Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Селиванов, В. П. Чистяков, Последовательный χ^2 -критерий, построенный по s -цепочкам состояний цепи Маркова, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 127–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 02:43:59

Последовательный χ^2 -критерий, построенный по s -цепочкам состояний цепи Маркова

© 1997 г. Б. И. Селиванов, В. П. Чистяков

Ранее была введена многомерная статистика, компонентами которой являются одномерные χ^2 -статистики, построенные по частотам исходов расширяющейся последовательности полиномиальных испытаний, и найдена плотность ее предельного распределения. Этот результат переносится в данной работе на статистики, построенные по частотам s -цепочек состояний конечной однородной цепи Маркова.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00531.

1. Постановка задачи

В работе [1] был предложен и исследован последовательный χ^2 -критерий, который строился по частотам исходов полиномиальной схемы. Аналогичные результаты были получены в [2] на основе статистик критерия максимального правдоподобия. В данной работе результаты статьи [1] переносятся на статистики типа χ^2 , которые строятся по s -цепочкам состояний цепи Маркова. Одномерные распределения таких статистик рассматривались в [3, 4].

Пусть

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t, \dots \quad (1)$$

— последовательность состояний конечной однородной цепи Маркова, которая предполагается эргодической и стационарной в смысле статьи [5]. Состояния цепи обозначим $1, \dots, N$. Будем проверять гипотезу H_0 , согласно которой последовательность (1) есть реализация цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ и стационарным распределением $\{p_i\}_{i=1}^N$. Конкурирующая с H_0 гипотеза H заключается в том, что переходные вероятности цепи задаются матрицей $Q = \|q_{ij}\|_{i,j=1}^N$, а соответствующее стационарное распределение есть $\{q_i\}_{i=1}^N$.

По последовательности (1) образуем s -цепочки, $s \geq 2$,

$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s), (\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{s+1}), \dots, (\gamma_t, \gamma_{t+1}, \dots, \gamma_{t+s-1}), \dots \quad (2)$$

и, задав целые числа $s \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r$, найдем частоты

$$\nu_i^{(s)}(t_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

s -цепочек вида

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_s), \quad i_1, i_2, \dots, i_s \in \{1, \dots, N\},$$

среди первых t_i элементов в последовательности (2).

Используя первые t_i элементов последовательности (2), построим статистики

$$\chi_i^2 = \sum \frac{(\nu_I^{(s)}(t_i) - t_i a^{(s)}(I))^2}{t_i a^{(s)}(I)} - \sum \frac{(\nu_I^{(s-1)}(t_i) - t_i a^{(s-1)}(I))^2}{t_i a^{(s-1)}(I)} \quad (3)$$

где $i = 1, \dots, r$ и

$$\begin{aligned} \nu_I^{(s-1)}(t_i) &= \sum_{i_s=1}^N \nu_I^{(s)}(t_i), \\ a^{(1)}(I) &= p_{i_1}, \\ a^{(m)}(I) &= p_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{m-1} i_m}, \quad m = 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Суммирование в обеих суммах из правой части (3) ведется по тем I , для которых положительны $a^{(s-1)}(I)$ и $a^{(s)}(I)$. Этому правилу мы будем придерживаться в аналогичных случаях и в дальнейшем изложении. Обозначим k_j число различных j -цепочек, $j = s-1, s$, появляющихся с вероятностью единица в последовательности (1). Согласно [3] в случае справедливости гипотезы H_0 статистика (3) при $t_1 \rightarrow \infty$ распределена асимптотически по закону χ^2 с $d_s = k_s - k_{s-1}$ степенями свободы. В частности, если все элементы матрицы P положительны, то $d_s = N^s - N^{s-1}$.

Аналог r -кратного критерия, предложенного в [1], строится по векторной статистике

$$\chi^2 = (\chi_1^2, \dots, \chi_r^2) \quad (4)$$

где величины χ_i^2 , $i = 1, \dots, r$, определяются формулой (3). Распределение вектора (4) будем исследовать в схеме серий, когда $t_1 \rightarrow \infty$ и

$$\sqrt{t_i/t_{i+1}} = \rho_i(1 + o(1)), \quad 0 < \rho < 1, \quad i = 1, \dots, r-1,$$

(следовательно,

$$\sqrt{t_i/t_j} = \rho_{ij}(1 + o(1)), \quad 1 \leq i < j \leq r,$$

причем $\rho_{ij} = \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}$), матрица P , определяющая основную гипотезу H_0 , постоянна, а переходные вероятности при конкурирующей гипотезе H имеют вид

$$q_{ij} = p_{ij}(1 + \varepsilon_{ij}(t_r))/\sqrt{t_r}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(t_r) = \varepsilon_{ij}(1 + o(1)), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

В этих предположениях каждая из статистик (3) имеет нецентральное χ^2 -распределение с d_s степенями свободы.

Отметим, что в условиях (5) существуют пределы

$$\varepsilon_i = \lim_{t_r \rightarrow \infty} \frac{q_i - p_i}{p_i} \sqrt{t_r}, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

где ε_i , $i = 1, \dots, N$, выражаются через ε_{ij} и p_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$. Это утверждение нетрудно получить, если рассматривать вероятности $q_i = q_i(x)$, $i = 1, \dots, M$, как решения соответствующей системы линейных уравнений с коэффициентами

$$q_{ij} = q_{ij}(x) = p_{ij}(1 + x\varepsilon_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

В данной статье показано, что предельное распределение вектора (4) как при гипотезе H_0 , так и при гипотезе H в схеме серий (5) является многомерным χ^2 -распределением, введенным в [1]. Это позволяет использовать процедуру построения и расчета последовательного критерия, описанную в [1] для полиномиальной схемы, в случае цепи Маркова.

2. Многомерное χ^2 -распределение

Пусть

$$\eta_k = (\eta_k^{(1)}, \dots, \eta_k^{(r)}), \quad k = 1, \dots, m-1,$$

— независимые нормально распределенные векторы, имеющие одну и ту же ковариационную матрицу с элементами

$$\text{cov}(\eta_k^{(i)}, \eta_k^{(j)}) = \rho_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{ii} &= 1, & i &= 1, \dots, r, \\ \rho_{ij} &= \rho_i \rho_{i+1} \dots \rho_{j-1}, & 1 &\leq i < j \leq r, \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{E}\eta_k^{(i)} = \alpha_k \rho_{ir}, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad i = 1, \dots, r.$$

Положим

$$\zeta = (\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(r)})$$

где

$$\zeta^{(i)} = \sum_{k=1}^{m-1} (\eta_k^{(i)})^2, \quad i = 1, \dots, r.$$

По определению вектор ζ является суммой $m-1$ независимых векторов $((\eta_k^{(1)})^2, \dots, (\eta_k^{(r)})^2)$, $k = 1, \dots, m-1$.

Необходимые нам результаты статьи [1] можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $p_{r,\alpha^2}(x_1, \dots, x_r)$, где $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}^2$, есть плотность распределения вектора $\zeta/2$. Тогда при $\alpha^2 = 0$

$$\begin{aligned} p_{r,0}(x_1, \dots, x_r) &= \frac{\exp\{-(x_1/\lambda_1 + \dots + x_r/\lambda_r)\}(x_1 x_r / (\lambda_1 \lambda_r))^{\delta/2}}{K_r^{1+\delta} (b_1 \dots b_{r-1})^{1+\delta} \Gamma(1+\delta) \lambda_1 \dots \lambda_r} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{r-1} I_\delta(2\sqrt{b_i x_i x_{i+1} / (\lambda_i \lambda_{i+1})}), \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{m-1}{2} - 1, \\ \lambda_i &= \frac{(1-\rho_{i-1}^2)(1-\rho_i^2)}{1-\rho_{i-1}^2\rho_i^2}, \quad i=1, \dots, r, \\ b_i &= \frac{\rho_j^2(1-\rho_{j-1}^2)(1-\rho_{j+1}^2)}{(1-\rho_{j-1}^2\rho_j^2)(1-\rho_j^2\rho_{j+1}^2)}, \quad j=1, \dots, r-1, \\ K_r &= \prod_{k=1}^{r-1} (1-\rho_k^2\rho_{k-1}^2) \prod_{k=1}^{r-1} (1-\rho_k^2)^{-1}, \quad \rho_0 = \rho_r = 0, \\ x^{-\delta/2} I_\delta(2\sqrt{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+\delta+1)k!},\end{aligned}$$

и Γ — гамма-функция;
при $\alpha^2 > 0$,

$$p_{r,\alpha^2}(x_1, \dots, x_r) = \Gamma(\delta+1)e^{-\alpha^2/2}(\theta x_r/\lambda_r)^{-\delta/2} I_\delta(2\sqrt{\theta x_r/\lambda_r}) p_{r,0}(x_1, \dots, x_r), \quad (8)$$

где

$$\theta = \frac{\alpha^2}{2}(1-\rho_{r-1}^2).$$

Распределения, определяемые леммой 1, следуя [1], называют многомерными χ^2 -распределениями (центральным, если $\alpha^2 = 0$, и нецентральным, если $\alpha^2 > 0$).

3. Математические ожидания и ковариации частот s -цепочек

Рассмотрим rN^s -мерный вектор с компонентами

$$\xi_I^{(s)}(t_i) = \frac{\nu_I^{(s)}(t_i) - t_i a^{(s)}(I)}{\sqrt{t_i a^{(s)}(I)}}, \quad i=1, \dots, r, \quad (9)$$

где

$$I = (i_1, \dots, i_s), \quad i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, N\}.$$

Нас интересуют математические ожидания и ковариации случайных величин (9) при гипотезе H_0 и альтернативах вида (5). Введем случайные величины $\varepsilon_I(u)$, $u=1, 2, \dots$, принимающие значения 0 и 1, полагая $\varepsilon_I(u) = 1$, если $\gamma_u = i_1, \dots, \gamma_{u+s-1} = i_s$, и $\varepsilon_I(u) = 0$ в противном случае. Тогда частоты $\nu_I^{(s)}(t_i)$ можно представить в виде

$$\nu_I^{(s)}(t_i) = \sum_{u=1}^{t_i} \varepsilon_I(u), \quad i=1, \dots, r. \quad (10)$$

В силу стационарности цепи непосредственно из равенства (10) вытекает, что при гипотезе H_0

$$\mathbf{E} \nu_I^{(s)}(t_i) = t_i a^{(s)}(I), \quad i=1, \dots, r,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\xi_I^{(s)}(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

При гипотезе H для $I = (i_1, \dots, i_s)$

$$\mathbf{E}\xi_I^{(s)}(t_i) = \frac{q_{i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{s-1} i_s} - a^{(s)}(I)}{\sqrt{a^{(s)}(I)}} \sqrt{t_i}, \quad i = 1, \dots, r,$$

откуда, учитывая (5), находим, что

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_I^{(s)}(t_i) = \rho_{ir}(\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_1 i_2} + \dots + \varepsilon_{i_{s-1} i_s}) \sqrt{a^{(s)}(I)}. \quad (11)$$

Здесь ε_{i_1} определяется соотношением (6),

$$\varepsilon_{i_m i_{m+1}} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{q_{i_m i_{m+1}} - p_{i_m i_{m+1}}}{p_{i_m i_{m+1}}} \sqrt{t_i}, \quad m = 1, \dots, s-1,$$

и

$$\rho_{ir} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \sqrt{t_i/t_r} = \rho_i \dots \rho_{r-1},$$

где ρ_i , $i = 1, \dots, r-1$, определены в параграфе 1. Далее, снова используя стационарность цепи, находим, что для $u_1, u_2 = 1, 2, \dots$,

$$I = (i_1, \dots, i_s), \quad J = (j_1, \dots, j_s), \quad i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, N\},$$

в случае справедливости гипотезы H_0 имеют место равенства

$$\mathbf{E}\varepsilon_I(u_1)\varepsilon_J(u_2) = \begin{cases} a^{(s)}(I)p_{i_s j_1}^{(u_2 - u_1 - s + 1)} a_1(J) & \text{если } u_2 \geq u_1 + s, \\ a^{(s)}(I)a_{s-m}(J)\delta_m(I, J) & \text{если } u_2 - u_1 = m, m = 1, \dots, s-1, \\ a^{(s)}(I)\delta(I, J) & \text{если } u_1 = u_2, \\ a^{(s)}(J)a_{s-m}(I)\delta_m(J, I) & \text{если } u_1 - u_2 = m, m = 1, \dots, s-1, \\ a^{(s)}(J)p_{j_s i_1}^{(u_1 - u_2 - s + 1)} a_1(I) & \text{если } u_1 \geq u_2 + s, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a_m(I) &= p_{i_m i_{m+1}} \dots p_{i_{s-1} i_s}, & m = 1, \dots, s-1, \\ \delta_m(I, J) &= \delta_{i_{m+1} j_1} \dots \delta_{i_s j_{s-m}}, & m = 0, \dots, s-1, \\ \delta(I, J) &= \delta_0(I, J), \end{aligned}$$

δ_{ij} — символ Кронекера, и $p_{ij}^{(n)}$ — вероятность перехода за n шагов из состояния i в состояние j .

Пусть $s \leq t_i < t_j$, $1 \leq i < j \leq r$. Учитывая равенства (12), в случае справедли-

ности гипотезы H_0 получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \text{cov}(\nu_I^{(s)}(t_i), \nu_J^{(s)}(t_j)) \\
 &= t_i \left(a^{(s)}(I) \delta(I, J) + \sum_{m=1}^{s-1} (a^{(s)}(I) a_{s-m}(J) \delta_m(I, J) + a^{(s)}(J) a_{s-m}(I) \delta(J, I)) \right. \\
 &\quad \left. - (2s-1) a^{(s)}(I) a^{(s)}(J) + a_1^{(s)}(I) a^{(s)}(J) \sum_{m=1}^{t_i-s} (p_{j_s i_1}^{(m)} - p_{i_1}) \right) \\
 &\quad - a^{(s)}(J) \sum_{m=1}^{s-1} (m a_{s-m}(I) - a^{(s)}(I)) \\
 &\quad + a^{(s)}(I) a_1(J) \left((t_i - t_j) \sum_{m=1}^{t_j-t_i-s+1} (p_{i_s j_1}^{(m)} - p_{j_1}) + t_j \sum_{m=1}^{t_j-s} (p_{i_s j_1}^{(m)} - p_{j_1}) \right) \\
 &\quad - a_1^{(s)}(I) a^{(s)}(J) \sum_{m=1}^{t_i-s} (m + s - 1) (p_{j_1 i_1}^{(m)} - p_{i_1}) \\
 &\quad - a^{(s)}(I) a_1^{(s)}(J) \sum_{m=t_j-t_i-s+2}^{t_j-s} (m - s + 1) (p_{i_s j_1}^{(m)} - p_{j_1}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

В силу эргодичности цепи для любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$ равномерно по $t \geq 1$

$$\sum_{n=1}^t p_{ij}^{(n)} = t p_j + s_{ij} + O(\lambda^t),$$

где λ — некоторая постоянная, $0 < \lambda < 1$,

$$s_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} (p_{ij}^{(n)} - p_j), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

и ряд в правой части последнего равенства сходится абсолютно. Представление величин s_{ij} через элементы матрицы переходных вероятностей цепи Маркова можно найти, например, в книге [6].

Отсюда и из формул (9) и (13) следует, что при $t_1 \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \text{cov}(\xi_I^{(s)}(t_i), \xi_J^{(s)}(t_j)) = \rho_{ij} \sigma(I, J), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 & \sigma(I, J) = \delta(I, J) \\
 &+ \sum_{m=1}^{s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{p_{i_{m+1}}}} \sqrt{a^{(m+1)}(I) a_{s-m}(J)} \delta_m(I, J) + \frac{1}{\sqrt{p_{j_{m+1}}}} \sqrt{a_{s-m}(I) a^{(m+1)}(J)} \delta_m(J, I) \right) \\
 &- (2s-1) \sqrt{a^{(s)}(I) a^{(s)}(J)} + \frac{1}{\sqrt{p_{j_1}}} \sqrt{a^{(s)}(I) a_1(J)} s_{i_s j_1} + \frac{1}{\sqrt{p_{i_1}}} \sqrt{a_1(I) a^{(s)}(J)} s_{j_s i_1}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Заметим, что если (1) есть реализация полиномиальной схемы с N исходами $1, \dots, N$, которые имеют вероятности $p_1, \dots, p_N$, соответственно, то выражение (15)

упрощается и мы получаем

$$\sigma(I, J) = \delta(I, J) - (2s - 1) \sqrt{p_{i_1} \dots p_{i_s} p_{j_1} \dots p_{j_s}} + \sum_{m=1}^{s-1} (\sqrt{p_{i_1} \dots p_{i_m} p_{j_s-m+1} \dots p_{j_s}} \delta_m(I, J) + \sqrt{p_{i_s-m+1} \dots p_{i_s} p_{j_1} \dots p_{j_m}} \delta_m(J, I)).$$

Формулы (2.4) из [1] и (7) из [4] являются частными случаями последнего соотношения.

Предельное соотношение (14), где $\sigma(I, J)$ определяется формулой (15), выполняется и в случае гипотезы H вида (5).

В параграфе 4 будет использоваться тот факт, что случайный вектор с компонентами (9) при $t_1 \rightarrow \infty$, если верна гипотеза H_0 , асимптотически нормален с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей, элементы которой определяются формулами (14) и (15). В случае гипотезы H вида (5) при $t_1 \rightarrow \infty$ этот вектор будет асимптотически нормален с той же ковариационной матрицей и вектором математических ожиданий с компонентами, определяемыми соотношением (11).

4. Распределение вектора χ^2

Для доказательства основного утверждения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный нормально распределенный вектор с ковариационной матрицей

$$\Sigma = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n$$

ранга r_0 , $1 \leq r_0 \leq n$, и A — симметричная неотрицательно определенная $n \times n$ матрица. Если квадратичная форма $\varphi(\xi) = \xi^T A \xi$ имеет нецентральное χ^2 -распределение с r степенями свободы, $1 \leq r \leq n$, то существует такое линейное преобразование $\eta = B\xi$, что $\eta_{r_0+1}, \dots, \eta_n$ — постоянные величины, $\eta_1, \dots, \eta_{r_0}$ независимы и нормально распределены, $D\eta_i = 1$, $i = 1, \dots, r_0$, и

$$\varphi(\xi) = \eta_1^2 + \dots + \eta_r^2, \quad r \leq r_0.$$

Доказательство. Выберем ортогональное преобразование C так, чтобы случайный вектор $C\xi = \tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n)$ имел ковариационную матрицу $\|\delta_{ij}\sigma_i^2\|_{i,j=1}^n$, где $\sigma_i^2 > 0$ при $i = 1, \dots, r_0$ и $\sigma_i^2 = 0$ при $i = r_0 + 1, \dots, n$. Положим

$$\eta_i^* = \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\eta}_i, \quad i = 1, \dots, r_0,$$

ясно, что величины η_i^* , $i = r_0 + 1, \dots, n$, постоянны. Тогда

$$\varphi(\xi) = \sum_{i,j=1}^{r_0} \tilde{A}_{ij} \eta_i^* \eta_j^* + \sum_{i=1}^{r_0} \tilde{L}_i \eta_i^* + \tilde{K}, \quad (16)$$

где $\|\tilde{A}_{ij}\|_{i,j=1}^{r_0}$ — симметричная матрица, $\tilde{L}_i$, $i = 1, \dots, r_0$, и $\tilde{K}$ — некоторые постоянные.

Теперь выберем ортогональное преобразование, переводящее вектор $(\eta_1^*, \dots, \eta_{r_0}^*)$ в вектор $(\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{r_0})$ так, чтобы квадратичная форма из (16) привелась к сумме квадратов:

$$\varphi(\xi) = \lambda_1 \hat{\eta}_1^2 + \dots + \lambda_{r_1} \hat{\eta}_{r_1}^2 + \sum_{i=1}^{r_0} L_i^* \hat{\eta}_i + K^*,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_1}$ положительны, $r_1 \leq r_0$. Отсюда

$$\varphi(\xi) = \lambda_1 \left(\hat{\eta}_1 + \frac{L_1^*}{2\lambda_1} \right)^2 + \dots + \lambda_{r_1} \left(\hat{\eta}_{r_1} + \frac{L_{r_1}^*}{2\lambda_{r_1}} \right)^2 + \sum_{i=r_1+1}^{r_0} L_i^* \hat{\eta}_i + K.$$

Таким образом, для $\varphi(\xi)$ получаем представление

$$\varphi(\xi) = \lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_{r_1} \eta_{r_1}^2 + \eta_0, \quad (17)$$

где $\eta_1, \dots, \eta_{r_1}, \eta_0$ — независимые нормально распределенные случайные величины, $D\eta_i = 1$, $i = 1, \dots, r_1$, $D\eta_0 \geq 0$. По условию леммы $\varphi(\xi)$ имеет нецентральное χ^2 -распределение с r степенями свободы. Следовательно (см., например, [7]), производящая функция моментов $\Phi(z)$ случайной величины $\varphi(\xi)/2$ имеет вид

$$\Phi(z) = e^{az/(2(1-z))} (1-z)^{-r/2},$$

где a — параметр нецентральности. С другой стороны, используя (17), получаем представление

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{1}{2} z \left(\eta_0 + \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i \eta_i^2 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{a_0}{2} z + \frac{\sigma_0^2}{8} z^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r_1} a_i^2 \frac{\lambda_i z}{1 - \lambda_i z} \right\} \prod_{i=1}^{r_1} (1 - \lambda_i z)^{-1/2}, \end{aligned}$$

где

$$a_i = \mathbf{E} \eta_i, \quad i = 0, 1, \dots, r_1, \quad \sigma_0^2 = D\eta_0.$$

Сравнивая эти два представления $\Phi(z)$, заключаем, что

$$r_1 = r, \quad \lambda_i = 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad D\eta_0 = 0, \quad \mathbf{E} \eta_0 = 0.$$

Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Если верна гипотеза H в схеме серий (5), то при $t_1 \rightarrow \infty$ плотность $p_{r, \alpha^2}(x_1, \dots, x_r)$ предельного распределения вектора $\chi^2/2$, определенного формулами (3) и (4), задается равенствами (7) и (8), в которых нужно положить

$$m - 1 = d_s, \quad \alpha^2 = \sum_{i,j=1}^N p_i p_j \varepsilon_{ij}^2.$$

Доказательство. Из формул (14) и (15) следует, что ковариационные матрицы векторов $\{\xi_I^{(s)}(t_i)\}$, $i = 1, \dots, r$, одинаковы. Согласно лемме 2, существует ортогональная матрица C , одинаковая для всех $u = 1, \dots, r$, такая, что у векторов

$$\{\eta_I^{(u)}\} = C\{\xi_I^{(s)}(t_u)\}, \quad u = 1, \dots, r,$$

d_s компонент независимы и имеют асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, а остальные компоненты являются постоянными величинами. Кроме того, для $u = 1, \dots, r$,

$$\chi_u^2 = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N (\eta_I^{(u)})^2,$$

где

$$\text{cov}(\eta_I^{(u_1)}, \eta_I^{(u_2)}) = \rho_{u_1, u_2}, \quad \mathbf{E}\eta_I^{(u)} = \rho_{ur}\tilde{\alpha}_I^{(s)}, \quad \{\tilde{\alpha}_I^{(s)}\} = C\{\alpha_I^{(s)}\},$$

и предел величин $\alpha_I^{(s)}$ при $t_1 \rightarrow \infty$ определяется формулой (11). Далее,

$$\sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N (\mathbf{E}\eta_I^{(u)})^2 = \rho_{ur}^2 \left(\sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N (\alpha_I^{(s)})^2 - \sum_{i_1, \dots, i_{s-1}=1}^N (\alpha_I^{(s-1)})^2 \right).$$

Теперь нужно воспользоваться леммой 1. Для получения выражения для параметра α^2 следует воспользоваться равенствами

$$\sum_{i=1}^N p_i \varepsilon_i = 0, \quad \sum_{j=1}^N p_{ij} \varepsilon_j = 0, \quad \sum_{i_1, \dots, i_u=1}^N p_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{u-1} i_u} = p_{i_u}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N (\alpha_I^{(s)})^2 &= \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^N (\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_1 i_2} + \dots + \varepsilon_{i_{s-1} i_s})^2 p_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{s-1} i_s} \\ &= s \sum_{i, j=1}^N p_i p_{ij} \varepsilon_{ij}^2, \end{aligned}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \sum_{i_1, \dots, i_{s-1}=1}^N (\alpha_I^{(s-1)})^2 = (s-1) \sum_{i, j=1}^N p_i p_{ij} \varepsilon_{ij}^2.$$

Вычитая второе предельное значение из первого, получим приведенное в формулировке теоремы выражение для α^2 .

Теорема доказана.

Отметим, что распределение вектора $\chi^2/2$ при гипотезе H_0 дается частным случаем теоремы, определяемым условиями

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Построение последовательного критерия и вычисление ошибок первого и второго рода этого критерия производится так же, как в [1].

Список литературы

1. Захаров В. К., Сарманов О. В., Севастьянов Б. А. Последовательный критерий χ^2 . *Матем. сборник* (1969) **79**, №3, 444–460.
2. Ивченко Г. И., Севастьянов Б. А. Процесс χ^2 и его применения в статистике. *Вероятностные распределения и математическая статистика*. ФАН, Ташкент, 1986, 188–198.
3. Степанов В. Е. Некоторые статистические критерии для цепей Маркова. *Теория вероятн. и ее применения* (1957) **2**, №1, 143–144.
4. Башарин Г. П. Об использовании критерия согласия χ^2 в качестве критерия независимости испытаний. *Докл. АН СССР* (1957) **117**, №2, 167–170.
5. Billingsley P. Statistical methods in Markov chains. *Ann. Math. Statist.* (1961) **32**, №1, 12–40.
6. Романовский В. И. *Дискретные цепи Маркова*. ГИТТЛ, Москва, 1949.
7. Рао С. Р. *Линейные статистические методы и их применения*. Наука, Москва, 1968.