Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Д. Блайвас, Функция Шеннона сложности интервального поиска на булевом кубе в классе деревьев, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 111–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm50>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:28:13

Функция Шеннона сложности интервального поиска на булевом кубе в классе деревьев

© 2006 г. Т. Д. Блайвас

Для задачи интервального поиска на булевом кубе исследуется поведение функции Шеннона сложности в классе древовидных схем, называемых информационными деревьями. Показано, что для баз данных, чья мощность совпадает по порядку с мощностью булева куба, функция Шеннона по порядку равна оптимальной сложности в классе сбалансированных древовидных схем. Для баз данных с мощностью, меньшей по порядку, чем мощность булева куба, найдена асимптотика логарифма функции Шеннона.

1. Введение

В работе исследуется следующая задача информационного поиска, называемая задачей интервального поиска на булевом кубе. Имеется некоторое подмножество V n -мерного булева куба B_2^n , называемое библиотекой. На булевом кубе берется произвольный интервал (u, w) , где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ и $u \leq w$, то есть $u_i \leq w_i$ $i = 1, \dots, n$. Требуется определить все элементы $y \in V$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, называемые записями, такие, что $u \leq y \leq w$.

Задача интервального поиска на булевом кубе соответствует поиску по маске. Те компоненты с номером i , для которых $u_i = w_i$, задают маску, и в этих компонентах значения y искомым объектам должны совпадать с маской, то есть $y_i = u_i = w_i$. А для тех i , для которых $0 = u_i \neq w_i = 1$, компонента y_i может принимать произвольное значение из $\{0, 1\}$.

Задачу можно решить, если на каждом шаге алгоритма проверять условие $u_j \leq y_j \leq w_j$ для некоторого фиксированного индекса $j \in \{1, \dots, n\}$. Произвольный алгоритм поиска такого рода можно представить в виде так называемого информационного дерева. Сложность информационного дерева вводится так же, как в [1], и соответствует среднему времени работы соответствующих алгоритмов.

В классе всех деревьев исследовалось поведение функции Шеннона сложности для задачи интервального поиска на булевом кубе. Верхние оценки достигаются в классе сбалансированных деревьев. При $k \geq 2^{n-1}$ получено точное значение функции Шеннона. При $k \asymp 2^n$ получены оценки, которые задают порядок функции Шеннона и показывают, что при данных ограничениях на размер библиотеки значение функции Шеннона по порядку совпадает со сложностью сбалансированных деревьев $k^{\log_2 4/3}$ (см. [1]). При $\log_2 \log_2 n = \bar{o}(\log_2 k)$ найдена асимптотика логарифма функции Шеннона, равная $\log_2(4/3) \log_2 k$.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [2], но поскольку в данной работе рассматриваются только древовидные схемы, здесь будет приведена несколько упрощенная версия понятия информационного графа.

Если X — множество символов запросов с заданным на нем вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X , $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ , Y — множество символов данных (записей), ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска, то пятерка $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$ называется типом. Тройка $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y , называемое библиотекой, называется задачей информационного поиска (ЗИП) типа S . Содержательно ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей $y \in V$, для которых $x \rho y$. Если $\mathcal{F}$ — множество символов одноместных предикатов, определенных на X , то $\mathcal{F}$ называется базовым множеством и описывает множество элементарных операций, используемых при решении задачи информационного поиска.

Над базовым множеством $\mathcal{F}$ определим понятие информационного графа (ИГ). В конечной многополюсной ориентированной сети выбирается вершина (полк), называемая корнем. Остальные полюсы называются листьями и им приписываются записи из Y . Ребрам ИГ приписываются предикаты из множества $\mathcal{F}$. Таким образом нагруженную многополюсную ориентированную сеть называют информационным графом над базовым множеством $\mathcal{F}$. Затем определяется функционирование ИГ. Предикатное ребро проводит запрос $x \in X$, если предикат ребра истинен на x ; ориентированная цепочка ребер проводит x , если каждое ребро цепочки проводит x ; запрос x проходит в вершину β ИГ, если существует ориентированная цепь, ведущая из корня в вершину β , которая проводит x ; запись y , приписанная листу α , попадает в ответ ИГ на x , если x проходит в лист α . Ответом ИГ U на запрос x называют множество записей, попавших в ответ U на x , и обозначают его $\mathcal{F}_U(x)$. Эту функцию $\mathcal{F}_U(x)$ считают результатом функционирования ИГ U .

ИГ U решает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если $\mathcal{F}_U(x) = \{y \in V : x \rho y\}$.

Вводится сложность ИГ. Предикат $\varphi_\beta(x)$, истинный на x , если x проходит в вершину β , и ложный в противном случае, называется функцией фильтра вершины β . Сложностью ИГ U на запросе $x \in X$ называется число

$$T(U, x) = \sum_{\beta \in \mathcal{R}} \psi_\beta \varphi_\beta(x),$$

где $\mathcal{R}$ — множество вершин ИГ U , ψ_β — число ребер, исходящих из вершины β . Эта величина равна числу функций, вычисленных алгоритмом поиска, определяемым ИГ U , на запросе x .

Если каждая функция из $\mathcal{F}$ измерима (относительно алгебры σ), то для любого ИГ U над $\mathcal{F}$ функция $T(U, x)$ измерима.

Сложностью ИГ U называется математическое ожидание величины $T(U, x)$, равное $T(U) = \mathbf{M}_x T(U, x)$. Она характеризует среднее время поиска. Если f — предикат на множестве X , то $N_f(x) = \{x \in X : f(x) = 1\}$.

Легко показать, что

$$T(U) = \sum_{\beta \in U} \psi_\beta \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}(x)). \quad (1)$$

Число $\mathbf{P}(N_{\varphi\beta}(x))$ назовем сложностью ребра, исходящего из вершины β . Согласно (1), сложность ИГ равна сумме сложностей ребер.

Рассмотрим следующую ЗИП. Имеется некоторое k -элементное подмножество n -мерного булева куба $V \in B_2^n$ (библиотека). На булевом кубе задан некоторый интервал (u, w) , где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, и $u \leq w$, то есть $u_i \leq w_i$, $i = 1, \dots, n$. Требуется определить все элементы $y \in V$, удовлетворяющие условию $u \leq y \leq w$.

Очевидно, что если $u_i = 1$ для некоторого i , то и $w_i = 1$, а следовательно, и $y_i = 1$. Аналогично, если $w_i = 0$, то и $y_i = 0$. Таким образом, вышеописанная ЗИП сводится к следующей: есть библиотека $V \in B_2^n$, $|V| = k$, берем запрос $x = (x_1, \dots, x_n)$ — трехзначный вектор, компоненты которого могут быть равны либо 1, либо 0, либо 2: если $u_i = 1$, то $x_i = 1$, если $w_i = 0$, то $x_i = 0$, в противном случае $x_i = 2$. Для данного запроса $x = (x_1, \dots, x_n)$ нужно найти все $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, для которых $y_i = x_i$, если $x_i = 1$ или $x_i = 0$, и y_i — любое из $\{0, 1\}$, если $x_i = 2$.

Получаем тип задач $S_n = \langle B_3^n, B_2^n, \rho, \sigma, P \rangle$, где $B_3^n = \{0, 1, 2\}^n$ и $B_2^n = \{0, 1\}^n$ — трехзначный и двухзначный (булев) кубы, соответственно, σ — множество подмножеств B_3^n , $\rho: x \rho y \iff (x_i = y_i) \vee (x_i = 2)$, и $\mathbf{P}$ — равномерная вероятностная мера на B_3^n , то есть $\mathbf{P}(x) = 3^{-n}$ для любого $x \in B_3^n$.

Множество задач $I = \langle B_3^n, V, \rho \rangle$ типа S_n , где $|V| = k$, обозначим через $\mathcal{I}(n, k)$.

Пусть $x \in \{0, 1, 2\}$ и $y \in \{0, 1\}$. Определим функцию x^y , полагая

$$x^y = \begin{cases} x, & \text{если } (y = 1) \& (x \neq 2), \\ \bar{x}, & \text{если } (y = 0) \& (x \neq 2), \\ 1, & \text{если } x = 2, \end{cases}$$

причем $\bar{x}$ понимается здесь как булево отрицание.

Вершину со степенью полуисхода, равной нулю, назовем висячей вершиной. Информационным деревом (ИД) назовем ИГ без циклов, множество листьев которого совпадает с множеством висячих вершин и все ребра которого ориентированы от корня к листьям. Высотой ИД назовем длину максимального пути из корня в лист.

Будем рассматривать базис переменных $\mathcal{F} = \{x_i^{s_i} \mid s_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$. Через $\mathcal{D}_I$ обозначим всевозможные информационные деревья над базисом $\mathcal{F}$, решающие ЗИП $I \in \mathcal{I}(n, k)$. Введем обозначение $T(I) = \min_{D \in \mathcal{D}_I} T(D)$. Функцией Шеннона сложности в классе древовидных схем над базисом переменных назовем число

$$L(n, k) = \max_{I \in \mathcal{I}(n, k)} T(I).$$

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, тогда

$$(1) \text{ если } k \geq 2^{n-1}, \text{ то } L(n, k) = 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 6,$$

$$(2) \text{ если } k \asymp 2^n, \text{ то } L(n, k) \asymp k^{\log_2(4/3)},$$

$$(3) \text{ если } \log_2 \log_2 n = \bar{o}(\log_2 k), \text{ то } \log_2 L(n, k) \sim \log_2(4/3) \log_2 k.$$

3. Верхняя оценка

Скажем, что вершина дерева находится на ярусе с номером i , если длина пути от корня до этой вершины равна i . Будем говорить, что ребро находится на ярусе с номером i , если оно исходит из вершины яруса с номером $i - 1$.

Пусть $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in S_n$ — некоторая перестановка, действующая на множестве, состоящем из первых n натуральных чисел. Сбалансированным деревом с характеристикой m , соответствующим перестановке σ , будем называть такое дерево, что из каждой вершины яруса с номером $p \leq m$ выходит точно два ребра. Для каждой вершины яруса с номером p , меньшим m , ребрам, исходящим из этой вершины, приписаны переменные $x_{i_p}^0$ и $x_{i_p}^1$. Из некоторых вершин яруса с номером $m+1$ исходит не более 2^{n-m} цепочек ребер, причем функции проводимости этих цепочек различны для каждой пары цепочек ребер, исходящих из одной вершины, и имеют вид $x_{i_{m+1}}^{\sigma_1} \& \dots \& x_{i_n}^{\sigma_{n-m}}$, где $\sigma_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, n-m$.

Замечание 1. Очевидно, что для любой ЗИП $I \in \mathcal{F}(n, k)$ существуют сбалансированные деревья, решающие ЗИП I .

Лемма 1. Пусть D — сбалансированное дерево высоты n с k концевыми цепочками и характеристикой $\lfloor \log_2 k \rfloor$. Тогда

$$T(D) = 6 \left(\frac{4}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} + 3k \left(\frac{2}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Доказательство. Для каждого номера яруса $i \in \{1, \dots, \lfloor \log_2 k \rfloor\}$ дерево D имеет 2^i ребер, а для каждого $i \in \{\lfloor \log_2 k \rfloor + 1, \dots, n\}$ — k ребер. Вероятность попасть в концевую вершину ребра яруса с номером $i \in \{1, \dots, n\}$ равна $(2/3)^i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} T(D) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 k \rfloor} \left(\frac{2}{3} \right)^{i-1} 2^i + \sum_{i=\lfloor \log_2 k \rfloor + 1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^{i-1} k \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 k \rfloor} \left(\frac{4}{3} \right)^{i-1} + k \left(\frac{2}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} \sum_{i=1}^{n-\lfloor \log_2 k \rfloor} \left(\frac{2}{3} \right)^{i-1} \\ &= 6 \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - 1 \right) + 3k \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \\ &= 6 \left(\frac{4}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} + 3k \left(\frac{2}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим функцию

$$A(a) = 2a^{\log_2(4/3)} + a^{\log_2(2/3)}.$$

Лемма 2. Справедливы равенства

$$\max_{a \in [1/2; 1]} A(a) = A(1/2) = A(1) = 3.$$

Доказательство. Исследуем функцию

$$A(a) = 2a^{\log_2(4/3)} + a^{\log_2(2/3)}.$$

Ясно, что

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = 3, \quad A(1) = 2 + 1 = 3.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} A'(a) &= 2 \log_2(4/3) a^{\log_2(2/3)} + \log_2(2/3) a^{\log_2(1/3)}, \\ A'(\hat{a}) = 0 &\iff \hat{a}^{\log_2(1/3)} (2 \log_2(4/3) \hat{a} + \log_2(2/3)) \iff \hat{a} = \frac{1}{2} \log_{4/3}(3/2), \\ A(\hat{a}) &= (\hat{a})^{\log_2(2/3)} (2\hat{a} + 1) = (3/2) \left(\log_{4/3} \frac{3}{2} \right)^{\log_2(3/2)} \log_{4/3} 2 \approx 2,956. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $A(a)$ принимает максимальное значение, равное 3, на границах отрезка $[1/2, 1]$.

Лемма 3. Пусть $I \in \mathcal{I}(n, k)$, D — сбалансированное дерево высоты n с k концевыми вершинами и характеристикой $\lfloor \log_2 k \rfloor$. Тогда

$$T(D) \leq 9k^{\log_2(4/3)} - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n - 6.$$

Доказательство. Пусть сбалансированное дерево D имеет характеристику $\lfloor \log_2 k \rfloor$. В силу леммы 1

$$T(D) = 6 \left(\frac{4}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} + 3k \left(\frac{2}{3} \right)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Пусть $\lfloor \log_2 k \rfloor = \log_2(ak)$, $a \in [1/2, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} T(D) &= 6 \left(\frac{4}{3} \right)^h + 3k \left(\frac{2}{3} \right)^h - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= 6(ak)^{\log_2(4/3)} + 3k(ak)^{\log_2(2/3)} - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= 3k^{\log_2(4/3)} (2a^{\log_2(4/3)} + a^{\log_2(2/3)}) - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n, \end{aligned}$$

то есть

$$T(D) = 3A(a)k^{2-\log_2 3} - 6 - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Из леммы 2 следует, что

$$T(D) \leq 9k^{\log_2(4/3)} - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^n - 6.$$

Следствие 1. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} L(n, k) &\leq 6(4/3)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} + 3k(2/3)^{\lfloor \log_2 k \rfloor} - 6 - 3k(2/3)^n, \\ L(n, k) &< 9k^{\log_2(3/4)}. \end{aligned}$$

4. Нижняя оценка

Лемма 4. При $k \geq 2^{n-1}$ существует такая библиотека $V_{n,k} \subseteq B_2^n$, $|V_{n,k}| = k$, что в любом подкубе размерности $i \geq 1$, находится не менее 2^{i-1} и не более 2^i записей из библиотеки.

Доказательство. Библиотеку $V_{n,2^{n-1}}$ строим следующим образом. B_2^n содержит в точности 2^{n-1} записей с четным числом единиц. Пусть библиотека $V_{n,2^{n-1}}$ состоит из всех таких записей. В каждом подкубе размерности 1 находится точно один элемент с четным числом единиц. Следовательно, так как каждый подкуб B_i размерности i содержит 2^{i-1} подкубов размерности 1, в подкубе B_i находится точно 2^{i-1} записей из библиотеки. Библиотеку $V_{n,k}$, $k > 2^{n-1}$, получим, если добавим к записям библиотеки $V_{n,2^{n-1}}$ произвольные $k - 2^{n-1}$ различных записей, не содержащихся в $V_{n,2^{n-1}}$. Очевидно, что в каждом подкубе размерности $i \geq 1$, содержатся записи из $V_{n,k}$, причем их не менее 2^{i-1} и не более 2^i .

Лемма 5. При $k \geq 2^{n-1}$

$$L(n, k) \geq 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 6.$$

Доказательство. Возьмем библиотеку $V_{n,k}$, построенную, как в лемме 4. Пусть дерево D решает задачу $I = \langle B_2^n, V_{n,k}, \rho \rangle$ над базисом переменных. В дереве D каждая цепочка длины $s \leq n-1$, выходящая из корня, определяет в кубе B_2^n некоторый подкуб размерности $n-s$. А именно, если цепочке s приписана суммарная конъюнкция $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \& \dots \& x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}$, то к конечной вершине цепочки из корня проходит каждый запрос $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которого $x_{i_j} = \sigma_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$; напротив, если для запроса $x = (x_1, \dots, x_n)$ существует $j \in \{1, \dots, s\}$, для которого $x_{i_j} \neq 2$ и $x_{i_j} \neq \sigma_{i_j}$, то запрос x не проходит в конечную вершину цепочки s .

Таким образом, каждая конечная вершина яруса с номером i проводит запрос к записям из подкуба, размерность которого $n-i$. Если к ярусу вершин с номером $i \leq n-1$ ведут менее чем 2^i цепочек, то число всех записей из $V_{n,2^{n-1}} \subseteq V_{n,k}$, к которым потенциально может пройти запрос, менее чем $2^i \cdot 2^{n-i-1} = 2^{n-1}$, что противоречит допустимости ИД D . Следовательно, на всех ярусах с номерами $i = 1, \dots, n-1$ в решающем дереве D находится не менее 2^i ребер. На последнем ярусе в решающем дереве не могут находиться менее k ребер. Обозначим через E_i число ребер на ярусе с номером i . Тогда

$$\begin{aligned} T(D) &= \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \geq 2 + \frac{2}{3}2^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} 2^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} k \\ &= 2 \left(1 + \frac{4}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} k = 6 \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L(n, k) \geq 6(4/3)^{n-1} + k(2/3)^{n-1} - 6.$$

Лемма 6. Для любых натуральных n, k , ЗИП $I \in \mathcal{F}(n, k)$ справедливо неравенство

$$T(I) \geq 6 \frac{k}{2^n} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right).$$

Доказательство. Пусть D — произвольное дерево, решающее ЗИП I . Обозначим через E_i число ребер на ярусе с номером i в дереве D . По определению сложности

$$T(D) = \sum_{i=1}^n E_i (2/3)^{i-1}.$$

Оценим снизу числа E_i , $i = 1, \dots, n$. Заметим, что если вершина β является концом некоторой цепочки ребер с длины i , выходящей из корня, то число записей, к которым могут пройти запросы через вершину β , может быть не более чем 2^{n-i} . Точнее, если цепь s имеет суммарную нагрузку $x_{m_1}^{s_{m_1}} \& \dots \& x_{m_i}^{s_{m_i}}$, то запросы через вершину β могут пройти только к записям, у которых компоненты с номерами $m_1, \dots, m_i$ равны $s_{m_1}, \dots, s_{m_i}$ соответственно, а остальные компоненты принимают значения из $\{0, 1\}$. Предположим, что $E_i < k/2^{n-i}$. Тогда число записей, достижимых из всех вершин яруса с номером i (то есть достижимых из корня), не больше, чем

$$E_i 2^{n-i} < \frac{k}{2^{n-i}} 2^{n-i} = k,$$

а это означает, что число достижимых из корня записей строго меньше числа k элементов библиотеки в задаче I . Следовательно, дерево D не решает ЗИП I , что противоречит выбору дерева D . Значит, $E_i \geq k/2^{n-i}$. Тогда

$$\begin{aligned} T(D) &= \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \geq \sum_{i=1}^n \frac{k}{2^n} 2^i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= 2 \frac{k}{2^n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} = 6 \frac{k}{2^n} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right). \end{aligned}$$

Пусть V_n — последовательность библиотек, а s_n — неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что $|V_n| 2^{-s_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Будем говорить, что последовательность библиотек V_n является равномерно распределенной порядка s_n , если в любом $(n - s_n)$ -мерном подкубе булева куба B_2^n число записей из V_n асимптотически равно $|V_n| 2^{-s_n}$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 7. Пусть V_n — последовательность равномерно распределенных библиотек порядка s_n , t_n — неубывающая последовательность такая, что $t_n < s_n$. Тогда V_n является последовательностью равномерно распределенных библиотек порядка t_n .

Доказательство. Каждый подкуб размерности $n - t_n$ содержит $2^{n-t_n}/2^{n-s_n} = 2^{s_n-t_n}$ непесекающихся подкубов размерности 2^{n-s_n} . В каждом из этих подкубов размерности 2^{n-s_n} содержится асимптотически $|V_n| 2^{-s_n}$ элементов библиотеки. Следовательно, в подкубе размерности $n - t_n$ содержится асимптотически $|V_n| 2^{-s_n} 2^{s_n-t_n} = |V_n| 2^{-t_n}$ элементов из библиотеки V_n .

Лемма 8. Пусть V_n — последовательность равномерно распределенных библиотек порядка s_n , $s_n \rightarrow \infty$, и $I_n = \langle B_3^n, V_n, \rho \rangle$ — соответствующая последовательность ЗИП. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$T(I_n) \gtrsim 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{s_n}.$$

Доказательство. Пусть дерево D_n решает задачу I_n над базисом переменных. В дереве D_n каждая цепочка длины $s \leq s_n$, выходящая из корня, определяет в кубе B_2^n некоторый подкуб размерности $n - s$. Именно, если цепочке c приписана суммарная конъюнкция $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \& \dots \& x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}$, то к конечной вершине цепочки из корня проходит каждый запрос $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которого $x_{i_j} = \sigma_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$; напротив, если для запроса $x = (x_1, \dots, x_n)$ существует $j \in \{1, \dots, s\}$, для которого $x_{i_j} \neq 2$ и $x_{i_j} \neq s_{i_j}$, то запрос x не проходит в конечную вершину цепочки c . Заметим, что в каждом подкубе размерности $n - s$ содержится не более чем $|V_n|2^{-s} + \bar{o}(|V_n|2^{-s})$ элементов библиотеки V_n . Это значит, что из конечной вершины цепочки длины s достижимы не более чем $|V_n|2^{-s} + \bar{o}(|V_n|2^{-s})$ записей библиотеки. Если $c(s, n)$ — число цепочек длины s , начинающихся в корне дерева D_n , то число достижимых из корня записей не более, чем $c(s, n)(|V_n|2^{-s} + \bar{o}(|V_n|2^{-s}))$. Если $c(s, n) = \bar{o}(2^s)$, то, очевидно, число достижимых из корня записей есть $\bar{o}(|V_n|)$, что противоречит допустимости ИД D_n . Следовательно, для любого $s \leq s_n$ число ребер на ярусе с номером s асимптотически равно 2^s .

Оценим сложность дерева D_n . Обозначим через E_i число ребер на ярусе с номером i . Тогда

$$\begin{aligned} T(D_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} E_i \geq \sum_{i=1}^{s_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} E_i \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{s_n} \left(\frac{2}{3}\right)^i (2^i + \bar{o}(2^i)) = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{s_n} \left(\left(\frac{4}{3}\right)^i + \bar{o}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^i\right) \right) \\ &\sim \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{s_n} \left(\frac{4}{3}\right)^i = 6 \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{s_n} - 1 \right) \sim 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{s_n} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathcal{V}(n, k, s, \alpha)$ множество библиотек мощности k таких, что в любом подкубе размерности $n - s$ содержится больше, чем $[k2^{-s}] - \alpha$, и меньше, чем $[k2^{-s}] + \alpha$ записей.

В работах [2, 3] была сформулирована и доказана следующая теорема.

Лемма 9. Пусть $s(n) \rightarrow \infty$, $k(n)2^{-s(n)} \rightarrow \infty$, $\alpha(n) = \bar{o}(k(n)2^{-s(n)})$, $k(n) = \bar{o}(2^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}(n, k(n), s(n), \alpha(n))| \\ \gtrsim \binom{2^n}{k} \left(1 - \exp \left(2s \ln n + \ln k - \frac{\alpha^2 2^s}{2k} + \bar{o} \left(\frac{\alpha^2 2^s}{k} \right) + \underline{O} \left(\frac{k^3}{4^n} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Лемма 10. Пусть при $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$, $\log_2 k(n) \lesssim cn$, $c < 2/3$,

$$\log_2 \log_2 n = \bar{o}(\log_2 k(n)), \quad f(n, k) = (16 \log_2 k \ln n)^\delta, \quad \delta > 1.$$

Тогда существует N такое, что для любого $n \geq N$ существует последовательность равномерно распределенных библиотек порядка

$$s(n, k) = [\log_2 k(n) - \log_2 f(n, k)]$$

и мощности $k(n)$.

Доказательство. Отметим, что

$$\log_2 f(n, k) = \delta(\log_2 \log_2 k(n) + \log_2 \ln n + 4) = \bar{o}(\log_2 k(n)).$$

Положим

$$\alpha(n, k) = (f(n, k))^\varepsilon,$$

где $\varepsilon = (1/2)(1 + 1/\delta) < 1$. Тогда $\alpha(n, k) = \bar{o}(k(n)2^{-s(n,k)})$. Введем обозначения

$$A = 2s(n, k) \ln n + \ln k(n) - \frac{\alpha^2(n, k)2^{s(n,k)}}{2k(n)},$$

$$B = \bar{o}\left(\frac{\alpha^2(n, k)2^{s(n,k)}}{k(n)}\right) + \underline{O}\left(\frac{k^3(n)}{4^n}\right).$$

Оценим A и B . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} A &\leq 2 \ln n (\log_2 k(n) - \log_2 f(n, k)) + \ln k - \frac{f(n, k)^{1+1/\delta} k(n)}{2k(n) f(n, k)} \\ &= 2 \ln n \log_2 k(1 + \bar{o}(1)) + \ln k - \frac{1}{4} f(n, k)^{1/\delta} \\ &\leq 3 \ln n \log_2 k(1 + \bar{o}(1)) - 4 \ln n \log_2 k = -\ln n \log_2 k(1 + \bar{o}(1)) < 0, \\ B &= \bar{o}\left(\frac{\alpha^2(n, k)2^{s(n,k)}}{k(n)}\right) + \underline{O}\left(\frac{k^3(n)}{4^n}\right) \\ &\leq \bar{o}\left(\frac{f(n, k)^{1+\frac{1}{\delta}} k(n)}{2k(n) f(n, k)}\right) + \underline{O}\left(\frac{2^{3cn}}{4^n}\right) = \bar{o}(\log_2 k \ln n) + \bar{o}(1). \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно больших n и $k(n) \lesssim cn$, $c < 2/3$

$$\begin{aligned} 2s(n, k) \ln n + \ln k(n) - \frac{\alpha^2(n, k)2^{s(n,k)}}{2k(n)} + \bar{o}\left(\frac{\alpha^2(n, k)2^{s(n,k)}}{2k(n)}\right) + \underline{O}\left(\frac{k^3(n)}{4^n}\right) \\ = A + B < -\log_2 k \ln n(1 + \bar{o}(1)) + \bar{o}(\log_2 k \ln n) + \bar{o}(1) < 0, \quad (2) \end{aligned}$$

и при достаточно больших n как следствие леммы 9 и неравенства 2, получаем, что

$$|\mathcal{V}(n, k(n), s(n, k), \alpha(n, k))| > 0.$$

Лемма 11. Пусть $n' < n$, $n' \geq \lceil \log_2 k \rceil$. Тогда

$$L(n', k) \geq L(n, k) - 3k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}_{\text{cut}}(n, n', k)$ множество деревьев высоты n' с k концевыми вершинами над базисом $\{x_1^{s_1}, \dots, x_n^{s_n} \mid s_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$, через $\mathcal{D}(n, n', k)$ множество деревьев, корневые поддеревья высоты n' которых совпадают с деревьями из $\mathcal{D}_{\text{cut}}(n, n', k)$, а из вершин яруса с номером n' выходят непересекающиеся цепочки длины $n - n'$, при этом любая цепочка длины n , выходящая из корня дерева $D \in \mathcal{D}(n, n', k)$, содержит все переменные $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим функции $\varphi_{n, n'}: \mathcal{D}(n, n', k) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{cut}}(n, n', k)$,

где функция $\varphi_{n,n'}(D)$ выдает первые n' ярусов дерева D . Пусть $\mathcal{F}_{\max}(n, k) \subseteq \mathcal{F}(n, k)$ — такое множество, что если $I \in \mathcal{F}_{\max}(n, k)$, $I' \in \mathcal{F}(n, k)$, то $T(I) \geq T(I')$. Очевидно, что для $I_1, I_2 \in \mathcal{F}_{\max}(n, k)$ справедливо равенство $T(I_1) = T(I_2)$. Также ясно, что для $I \in \mathcal{F}(n, k)$ справедливо равенство $L(n, k) = T(I)$.

Пусть $\mathcal{F}_{\max}(n, k)$ содержит такую задачу I , что ее оптимальное решающее ИД D содержится в множестве $\mathcal{D}(n, n', k)$. Соответственно, любое другое дерево, находящееся в множестве $\mathcal{D}(n, n', k)$ и решающее ЗИП I , имеет большую сложность, чем дерево D . Каждое дерево D' из множества $\mathcal{D}(n, n', k)$ состоит из нижней части, равной $\varphi_{n,n'}(D')$, и k цепочек длины $n - n'$. Сложность одной цепочки длины $n - n'$, исходящей из вершины яруса с номером n' равна

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} \left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-n'-1}\right) = 3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$

следовательно,

$$T(D') = T(\varphi_{n,n'}(D')) + 3k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Заметим, что все оптимальные решающие деревья для задач из множества $\mathcal{F}(n', k)$ находятся в множестве $\mathcal{D}_{cut}(n, n', k)$, так как это множество содержит все деревья высоты n' , решающие задачи из $\mathcal{F}(n', k)$. Кроме того,

$$\max_{I \in \mathcal{F}(n', k)} T(I) \geq T(\varphi_{n,n'}(D)) = T(D) - 3k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Пусть не существует задачи из $\mathcal{F}_{\max}(n, k)$, чье оптимальное решающее дерево принадлежит $\mathcal{D}(n, n', k)$. Это значит, что для любого дерева $D \in \mathcal{D}(n, n', k)$, решающего задачу из $\mathcal{F}_{\max}(n, k)$,

$$T(D) > \max_{I \in \mathcal{F}_{\max}(n, k)} T(I).$$

Для каждой ЗИП из $\mathcal{F}_{\max}(n, k)$ существует решающее дерево из $\mathcal{D}(n, n', k)$, например, сбалансированное дерево с характеристикой $\lceil \log_2 k \rceil$, и его сложность больше, чем у оптимального дерева той же задачи. Следовательно,

$$\max_{I \in \mathcal{F}(n', k)} T(I) > \max_{I \in \mathcal{F}(n, k)} T(I) - 3k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Получаем, что при $n' < n$, $n' \geq \lceil \log_2 k \rceil$

$$L(n', k) \geq L(n, k) - 3k \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

5. Поведение функции Шеннона

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим 5 случаев.

1. Пусть $\log_2 \log_2 n = \bar{o}(\log_2 k(n))$ и $\log_2 k(n) \lesssim cn$, $c < 2/3$. Тогда из леммы 10 следует, что существует последовательность равномерно распределенных библиотек V_n мощности $k(n)$ порядка

$$s(n, k) = \log_2 k(n) - \delta \log_2(16 \log_2 k(n) \ln n) = \log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n)), \quad \delta > 1.$$

Из леммы 8 известно, что для ЗИП $I_n = \langle B_3^n, V_n, \rho \rangle$ с библиотекой из последовательности равномерно распределенных библиотек порядка $\log_2 k(n) - \bar{o}(\log_2 k(n))$

$$T(I_n) \gtrsim 6 \left(\frac{4}{3} \right)^{\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n))} = 2^{\log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n)))}.$$

Значит,

$$L(n, k) \gtrsim 2^{\log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n)))},$$

$$\log_2 L(n, k) \gtrsim \log_2 \frac{4}{3} (\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n))) \sim \log_2 \frac{4}{3} \log_2 k(n).$$

2. Пусть $n \lesssim (3/2) \log_2 k$ и $n \sim c \log_2 k(n)$, $c > 1$. Возьмем $n_1 \gtrsim c_1 \log_2 k$, $c_1 > 2/3$. Известно, что

$$L(n_1, k) \gtrsim 2^{\log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k))},$$

а из леммы 11 следует, что

$$\begin{aligned} L(n, k) &\geq L(n_1, k) - 3k \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_1} \right) \\ &\gtrsim 2^{\log_2((4/3) \log_2 k(n)(1 + \bar{o}(1)))} - 3k \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{c \log_2 k(n)(1 + \bar{o}(1))} - \left(\frac{2}{3} \right)^{n_1} \right) \\ &\geq 2^{\log_2((4/3) \log_2 k(n)(1 + \bar{o}(1)))} - 3k \left(\frac{2}{3} \right)^{c \log_2 k(n)(1 + \bar{o}(1))} \\ &= 2^{\log_2((4/3) \log_2 k(n)(1 + \bar{o}(1)))} - 2^{\log_2 k(n) + c \log_2(2/3) \log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n))} \\ &= 2^{\log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n)))} (1 - 2^{d(k, n)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d(k, n) &= \log_2 k(n) + c \log_2 \frac{2}{3} \log_2 k(n) - \log_2 \frac{4}{3} (\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k)) \\ &= \log_2 k(n) \left(1 + c \log_2 \frac{2}{3} - \log_2 \frac{4}{3} + \bar{o}(1) \right) \\ &= \log_2 k(n) \left(\log_2 \frac{3}{2} - c \log_2 \frac{3}{2} + \bar{o}(1) \right) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$, так как $c > 1$, и следовательно,

$$L(n, k) \geq 2^{\log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n)))} (1 + \bar{o}(1)).$$

Значит,

$$\log_2 L(n, k) \gtrsim \log_2(4/3)(\log_2 k(n) + \bar{o}(\log_2 k(n))).$$

3. Пусть $\log_2 k(n) = n - \bar{o}(\log_2 k(n))$. Тогда из леммы 6 следует, что

$$L(n, k) \geq \frac{6k}{2^n} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1 \right),$$

$$\log_2 L(n, k) = \log_2 6 + \log_2 k - n + \log_2 \left(\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1 \right) = \bar{o}(\log_2 k) + \log_2 \frac{4}{3} \log_2 k.$$

Используя верхнюю оценку из следствия 1, получаем, что если $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$,

$$\log_2 \log_2 n < \log_2 k(n) - \log_2 \log_2 k(n), \quad \log_2 k(n) = n - \bar{o}(\log_2 k(n)),$$

то

$$\log_2 L(n, k(n)) \sim \log_2 \frac{4}{3} \log_2 k(n).$$

4. Пусть $k(n) \asymp 2^n$, то есть существует константа c такая, что $k(n) \sim c2^n$ при $n, k(n) \rightarrow \infty$. Из леммы 6 следует, что

$$L(n, k) \geq \frac{6k}{2^n} \left(\left(\frac{4}{3} \right)^n - 1 \right) \sim 6c2^{n \log_2(4/3)} \sim 6c \left(\frac{k}{c} \right)^{\log_2(4/3)} \asymp k^{\log_2(4/3)}.$$

Вместе с верхней оценкой (следствие 1) получаем, что при $k(n) \asymp 2^n$

$$L(n, k(n)) \asymp (k(n))^{\log_2(4/3)}.$$

5. Пусть $k \geq 2^{n-1}$, то есть $\lfloor \log_2 k \rfloor = n - 1$. Тогда из леммы 5 и следствия 1 следует, что нижняя оценка функции Шеннона совпадает с верхней и

$$L(n, k) = 6 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1} + k \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 6.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы

1. Блайвас Т. Д., Асимптотики задачи интервального поиска на булевом кубе в классе сбалансированных древовидных схем. *Дискретная математика* (2004) **16**, №4, 65–78.
2. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б., Теория хранения и поиска информации. Физматлит, Москва, 2002.
3. Гасанов Э. Э., Оценки сложности одного метода решения задачи включающего поиска. *Дискретная математика* (2000) **12**, № 2, 118–139.

Статья поступила 23.08.2005.