы В. Фактически здесь доказана справедливость импликации

$$\{R_n(\varepsilon) \rightarrow 0\} \implies (21).$$

В свою очередь, в работе [7] доказано, что условие (17) не сильнее совместного выполнения условий (16) и (17) из теоремы А. Таким образом, теоремы А и В, а также теорема 1 являются эквивалентными вариантами неклассической центральной предельной теоремы, обобщающими классическую теорему Линдберга–Феллера.

Следующая теорема является аналогом теоремы Золотарева в терминах характеристических функций.

Теорема 2. Для того чтобы при $n \rightarrow \infty$ имела место сходимость

$$L(F_n, \Phi) \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

- (1) $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,
- (2) для любого $t \in \mathbf{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{j \in A_n} |\Delta(f_{nj}(t))| \rightarrow 0,$$

где множество индексов A_n определяется равенством (18).

Достаточность условий 1 и 2 этой теоремы докажем, используя теорему 1, согласно которой нам достаточно показать, что при любом t при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| \rightarrow 0$$

(см. соотношение (21)).

Ясно, что

$$\sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| = \Sigma'_n(t) + \Sigma''_n(t), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma'_n(t) &= \sum_{j \in A_n} |\Delta(f_{nj}(t))|, \\ \Sigma''_n(t) &= \sum_{j \in \bar{A}_n} |\Delta(f_{nj}(t))|. \end{aligned}$$

Согласно условию 2 для любого t при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma'_n(t) = o(1). \quad (40)$$

Учитывая равенства $\Delta(\varphi_{nj}(t)) = 0$, $j = 1, 2, \dots$, находим, что

$$\Sigma''_n(t) = \sum_{j \in \bar{A}_n} |\Delta(f_{nj}(t))| \leq \Sigma'_{n1}(t) + \Sigma'_{n2}(t) \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma'_{n1}(t) &= \sum_{j \in \bar{A}_n} |f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)|, \\ \Sigma'_{n2}(t) &= |t| \sum_{j \in \bar{A}_n} \sigma_{nj}^2 |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)|. \end{aligned}$$

Для всех $j \in \bar{A}_n$ имеет место неравенство $\sigma_{nj}^2 \geq \sqrt{\alpha_n}$, поэтому (см. (13))

$$\sum_{j \in \bar{A}_n} \sigma_{nj}^2 \geq \sqrt{\alpha_n} \sum_{j \in \bar{A}_n} 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{j \in \bar{A}_n} 1 \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}. \quad (42)$$

Заметим, что в последнее время в области предельных теорем часто используется определяемая для пары функций распределения F, G и называемая l -м разностным моментом характеристика (см. [6])

$$v_l(F, G) = l \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{l-1} |F(x) - G(x)| dx.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$v_l(F, G) \leq \mathbf{E}|X|^l + \mathbf{E}|Y|^l,$$

где X и Y — случайные величины, имеющие соответственно функции распределения F и G , причем, если при этом $\mathbf{P}(Y = 0) = 1$, то последнее неравенство можно заменить на равенство. В [8] указано на связь разностного момента с известной метрикой Канторовича–Рубинштейна [9], а именно,

$$v_l(F, G) = \inf \mathbf{E}|X|^{l-1} - Y|Y|^{l-1}|,$$

где инфимум берется по всем совместным распределениям случайного вектора (X, Y) с маргинальными распределениями F и G .

Для любой функции распределения $F(x)$ положим

$$F^*(x) = 1 - F(x) + F(-x).$$

Тогда условие совпадения дисперсий для случайных величин с функциями распределения F и G (имеющих нулевые средние) может быть записано в виде

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} x F^*(x) dx = \int_0^{\infty} x G^*(x) dx. \quad (43)$$

В следующей лемме, доказанной в [7], приводится оценка характеристики

$$v(F, G) = \frac{v_2(F, G)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| |F(x) - G(x)| dx$$

через расстояние Леви $L(F, G)$.

Лемма 4. Пусть выполнено равенство (43). Тогда для любого $B > 0$

$$v(F, G) \leq 4 \left(\int_B^{\infty} x G^*(x) dx + B(B+1)L(F, G) \right). \quad (44)$$

Заметим, что для любой функции распределения $F(x)$

$$2 \int_{\varepsilon}^{\infty} x F^*(x) dx \leq \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF(x). \quad (45)$$

Положив в (44) $\bar{G}(x) = G(x\sigma)$, $B = A\sigma$, с учетом (45) для любого $A \geq 1$ получаем, что

$$v(F, G) \leq 4 \left(\int_{|x|>A} x^2 d\bar{G}(x) + A^2(\sigma^2 + \sigma)L(F, G) \right). \quad (46)$$

Теперь применим приведенные рассуждения к оценке $\Sigma''_{n1}(t)$. Предварительно при помощи оценки

$$|e^{i\alpha} - 1| \leq \min(|\alpha|, 2)$$

из равенства (32) получим, что

$$|f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)| \leq 4|t| \int_{-\infty}^{\infty} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx = 4|t| v(F_{nj}, \Phi_{nj}). \quad (47)$$

Воспользовавшись соотношениями (46), (47), получаем следующую цепочку оценок:

$$\begin{aligned} \Sigma''_{n1}(t) &\leq 4|t| \sum_{j \in \bar{A}_n} v(F_{nj}, \Phi_{nj}) \leq 16|t| \left(\sum_{j \in \bar{A}_n} \sigma_{nj}^2 \int_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + A^2 \sum_{j \in \bar{A}_n} (\sigma_{nj}^2 + \sigma_{nj}) \alpha_n \right) \\ &\leq 16|t| \int_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 16|t| A^2 \sum_{j \in \bar{A}_n} (\sigma_{nj}^2 + \alpha_n^{-1/4} \sigma_{nj}^2) \alpha_n \\ &\leq 16|t| \int_{|x|>A} x^2 d\Phi(x) + 16|t| A^2 (\alpha_n + \alpha_n^{3/4}) \end{aligned} \quad (48)$$

для любого $A > 1$.

При выводе последней оценки в (48) учтено неравенство (42) и то, что для $j \in \bar{A}_n$

$$\sigma_{nj} \leq \alpha_n^{-1/4} \sigma_{nj}^2.$$

Выбирая A достаточно большим и учитывая условия 1, из (48) получаем, что при $n \rightarrow \infty$ для любого t

$$\Sigma''_{n1}(t) = o(1). \quad (49)$$

Оценим теперь $\Sigma''_{n2}(t)$. Из соотношений (25), (28), (29) получаем, что

$$\begin{aligned} \Sigma''_{n2}(t) &\leq |t| \sum_{j \in \bar{A}_n} \sigma_{nj}^2 |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \leq |t|^4 \varepsilon \sum_{j \in \bar{A}_n} \sigma_{nj}^2 + 2|t|^3 \sum_{j \in \bar{A}_n} \int_{|x|>\varepsilon} |x| |F_{nj} - \Phi_{nj}| dx \\ &\leq |t|^4 \varepsilon + 2|t|^3 \sum_{j \in \bar{A}_n} v(F_{nj}, \Phi_{nj}). \end{aligned} \quad (50)$$

Последнее слагаемое в (50) оценено в соотношении (48), согласно которому при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{j \in \bar{A}_n} v(F_{nj}, \Phi_{nj}) = o(1). \quad (51)$$

Следовательно, в силу (50), (51), получаем, что для любого t при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma''_{n2}(t) = o(1). \quad (52)$$

Теперь из (41), (49), (52) следует, что

$$\Sigma_n''(t) = o(1), \quad (53)$$

и в силу (39), (40), (53) окончательно получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| \rightarrow 0 \quad (54)$$

при любом t . Теперь достаточность условий 1 и 2 теоремы 2 следует из соотношения (54) и теоремы 1.

Доказательство необходимости условия 1 ($\alpha_n \rightarrow 0$) получено В. М. Золотаревым (см. [6]), а необходимость условия 2 очевидна в силу теоремы 1.

Замечание 3. Хорошо известно, что условие $\sup_j L(F_{nj}, \Phi_{nj}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равносильно тому, что для любого t при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_j |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \rightarrow 0. \quad (55)$$

В силу равномерной непрерывности характеристической функции последнее эквивалентно утверждению о том, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_j \sup_{|t| \leq T} |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \rightarrow 0 \quad (56)$$

для любого $T > 0$. Следовательно, условие 1 в теореме 2 может быть заменено одним из условий (55), (56).

Список литературы

1. Stein C., A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In: *Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.* v.2. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972, pp. 583–602.
2. Stein C., *Approximation, computation of expectations*. Inst. Math. Statist., Hayward, Calif., 1986.
3. Тихомиров А. Н., О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависящих величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1980) **25**, №4, 800–818.
4. Форманов Ш. К., Метод Стейна–Тихомирова и неклассическая центральная предельная теорема. *Доклады РАН* (2001) **376**, №4, 458–460.
5. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Наука, Москва, 1970.
6. Золотарев В. М., *Современная теория суммирования независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1986.
7. Ротарь В. И., К обобщению теоремы Линдеберга–Феллера. *Матем. заметки* (1975) **18**, №1, 129–135.
8. Кирьянова Л. В., Ротарь В. И., Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингалов. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №, 301–312.
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*. Наука, Москва, 1977.

Статья поступила 12.05.2006.