Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Романов, О числе тупиковых проверяющих замыкания тестов для блочных контактных схем счетчиков четности, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 32–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:41:22

О числе тупиковых проверяющих замыкания тестов для блочных контактных схем счетчиков четности

© 1997 г. Д. С. Романов

На основе методики, предложенной В. Н. Сачковым для нахождения асимптотики числа минимальных k -блочных покрытий n -множеств и для нахождения предельного распределения числа блоков в случайном минимальном покрытии, получена асимптотика числа тупиковых проверяющих замыкания тестов для блочных контактных схем счетчиков четности при стремлении к бесконечности длины теста и числа блоков в схеме, а также получено предельное распределение длины таких тестов.

1. Введение

Линейными булевыми функциями называются функции вида

$$l_n^\sigma(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus \sigma, \quad \sigma \in \{0, 1\}. \quad (1)$$

Определение контактной схемы можно найти, например, в [4].

В статье рассматриваются блочные контактные схемы (см. рис. 1), реализующие линейные функции $l_n^0(x_1, \dots, x_n)$ (к схемам для $l_n^1(x_1, \dots, x_n)$ можно перейти инвертированием контактов x_n и $\bar{x}_n$). Класс всех линейных функций $l_n^0(x_1, \dots, x_n)$ обозначим через Σ_n . Схемы, реализующие функции этого класса, получаются последовательным соединением изоморфных четырехполюсных блоков (см. рис. 2) и крайних трехполюсных блоков, содержащих в качестве третьего полюса полюс схемы. Каждый блок управляется одним реле, разные блоки управляются разными реле.

Определения, связанные с понятием теста, соответствуют статье [3].

Пусть на некоторую контактную схему воздействует источник неисправностей U_{ij} , способный размыкать (то есть удалять) не более i и замыкать (то есть заменять проводниками) не более j контактов схемы. Запишем в виде таблицы столбцы значений функций, реализуемых всеми схемами, получаемыми при воздействии источника неисправностей на исходную схему. Эти функции, включая исходную, называются функциями неисправности для данной схемы и данного источника. Объединив все равные функции неисправности в классы неисправностей, будем далее рассматривать только таблицы, состоящие из различных столбцов и называемые таблицами неисправностей.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рассмотрим некоторое подмножество M пар функций из таблицы неисправностей. Множество T наборов аргументов будем называть тестом для M , если для любой пары функций $f, g \in M$ в T найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq g(\tilde{\alpha})$.

Тест для таблицы называется проверяющим, если в качестве множества M выбираются все пары, состоящие из исходной функции и всех других функций неисправностей.

Длиной теста называется число составляющих его наборов.

Тестовой матрицей мы называем все наборы теста, записанные один под другим в определенном порядке, а тестовой подтаблицей называем совокупность строк таблицы неисправностей, соответствующих тесту.

2. Вид тупиковых проверяющих замыкания тестов для счетчиков четности

Для построения тупиковых проверяющих замыкания тестов для Σ_n , $n \geq 3$, необходимо рассмотреть источник неисправностей $U_{0,1}$, вызывающий не более одного замыкания контакта.

Построим таблицу неисправностей для Σ_n и $U_{0,1}$. При этом, очевидно, можно

ограничиться рассмотрением только таких наборов $\tilde{\alpha}$, для которых $l_n^0(\tilde{\alpha}) = 0$, то есть наборов с нечетным числом единиц.

Легко устанавливается, что замыкания однотипных контактов эквивалентны [3] и замыкание контакта x_i^{σ} обнаруживается на любом непроводящем наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = x_i^{\sigma}$, и только на таких наборах.

Отсюда легко получить алгоритм построения таблицы неисправностей для $U_{0,1}$ и Σ_n по таблице всех непроводящих наборов: при замыкании контакта x_i ($\bar{x}_i$) столбец функции неисправности противоположен (равен) столбцу значений переменной x_i . Это позволяет перейти от анализа тестовых подтаблиц к непосредственному анализу тестовых матриц.

Матрица A является матрицей проверяющего замыкание в Σ_n теста длины k тогда и только тогда, когда

- (1) матрица A является $(0, 1)$ -матрицей с k строками и n столбцами,
- (2) во всех строках A содержится нечетное число единиц,
- (3) матрица A не содержит постоянных столбцов (то есть столбцов вида $(\sigma, \dots, \sigma)^T$, $\sigma \in \{0, 1\}$).

Для описания тупиковых тестов введем следующие определения. Назовем классом $\mathcal{E}_k$ класс матриц, получаемый всевозможными инвертированиями и (или) перестановками некоторых столбцов в единичной $k \times k$ матрице

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все столбцы, составляющую матрицу E_k и им противоположные, будем называть столбцами типа $\hat{e}_k$.

Очевидно, что для тупиковости проверяющего замыкание теста длины k в описание его матрицы в дополнение к условиям (1)–(3) нужно добавить условие (4), состоящее в том, что тестовая матрица A должна содержать подматрицу типа $\mathcal{E}_k$.

Далее, поскольку замыкание всякого контакта в Σ_n может быть обнаружено, всякий тест, проверяющий единичное замыкание, проверяет и любую комбинацию замыканий, и наоборот. Следовательно, условия (1)–(4) определяют матрицу A тупикового проверяющего замыкания в Σ_n теста длины k .

Диапазон длин таких тестов (везде далее тип тестов будет опускаться) очевиден: от длины $k = 2$ для четных n и $k = 3$ для нечетных n до $k = n$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\mathcal{C}_n(k)$ класс матриц, удовлетворяющих условиям (1)–(4), через $\mathcal{C}'_n(k)$ — класс матриц, удовлетворяющих условиям (1), (3), (4), а через $C_n(k)$ и $C'_n(k)$ — их мощности. Через $T_n(k)$ обозначим число тупиковых тестов указанного типа длины k .

3. Асимптотика числа проверяющих замыкания тупиковых тестов для счетчиков четности

Получим формулу для числа $C'_n(k)$ по аналогии с формулой для числа покрытий множества (см., например, [1]).

Пусть в матрице $A \in \mathcal{C}'_n(k)$ число столбцов типа $\tilde{e}_k$ равно j , $j \in \{k, \dots, n\}$. Выбрать место для этих столбцов можно $\binom{n}{j}$ способами. Разбить эти столбцы на k блоков так, что в каждый блок входят все столбцы, равные и противоположные некоторому столбцу матрицы E_k , и только они, можно $\sigma(j, k)$ способами, где $\sigma(j, k)$ — число Стирлинга второго рода. Определить, какой блок соответствует какому столбцу E_k , можно $k!$ способами. Имеется 2^j способов определить, какие столбцы A равны столбцам E_k , а какие противоположны. Наконец, остальные $n - j$ столбцов можно заполнить $(2^k - 2k - 2)^{n-j}$ способами. Следовательно, при $k > 2$ число матриц из класса $\mathcal{C}'_m(k)$, в которых ровно j столбцов типа $\tilde{e}_k$, равно

$$\binom{n}{j} \sigma(j, k) k! 2^j (2^k - 2k - 2)^{n-j}.$$

Суммируя по j , $k \leq j \leq n$, получаем, что

$$\begin{aligned} C'_n(k) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \sigma(j, k) k! 2^j (2^k - 2k - 2)^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} 2^n (2^k - k - 1)^{n-j} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k - j)^j \\ &= 2^n (2^k - k - 1)^n \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{k - i}{2^{k-1} - k - 1} \right)^j \\ &= 2^n \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (2^{k-1} - i - 1)^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Асимптотику чисел $C'_n(k)$ можно найти (см. теоремы 1–3 настоящей статьи), используя методику, предложенную В. Н. Сачковым в [1] для получения асимптотики числа минимальных покрытий множества.

Положим

$$\gamma_{nk} = \frac{n}{2^{k-1} - 1} - \ln k.$$

Теорема 1. Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $n \geq k$ и $\gamma_{nk} \rightarrow \gamma$, $|\gamma| < \infty$, то

$$\frac{C'_n(k)}{(2^k - 2)^n} \rightarrow e^{-e^{-\gamma}}.$$

Доказательство. Выберем δ , $1/6 < \delta < 1/2$, и рассмотрим неравенство

$$\left| C'_n(k) / (2^k - 2)^n - e^{-e^{-\gamma}} \right| \leq R_1 + R_2 + R_3, \quad (3)$$

где

$$R_1 = \left| \frac{C'_n(k)}{(2^k - 2)^n} - \sum_{s=0}^{[k^{1/2-\delta}] - 1} (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^{k-1} - 1} \right)^n \right|, \quad (4)$$

$$R_2 = \left| e^{-e^{-\gamma_{nk}}} - \sum_{s=0}^{[k^{1/2-\delta}] - 1} (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^{k-1} - 1} \right)^n \right|, \quad (5)$$

$$R_3 = \left| e^{-e^{-\gamma}} - e^{-e^{-\gamma_{nk}}} \right|. \quad (6)$$

Оценим R_1 . Из условия теоремы следует, что если $1 \leq s \leq [k^{1/2-\delta}]$, $n, k \rightarrow \infty$, то

$$\binom{k}{s} = \frac{k^s}{s!}(1 + \theta_1(k)),$$

$$s \ln k + n \ln \left(1 - \frac{s}{2^{k-1}-1}\right) = -s\gamma_{nk} + \theta_2(k),$$

где

$$|\theta_1(k)| \leq c_1 r^{-2\delta}, \quad |\theta_2(k)| \leq c_2 (k^{-\delta} \ln k)^2,$$

c_1, c_2 — некоторые постоянные. Отсюда следует, что при $1 \leq s \leq [k^{1/2-\delta}]$

$$\binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^{k-1}-1}\right)^n = \frac{1}{s!} e^{-s\gamma_{nk}} (1 + \theta_3(k)), \quad (7)$$

где $|\theta(k)| \leq c_3 (k^{-\delta} \ln k)^2$, c_3 — некоторая постоянная.

Из (2) и (4) следует, что

$$R_1 \leq \left| \sum_{s=[k^{1/2-\delta}]}^r (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^{k-1}-1}\right)^n \right|.$$

Используя неравенство $1 - t < e^{-t}$, $t > 0$, и переходя к сумме модулей, получим, что при некоторой постоянной c_4

$$R_1 < \sum_{s=[k^{1/2-\delta}]}^k \frac{1}{s!} e^{-s\gamma_{nk}} < \frac{c_4}{[r^{1/2-\delta}]!} e^{-\gamma_{nk}[r^{1/2-\delta}]}. \quad (8)$$

При выполнении условий теоремы правая часть этого неравенства стремится к нулю, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k_1 , что $R_1 < \varepsilon/3$ при $k > k_1$.

Оценим R_2 . Из (7) следует, что

$$R_2 \leq c_5 \frac{(\ln k)^2}{k^{3\delta-1/2}} + \frac{c_6}{[k^{1/2-\delta}]!} e^{-\gamma_{nk} k^{1/2-\delta}},$$

где c_5, c_6 — некоторые постоянные. При $k \rightarrow \infty$ правая часть этой оценки стремится к нулю, поэтому для выбранного ε найдется такое k_2 , что $R_2 < \varepsilon/3$ при $k > k_2$.

Наконец, так как в условиях теоремы $\gamma_{nk} \rightarrow \gamma$, найдется такое k_3 , что $R_3 < \varepsilon/3$ при $k > k_3$.

Складывая полученные оценки, получаем, что, начиная с $k = \max\{k_1, k_2, k_3\}$,

$$\left| C'_n(k)/(2^k - 2)^n - e^{-e^{-\gamma}} \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что в условиях теоремы

$$\left| C'_n(k)/(2^k - 2)^n - e^{-e^{-\gamma_{nk}}} \right| < c_5 \frac{(\ln k)^2}{k^{3\delta-1/2}} + \frac{c_4 + c_6}{[k^{1/2-\delta}]!} e^{-\gamma_{nk} k^{1/2-\delta}},$$

поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях теоремы 1

$$C'_n(k) = (2^k - 2)^n e^{-e^{-\gamma_{nk}}} (1 + o(1)).$$

Теорема 2. Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow \infty$, то

$$\frac{C'_n(k)}{(2^k - 2)^n} \rightarrow 1.$$

Доказательство. Используя неравенство $1 - t < e^{-t}$, $t > 0$, из (2) находим, что

$$|C'_n(k)/(2^k - 2)^n - 1| < \sum \frac{!}{s!} e^{-s\gamma_{nk}} < e^{-\gamma_{nk} + e},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Следствие 2. Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow \infty$, то

$$C'_n(k) = (2^k - 2)^n (1 + o(1)).$$

Теорема 3. Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow -\infty$ и

$$\frac{\gamma_{nk}}{\ln k} \rightarrow -\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (8)$$

то

$$\frac{C'_n(k)}{(2^k - 2)^n} \left(1 - \frac{1}{k^{1-\alpha}}\right)^k \rightarrow 1.$$

Доказательство. Из (8) вытекает, что при $1 \leq s \leq k$

$$\left(1 - \frac{s}{2^{k-1} - 1}\right)^n = \frac{1}{k^{s(1-\alpha)}} (1 + \theta(k)),$$

где при некоторой постоянной c

$$|\theta(k)| < c 2^{-k} k^2 \ln k.$$

Поэтому из (1) следует, что

$$C'_n(k) = (2^k - 2)^n \left(-\frac{1}{k^{1-\alpha}}\right)^k (1 + \theta(k)),$$

где $\theta \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

Далее исследуем вопрос о том, какую часть класса $C'_n(k)$ составляет класс $C_n(k)$. Рассмотрим три случая.

Рассмотрим случай $k = n$. Векторная сумма столбцов по модулю 2 (далее будем говорить сумма столбцов) матрицы из класса $\mathcal{E}_n$ есть постоянный столбец, поэтому $C_n(n) = n! 2^{n-1}$ и, следовательно,

$$T(n) = 2^{n-1}. \quad (9)$$

Рассмотрим случай $k = n - 1$. Единственными столбцами, которые могут быть приписаны к матрице из класса $\tilde{\mathcal{E}}$ так, чтобы выполнялось условие нечетности числа единиц, являются постоянные столбцы. Но они не должны входить в матрицу теста. Следовательно,

$$T_n(n - 1) = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь случай $n \geq k + 2$. Разобьем $C'_n(k)$ на три непересекающиеся класса (далее индексы n и k будем опускать):

$\mathcal{A}1$ — класс матриц, у которых не менее двух столбцов отличны от столбцов типа $\tilde{e}_k$,

$\mathcal{A}2$ — класс матриц, у которых ровно один столбец отличен от столбца типа $\tilde{e}_k$,

$\mathcal{A}3$ — класс матриц, у которых все столбцы типа $\tilde{e}_k$.

Под классом $\mathcal{A}1_{\tilde{\alpha}}$, $\mathcal{A}2_{\tilde{\alpha}}$, $\mathcal{A}3_{\tilde{\alpha}}$, $C'_{\tilde{\alpha}}$ будем понимать подкласс соответствующего класса $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}2$, $\mathcal{A}3$, $C'_n(k)$, в каждой матрице которого сумма столбцов равна вектору $\tilde{\alpha}$.

Лемма 1. Для любого столбца $\tilde{\alpha}$

$$\frac{2^k - 4k - 4}{(2^k - 2k - 2)^2} |\mathcal{A}1| \leq |\mathcal{A}1_{\tilde{\alpha}}| \leq \frac{1}{(2^k - 2k - 2)^2} |\mathcal{A}1|. \quad (11)$$

Доказательство. Разобьем $\mathcal{A}1$ на непересекающиеся классы $\mathcal{A}1_{i_1 i_2}$, где $i_1 < i_2$ — номера последних отличных от столбцов типа $\tilde{e}_k$ столбцов матрицы $A \in \mathcal{A}1$.

Обозначим через $A_{i_1, \dots, i_l}$ подматрицу, составленную из столбцов матрицы A с номерами $i_1, \dots, i_l$, и через $\bar{A}_{i_1, \dots, i_l}$ подматрицу, полученную из матрицы A удалением столбцов с номерами $i_1, \dots, i_l$.

Каждый класс разобьем на равномошные классы $\mathcal{L}(\bar{A}_{i_1, i_2})$ по различным $\bar{A}_{i_1, i_2}$, i_1 и i_2 . Сумма столбцов матрицы A составляется из сумм столбцов A_{i_1, i_2} и $\bar{A}_{i_1, i_2}$.

Исследуем суммы столбцов i_1 и i_2 матрицы A , то есть суммы двух непостоянных отличных от столбцов типа $\tilde{e}_k$ столбцов. Общее число вариантов размещения двух таких столбцов равно $(2^k - 2k - 2)^2$. Легко видеть, что при $k \geq 5$

- постоянные столбцы возникают в качестве сумм $2^k - 2k - 2$ раза каждый;
- столбцы типа $\tilde{e}_k$ возникают в качестве сумм $2^k - 4k$ раз каждый;
- остальные столбцы возникают в качестве суммы $2^k - 4k - 4$ раза каждый.

Следовательно,

$$\frac{2^k - 4k - 4}{(2^k - 2k - 2)^2} |\mathcal{L}(\bar{A}_{i_1, i_2})| \leq |\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(\bar{A}_{i_1, i_2})| \leq \frac{1}{(2^k - 2k - 2)^2} |\mathcal{L}(\bar{A}_{i_1, i_2})|$$

для любого столбца $\tilde{\alpha}$.

Просуммировав это неравенство по всем (непересекающимся) классам $\mathcal{L}(\bar{A}_{i_1, i_2})$ для каждого фиксированного $\tilde{\alpha}$, получим требуемый результат.

Следствие 3. При $k \rightarrow \infty$ для любого столбца $\tilde{\alpha}$

$$|\mathcal{A}1_{\tilde{\alpha}}| = 2^{-k} |\mathcal{A}1| (1 + O(k2^{-k})).$$

Лемма 2. При $k \leq n - 2$

$$|\mathcal{A}3| \leq \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{|\mathcal{A}1|}{n - k - 1}. \quad (12)$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{A}1^{(n-k)}$ класс матриц, у которых однозначно выделяется подматрица из класса $\tilde{\mathcal{E}}_k$, а на остальных местах стоят столбцы, отличные от столбцов типа $\tilde{e}_k$. Очевидно, что

$$|\mathcal{A}3|/|\mathcal{A}1| \leq |\mathcal{A}3|/|\mathcal{A}1^{(n-k)}|.$$

Разобьем $\mathcal{A}1^{(n-k)}$ на непересекающиеся равномошные классы $\mathcal{A}1_{i_1, \dots, i_{n-k}}^{(n-k)}$ по местам столбцов, отличных от столбцов типа $\tilde{e}_k$. Внутри каждого класса $\mathcal{A}1_{i_1, \dots, i_{n-k}}^{(n-k)}$ будем заменять столбцы $i_1, \dots, i_{n-k}$ столбцами типа $\tilde{e}_k$. Все полученные таким образом матрицы будут принадлежать классу $\mathcal{A}3$. Ясно, что каждым $2^k - 2k - 2$ различным матрицам из $\mathcal{A}1_{i_1, \dots, i_{n-k}}^{(n-k)}$ соответствует $(2k)^{n-k}$ различных матриц из $\mathcal{A}3$. При этом объединение всех полученных матриц по всем классам $\mathcal{A}1_{i_1, \dots, i_{n-k}}^{(n-k)}$, очевидно, покрывает $\mathcal{A}3$ полностью. Кроме того, в каждой матрице из $\mathcal{A}$ можно выбрать подматрицу из $\tilde{\mathcal{E}}_k$ не менее, чем $n - k + 1$ способом, поэтому класс $\mathcal{A}3$ будет покрыт с кратностью, не меньшей $n - k + 1$, так что окончательно получим, что

$$|\mathcal{A}3|/|\mathcal{A}1^{(n-k)}| \leq \frac{(2k/(2^k - 2k - 2))^{n-k}}{n - k + 1},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. При $k \leq n - 2$

$$|\mathcal{A}2| \leq (2k/(2^k - k - 2))^{n-k-1} |\mathcal{A}1|. \quad (13)$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4, но заменяются все столбцы, кроме одного (имеется $n - k$ вариантов его выбора). Ясно, что каждым $(2^k - 2k - 2)^{n-k}$ матрицам из $\mathcal{A}1_{i_1, \dots, i_{n-k}}^{(n-k)}$ соответствует ровно $(n - k)(2^k - 2k - 2)(2k)^{n-k-1}$ различных матриц из $\mathcal{A}2$, при этом кратность покрытия $\mathcal{A}2$ не меньше $n - k$ за счет различных вариантов выбора подматрицы $\tilde{\mathcal{E}}_k$. Окончательно получаем, что

$$|\mathcal{A}2|/|\mathcal{A}1| \leq (2k/(2^k - 2k - 2))^{n-k-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. При $k \leq n - 2$ для любого столбца $\tilde{\alpha}$

$$|\mathcal{A}2_{\tilde{\alpha}}| \leq |\mathcal{A}2|/(2^k - 2k - 2). \quad (14)$$

Доказательство. Разобьем $\mathcal{A}2$ по номерам i единственного отличного от столбца типа $\tilde{e}_k$ столбца и подматрицам A_i на непересекающиеся равномошные классы $N(\bar{A}_i)$. Вариация i -го столбца разбивает каждый класс $(\bar{A}_i)$ на $2^k - 2k - 2$ класса (по одной матрице в каждом) с разными суммами. Просуммировав обе части неравенства

$$|N_{\bar{\alpha}}(\bar{A}_i)| \leq |N(\bar{A}_i)| / (2^k - 2k - 2)$$

по всем i , $\bar{A}_i$ при фиксированном $\bar{\alpha}$, получаем (14).

Теорема 4. При $5 \leq k \leq n - 2$ для любого столбца $\bar{\alpha}$

$$\begin{aligned} & \frac{2^k - 4k - 4}{(2^k - 2k - 2)^2} \left(1 - \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{n - k + 1} - \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k-1} \right) \leq \frac{C'_{\bar{\alpha}}}{C'_n(k)} \\ & \leq \frac{1}{2^k - 2k - 2} + \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{n - k + 1} + \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{2^k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Докажем оценку снизу. Так как $|\mathcal{A}1| < C'_n(k)$, из (12), (13) и из равенства $C'_n(k) = |\mathcal{A}1| + |\mathcal{A}2| + |\mathcal{A}3|$ следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}1| &= C'_n(k) - |\mathcal{A}2| - |\mathcal{A}3| \\ &\geq C'_n(k) \left(1 - \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{n - k + 1} - \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k-1} \right). \end{aligned}$$

Теперь из (11) и оценки $C'_{\bar{\alpha}} \geq |\mathcal{A}1_{\bar{\alpha}}|$ получаем нижнюю оценку.

Оценка сверху следует из (11)–(14) и неравенства

$$C'_{\bar{\alpha}} \leq |\mathcal{A}1_{\bar{\alpha}}| + |\mathcal{A}2_{\bar{\alpha}}| + |\mathcal{A}3|$$

с учетом оценки $|\mathcal{A}1| \leq C'_n(k)$.

Следствие 4. Если $k \rightarrow \infty$ и $k \leq n - 2$, то

$$C_n(k) = C'_n(k) 2^{-k} (1 + O(k^2 2^{-k})).$$

Следствие 5. Для числа $T_n(k)$ тупиковых проверяющих замыкания в схеме счетчика четности тестов длины k при $k \rightarrow \infty$ и $n \geq k + 2$ верны следующие асимптотические представления.

Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow \infty$, где $\gamma_{nk} = n / (2^{k-1} - 1) - \ln k$, то

$$T_n(k) = \frac{1}{k!} 2^k (2^k - 2)^n (1 + o(1)).$$

Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow \gamma$, $|\gamma| < \infty$, то

$$T_n(k) = \frac{1}{k!} 2^k (2^k - 2) e^{-e^{-\gamma}} (1 + o(1)).$$

Если $n, k \rightarrow \infty$ так, что $\gamma_{nk} \rightarrow -\infty$ и $\gamma_{nk} / \ln k \rightarrow -\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то

$$T_n(k) = \frac{1}{k!} 2^k (2^k - 2) (1 - k^{\alpha-1})^k (1 + o(1)).$$

4. Предельное распределение длины тестов

В последующем используется методика, предложенная В. Н. Сачковым в [2].

Введем производящую функцию

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n T_n(k)x^k. \quad (16)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} T_n(1) &= 0, & T_n(2) &= 2^{n-2}(1 + (-1)^n), \\ 0 &\leq T_n(3) \leq 6^{n-1}, \\ 0 &\leq T_n(4) \leq 14^n/24, \\ T_n(n-1) &= 0, & T_n(n) &= 2^{n-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

если $5 \leq k \leq n-2$, то в силу (2) и следствия 4

$$T_n(k) = \frac{2^n \rho(n, k)}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (2^{k-1} - i - 1)^n, \quad (18)$$

где при $k \rightarrow \infty$

$$\rho(n, k) = 2^{-k}(1 + O(k^2 2^{-k})),$$

и существует такая постоянная c_8 , что

$$\rho(n, k) \leq \frac{1}{2^k - 2k - 2} + \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{n - k + 1} + \left(\frac{2k}{2^k - 2k - 2} \right)^{n-k} \frac{1}{2k} \leq c_8.$$

Используя формулы (см. [1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \Delta^k y^n &= \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (y)_{r-k}, \\ \Delta^k (2^{k-1} - k - 1)^n &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (2^{k-1} - i - 1)^n, \end{aligned}$$

находим, что при $5 \leq k \leq n-2$

$$T_n(k) = 2^n \rho(n, k) \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (2^{k-1} - k - 1)_{r-k}. \quad (19)$$

Из (16)–(19) получаем, что

$$\begin{aligned} F_n(x) &= T_n(2)x^2 + T_n(3)x^3 + T_n(4)x^4 + 2^{n-1}x^n \\ &+ \sum_{k=5}^{n-2} \rho(n, k) 2^{n+k} \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) \left(\frac{x}{2} \right)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем многочлены $\varphi_r(x)$, аналогичные многочленам минимальных покрытий [2],

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} x^k. \quad (21)$$

Для получения характеристической функции длины случайного проверяющего замыкания теста потребуются знание асимптотики $F_n(e^{it})$. С этой целью введем вспомогательную функцию $\hat{F}_n(x)$, полагая

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x) &= 2^n \sum_{r=1}^n \sigma(n, r) \varphi_r(x/2) \\ &= 2^n \sum_{k=1}^n \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) \left(\frac{x}{2}\right)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теоремы 5 и 6 дают асимптотическое представление для $\varphi_r(e^{it}/2)$.

Теорема 5. Для всех t , $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$, и всех $r = 1, 2, \dots$, если r четное, то

$$|\varphi_r(e^{it}/2)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{2r^2/4+1} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2} \right), \quad (23)$$

если r нечетное, то

$$|\varphi_r(e^{it}/2)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{2(r^2+3)/4} 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(j+1)}. \quad (24)$$

Доказательство. Проведем доказательство в случае четного r , случай нечетного r рассматривается аналогично. Применяя неравенство для чисел Стирлинга

$$\sqrt{2\pi} r^{r+1/2} e^{-r} \leq r! \leq \sqrt{2\pi} r^{r+1/2} e^{-r+1}$$

к очевидному неравенству

$$|\varphi_r(e^{it}/2)| \leq \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} 2^{-k^2+kr-r},$$

получаем, что

$$|\varphi_r(e^{it}/2)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{2r^2/4+1} \left(2 \sum_{j=1}^{r/2-1} 2^{-j^2} + 1 + 2^{-r^2/4} \right),$$

откуда следует (23).

Теорема 6. При $r \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические представления.

Если $r \rightarrow \infty$ по четным значениям, то

$$\varphi_r(e^{it}/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} 2^{r^2/4+1} e^{itr/2} (\psi_0(e^{it}) + o(1));$$

если $r \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, то

$$\varphi_r(e^{it}/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} 2^{(r^2+3)/4} e^{it(r-1)/2} (\psi_1(e^{it}) + o(1)),$$

где ψ_0 и ψ_1 суть аналитические функции, определяемые абсолютно и равномерно сходящимися рядами

$$\psi_0(e^{it}) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2} e^{-itj} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2} e^{itj}, \quad (25)$$

$$\psi_1(e^{it}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(j+1)} e^{-itj} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(j+1)} e^{it(j+1)}, \quad (26)$$

и остаточные члены стремятся к нулю равномерно относительно t , $\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай четных r , случай нечетных r рассматривается аналогично. Многочлен $\varphi_r(e^{it}/2)$ может быть представлен в виде

$$\varphi_r(e^{it}/2) = \sum_{k=[\log_2(r+1)]+1}^r (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} 2^{-k} e^{itk}.$$

Пусть

$$\alpha = [\log_2(r+1)] + 1, \\ \beta = [2\log_2 r + w(r)],$$

где $w(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ медленнее, чем $\log_2 r$. Тогда

$$\varphi_r(e^{it}/2) = \varphi_r^{(1)}(e^{it}/2) + \varphi_r^{(2)}(e^{it}/2), \quad (27)$$

где

$$\varphi_r^{(1)}(e^{it}/2) = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \binom{r}{k} (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} 2^{-k} e^{itk}, \\ \varphi_r^{(2)}(e^{it}/2) = \sum_{k=\beta}^r \binom{r}{k} (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} 2^{-k} e^{itk},$$

Очевидно, что

$$|\varphi_r^{(1)}(e^{it}/2)| \leq 2^{\beta r}. \quad (28)$$

При $r \rightarrow \infty$ и $k \geq 2 \log_2 r + w(r)$

$$(2^{k-1} - k - 1)_{r-k} = 2^{(k-1)(r-k)}(1 + o(2^{-w(r)})).$$

Следовательно,

$$\varphi_r^{(2)}(e^{it}/2) = \sum_{k=\beta}^r 2^{k(r-k)-r} e^{itk} (1 + o(2^{-w(r)})). \quad (29)$$

При четном r

$$\sum_{k=\beta}^r \binom{r}{k} 2^{k(r-k)-r} e^{itk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} 2^{r^2/4+1} e^{irt/2} (1 + s_1 + s_2 + o(1)), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(r, t) = \sum_{j=1}^{r/2-\beta} e^{-itj} 2^{-j^2} H_{rj}, \\ s_2 &= s_2(r, t) = \sum_{j=1}^{r/2-\beta} e^{itj} 2^{-j^2} H_{rj}, \\ H_{rj} &= \frac{((r/2)!)^2}{(r/2-j)!(r/2+j)!} = \prod_{\nu=1}^j \frac{1-2(\nu-1)/2}{1+2\nu/r}. \end{aligned}$$

Если $0 < \varepsilon < 1/2$ и $1 \leq j \leq r^{1/2-\varepsilon}$, то при $r \rightarrow \infty$

$$H_{rl} = 1 + O(r^{-2\varepsilon}).$$

Отсюда

$$s_1 = \sum_{j=1}^{r^{1/2-\varepsilon}} e^{-itj} 2^{-j^2} (1 + O(r^{-2\varepsilon}) + O(r 2^{-r^{1-2\varepsilon}})), \quad (31)$$

$$s_2 = \sum_{j=1}^{r^{1/2-\varepsilon}} e^{itj} 2^{-j^2} (1 + O(r^{-2\varepsilon}) + O(r 2^{-r^{1-2\varepsilon}})), \quad (32)$$

Распространение суммирования по j до бесконечности вносит погрешность порядка последнего остаточного члена. Поэтому из (29)–(32) следует, что

$$\varphi_r^{(2)}(e^{it}/2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} 2^{r^2/4+1} e^{irt/2} (\psi_0(e^{it}) + o(1)). \quad (33)$$

Следовательно, из (28) получаем, что при $r \rightarrow \infty$ равномерно по t , $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$,

$$\varphi_r^{(1)}(e^{it}/2)/\varphi_r^{(2)}(e^{it}/2) = o(1),$$

что вместе с (27) и (33) доказывает теорему.

Теорема 7 дает асимптотическое представление $F_n(e^{it})$.

Теорема 7. Если $n \rightarrow \infty$ по четным значениям, то

$$F_n(e^{it}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} 2^{(n/2+1)^2} e^{int/2} (\psi_0(e^{it}) + o(1)),$$

если $n \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, то

$$F_n(e^{it}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} 2^{(n/2+1)^2-1/4} e^{i(n-1)t/2} (\psi_1(e^{it}) + o(1)),$$

где остаточные члены стремятся к нулю равномерно относительно t , $\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$, а функции ψ_0 и ψ_1 определены в (25), (26).

Доказательство. Из (22) при $x = e^{it}$ получим, что

$$\frac{\hat{F}_n(e^{it})}{2^n \varphi_n(1/2)} = \frac{\varphi_n(e^{it}/2)}{\varphi_n(1/2)} + R_n(t), \quad (34)$$

где

$$R_n(t) = \sum \sigma(n, r) \frac{\varphi_r(e^{it}/2)}{\varphi_n(1/2)}.$$

Оценим $\varphi_r(e^{it}/2)/\varphi_n(1/2)$ при r и n четных, остальные случаи рассматриваются аналогично. Используя оценку для чисел Стирлинга второго рода

$$\sigma(n, r) \leq \frac{r^n}{r!}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (35)$$

и теоремы 5 и 6, получим, что при достаточно больших n и r , $1 \leq r \leq n-4$,

$$\sigma(n, r) |\varphi_r(e^{it}/2)/\varphi_n(1/2)| \leq \frac{1}{r} \sqrt{n/2\pi} \left(\frac{r e^{(r+1)/(n-r)}}{2^{(n-r)/4}} \right)^{n-r}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства возрастает по r , при $r = n-4$ получаем при $n \rightarrow \infty$ равномерную по r , $1 \leq r \leq n-4$, оценку

$$\sigma(n, r) |\varphi_r(e^{it}/2)/\varphi_n(1/2)| = O(n^4 (e/4)^n), \quad (36)$$

выполняющуюся равномерно по t , $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Для оценки чисел Стирлинга второго рода при $n \rightarrow \infty$ и $n-3 \leq r \leq n-1$ используем асимптотическую формулу [5]

$$\sigma(n, r) = (r^r/2)^{n-r} (n-r)! (1 + o(1)).$$

Из теоремы 6 получим, что при $n \rightarrow \infty$ и $n-3 \leq r \leq n-1$

$$\sigma |\varphi_r(e^{it}/2)/\varphi_n(1/2)| = O(n^2 2^{-n/2}) \quad (37)$$

равномерно по t , $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Из (34)–(37) следует, что для указанного случая

$$\hat{F}_n(e^{it}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} 2^{(n/2+1)^2} e^{int/2} (\psi_0(e^{it}) + o(1)), \quad (38)$$

где $\psi_0(e^{it})$ определено в (25).

Докажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|\hat{F}_n(e^{it}) - F_n(e^{it})|}{|\hat{F}_n(e^{it})|} = o(1) \quad (39)$$

равномерно относительно t , в любом интервале вида $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$, то есть асимптотические представления $\hat{F}_n(e^{it})$ и $F_n(e^{it})$ совпадают.

Воспользовавшись (21), (22) и положив $\mu(n) = [\log_2 n / \log_2 \log_2 n]$, получим, что

$$|\hat{F}_n(e^{it}) - F_n(e^{it})| \leq 2^n + 6^{n-1} + 14^{n-1} + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left| \sum_{k=1}^{\mu(n)} (\rho(n, k) 2^k - 1) 2^n \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} \right|, \\ \Sigma_2 &= \left| \sum_{\mu(n)+1}^n (\rho(n, k) 2^k - 1) 2^n \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} \right|, \\ \Sigma_3 &= \left| \sum_{k=1}^4 \rho(n, k) 2^{n+k} \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} \right|, \\ \Sigma_4 &= \left| \sum_{n-1}^n \rho(n, k) 2^{n+k} \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k} \right|. \end{aligned}$$

Оценим Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, при достаточно больших n . Для оценки Σ_1 воспользуемся неравенством

$$|\rho(n, k) 2^k - 1| \leq c_9,$$

где c_9 — некоторая постоянная. Тогда

$$\Sigma_1 \leq c_9 2^n \left| \Sigma_1^{(1)} + \Sigma_1^{(2)} + \Sigma_1^{(3)} \right|, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(1)} &= \sum_{r=1}^{\mu(n)} \sigma(n, r) \varphi_r(e^{it}/2), \\ \Sigma_1^{(2)} &= \sum_{r=\mu(n)+1}^{2\mu(n)} \sum_{k=1}^{\mu(n)} \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k}, \\ \Sigma_1^{(3)} &= \sum_{r=2\mu(n)+1}^n \sum_{k=1}^{\mu(n)} \binom{r}{k} \sigma(n, r) (e^{it}/2)^k (2^{k-1} - k - 1)_{r-k}. \end{aligned}$$

Из (35) и (23) ясно, что

$$2^n \left| \Sigma_1^{(1)} \right| < 2^{n \log_2 \log_2 n}, \quad (42)$$

$$2^n \left| \Sigma_1^{(2)} \right| \leq 2^n \left| \sum_{r=\mu(n)+1}^{2\mu(n)} \sigma(n, r) \varphi_r(e^{it}/2) \right| < 2^{n \log_2 \log_2 n^2}. \quad (43)$$

Из (35) с учетом неравенства для чисел Стирлинга находим, что

$$2^n \left| \Sigma_1^{(3)} \right| < (2e)^n 2^{n \log_2 n / \log_2 \log_2 n}. \quad (44)$$

Из (41)–(44) вытекает, что существует такая постоянная c_{10} , что для всех t , в интервале вида $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$,

$$\Sigma_1 \leq c_{10} (2e)^n 2^{n \log_2 n / \log_2 \log_2 n}. \quad (45)$$

Оценим Σ_2 . Из (18) следует, что

$$\rho(n, k) 2^k - 1 = o(k^2 2^{-k}),$$

откуда, с учетом (38), получаем, что

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq c_{11} \mu^2(n) 2^{-\mu(n)} |\hat{F}_n(e^{it})| \\ &\leq c_{12} \mu^2(n) 2^{-\mu(n) + (n/2+1)^2} n^{-1/2}, \end{aligned} \quad (46)$$

где c_{11} и c_{12} — некоторые постоянные и оценка равномерна по t , $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Очевидны также следующие равномерные оценки:

$$\Sigma_3 \leq c_{13} n^8 2^{3n}, \quad (47)$$

$$\Sigma_4 \leq c_{14} n^5, \quad (48)$$

где c_{13} , c_{14} — некоторые постоянные.

Оценки (45)–(48) с учетом (38) доказывают соотношение (39), а с ним и саму теорему.

Обозначив через T_n число всех тупиковых тестов для схемы Σ_n и воспользовавшись очевидной формулой

$$T_n = F_n(1),$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Для числа T_n тупиковых проверяющих замыкания в Σ_n тестов при $n \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические представления:

если $n \rightarrow \infty$ по четным значениям, то

$$T_n = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi n}} 2^{(n/2+1)^2} (1 + o(1)),$$

если $n \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, то

$$T_n = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi n}} 2^{(n/2+1)^2 - 1/4} (1 + o(1)),$$

где

$$N_0 = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2},$$

$$N_1 = 2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(j+1)}.$$

На множестве всех тупиковых проверяющих замыкания тестов для Σ_n введем равномерное распределение и пусть ξ_n — случайная величина, равная длине случайного тупикового проверяющего замыкания теста для Σ_n . Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = \frac{T_n(k)}{T_n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

а характеристическая функция ξ_n равна

$$f_n(t) = \frac{F_n(e^{it})}{T_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следствие 6. Для характеристической функции $f_n(t)$ случайной величины ξ_n при $n \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические представления:

если $n \rightarrow \infty$ по четным значениям, то

$$f_n(t) = \frac{1}{N_0} e^{int/2} \psi_0(e^{it}) + o(1),$$

если $n \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, то

$$f_n(t) = \frac{1}{N_1} e^{i(n-1)t/2} \psi_1(e^{it}) + o(1),$$

где остаточные члены стремятся к нулю равномерно по t в любом интервале вида $-\delta \leq t \leq \delta$, $\delta > 0$.

Из этого следствия и теоремы о непрерывности соответствия между распределениями и характеристическими функциями вытекает следующее утверждение о предельном распределении случайной величины ξ_n .

Теорема 9. Предельные распределения случайной величины ξ_n при $n \rightarrow \infty$ имеют следующий вид.

Если $n \rightarrow \infty$ по четным значениям, то для любого фиксированного j , $j = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n = n/2 - j\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n = n/2 + j\} = \frac{1}{N_0} 2^{-j^2}.$$

Если $n \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, то для любого фиксированного j , $j = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n = (n-1)/2 - j\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n = (n-1)/2 + j\} = \frac{1}{N_1} 2^{-j(j+1)}.$$

Таким образом, существуют два нестандартных дискретных предельных распределения, для $n \rightarrow \infty$ по четным и нечетным значениям, характеристические функции которых равны $\psi_0(e^{it})/N_0$ и $\psi_1(e^{it})/N_1$, эти распределения совпадают с предельными распределениями числа блоков в случайном минимальном покрытии n -множества [2]. Дифференцируя характеристические функции в нуле, получим формулы для k -х моментов $M_k^{(0)}$ и $M_k^{(1)}$ распределений с характеристическими функциями $\psi_0(e^{it})/N_0$ и $\psi_n(e^{it})/N_1$ соответственно:

$$M_k^{(0)} = \frac{(-1)^k + 1}{N_0} \sum_{j=1}^{\infty} j^k 2^{-j^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$M_k^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{\infty} ((j+1)^k + (-j)^k) 2^{-j(j+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, средние значения равны соответственно 0 и 1/2, а дисперсии

$$D^{(0)} = \frac{2}{N_0} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 2^{-j^2},$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1) 2^{-j(j+1)} + \frac{1}{4}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. В. Яблонскому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Сачков В. Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
2. Сачков В. Н. Случайные минимальные покрытия. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 64–74.
3. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем. *Труды МИАН СССР* (1958) **51**, 270–360.
4. Shannon C. E. Symbolic analysis of relay and switching circuits. *Trans. AIEE* (1938) **57**, 713–722.
5. Bleick W. E. Asymptotics of Stirling numbers of the second kind. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1974) **42**, №2, 575–580.

Статья поступила 04.05.1995.