Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Щербакова, Классы ориентированных градуированных графов с полиномиально разрешимой мощностной задачей Штейнера, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 73–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:06:56

Классы ориентированных градуированных графов с полиномиально разрешимой мощностной задачей Штейнера

© 1997 г. В. А. Щербакова

Рассматривается задача Штейнера на ориентированных градуированных графах, где стоимость всех дуг единична. Дается описание двух классов графов, в которых рассматриваемая задача разрешима за полиномиальное время. Графы из этих классов получаются из деревьев добавлением вершин и ребер, образующих пути длины 2, с сохранением градуированности и достижимости. Предлагаются алгоритмы решения мощностной задачи Штейнера на графах из описанных классов и алгоритмы распознавания принадлежности произвольно-ориентированного градуированного графа этим классам. Сложность этих алгоритмов есть $O(n^4)$, где n — число вершин в графе.

1. Введение

В данной статье рассматривается мощностная задача Штейнера на ориентированном градуированном графе:

для заданного ориентированного, связного по корню r (каждая вершина v в G достижима из корня r), градуированного (длины всех путей из r в v одинаковы) графа $G = (V, E)$ и подмножества $H \subseteq V$ вершин графа G , называемых помеченными, найти дерево Штейнера $T = (V', E')$, т.е. поддереву графа G , связное по корню r , содержащее все помеченные вершины, такое, что мощность $|E'|$ минимальна.

Эта задача, являющаяся частным случаем NP-трудной задачи Штейнера на ориентированном графе, остается NP-трудной, что, в частности, показано в [1]. Поэтому представляет интерес проблема поиска таких классов графов, на которых рассматриваемая задача была бы полиномиально разрешимой.

Известно, что задача Штейнера на ориентированном графе полиномиально разрешима в классе последовательно-параллельных графов [2]. В [2] высказано предположение, что это верно и в случае ориентированных последовательно-параллельных графов (т.е. ориентированных графов, которые при отбрасывании ориентации становятся последовательно-параллельными).

В данной статье, в разделах 3 и 4, дается описание двух классов ориентированных градуированных графов, в которых, при подходящем расположении помеченных вершин, мощностная задача Штейнера полиномиально разрешима. Для

каждого из этих классов графов предлагается алгоритм распознавания принадлежности произвольного ориентированного градуированного графа указанному классу, а также алгоритм решения мощностной задачи Штейнера. Сложность построенных алгоритмов полиномиально зависит от размера графа.

Далее используются следующие обозначения: $p(u, v)$ — путь из u в v , $\rho(u, v)$ — расстояние от u до v , т.е. число ребер в пути из u в v , $\text{In}(v)$ — множество всех заходящих в v вершин, т.е. множество вершин, являющихся концами входящих в v ребер, $\text{Out}(v)$ — множество всех исходящих из v вершин, т.е. множество вершин, являющихся концами исходящих из v ребер, $V(G)$ — множество вершин графа G , $E(G)$ — множество ребер графа G , $A \leftarrow B$ обозначает процедуру переноса элементов множества B в множество A , $V_i(G)$ — множество вершин i -го уровня графа G , т.е.

$$V_i(G) = \{v \in G \mid \rho(r, v) = i\}.$$

2. Задача Штейнера на ориентированном графе

Если ориентированный градуированный граф G является деревом (т.е. при отбрасывании ориентации граф G не имеет циклов), то каждая вершина в G , кроме корня r , имеет только одну входящую вершину, где входящей (соответственно, исходящей) вершиной мы называем второй конец входящего (исходящего) ребра. Следовательно, для каждой помеченной вершины заходящая в нее вершина обязана лежать в дереве Штейнера.

Таким образом, получаем простой алгоритм построения дерева Штейнера:

```
procedure STEINER.TREE;
begin
   $H \leftarrow V(T)$ ;
  for  $i :=$  максимальный уровень to 1 do
    for  $v \in V_i(G)$  do
      if  $v \in V(T)$  then
         $\text{In}(v) \leftarrow V(T)$ ;
       $E(T) := E(G) \cap (V(T) \times (V(T))$ ;
end.
```

Очевидно, что сложность этого алгоритма есть $O(|V|)$ при условии, что хранится список $\text{In}(v)$ для каждой вершины v .

Для произвольного ориентированного градуированного графа G , если вычислены $\text{In}(v)$, алгоритм распознавания принадлежности графа классу деревьев состоит в подсчете числа вершин в $\text{In}(v)$ для всех $v \in G \setminus \{r\}$. Если $|\text{In}(v)| = 1$ для всех $v \neq r$, то G — дерево, в противном случае это не так. Этот алгоритм также линеен.

3. Класс TP_2

Графы из класса TP_2 получаются из ориентированных деревьев добавлением путей длины 2 с сохранением градуированности.

Определение 1. Ориентированное дерево с корнем r принадлежит классу TP_2 .

Рис. 1.

Если $G \in TP_2$, то граф

$$G^* = (V \cup \{v\}, E \cup \{(u, v), (v, w)\}),$$

где $u, w \in V(G)$, $v \notin V(G)$, $\rho(u, v) = 2$ в графе G , тоже принадлежит классу TP_2 (см. рис. 1).

Класс TP_2 является подклассом ориентированных градуированных графов, так как любое ориентированное дерево является градуированным графом, а добавление пути сохраняет градуированность. Из определения 1 также следует, что класс TP_2 содержит в себе класс всех ориентированных деревьев.

Определение 2. Вершина v в графе G удовлетворяет правилу 1, если ее полустепени захода и исхода равны единице и существует такая вершина v' , что $\text{In}(v') \supseteq \text{In}(v)$ and $\text{Out}(v') \supseteq \text{Out}(v)$.

Лемма 1. Если $G \in TP_2$, то, удаляя все вершины, удовлетворяющие правилу 1, пока такие существуют, получим ориентированное дерево с одним корнем.

Доказательство. Граф G получен из ориентированного дерева T добавлением вершин $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Пусть, удалив вершины $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, удовлетворяющие правилу 1, получим граф G^* , не являющийся деревом.

Пусть существует b_i — первая в B вершина, не лежащая в A . Поскольку она удовлетворяет правилу 1 она лежит в цикле $\{u, v, b_i, w\}$, где u — заходящая в v и b_i вершина, w — общая для v и b_i исходящая вершина. Поскольку $b_i \in T$ и полустепени захода и исхода b_i равны единице, справедливы включения $u, w \in T$. Тогда все остальные вершины, исходящие из u и заходящие в w , должны лежать в A .

Если хотя бы одна из этих вершин имеет полустепени захода и исхода в графе $G \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$, равные единице, то она удовлетворяет правилу 1. Следовательно, можно в B заменить b_i на новую вершину, лежащую в A . Если такой вершины нет, то заменим в T вершину b_i на любую вершину a_j , исходящую из u и входящую в w , соответственно в A заменим a_i на b_i .

Рис. 2.

Проведя такие замены для всех возможных вершин, получим, что граф G построен из дерева T^* добавлением вершин $A^* = \{a_1, \dots, a_k\}$. Удалив из G вершины $B^* \subseteq A^*$, $B^* = \{b_1, \dots, b_m\}$, получим граф G^* , не являющийся деревом.

Очевидно, что $T^* \subseteq G^*$. Рассмотрим вершину $a_j \in G^*$, $a_j \notin B^*$, с наибольшим индексом j в A^* . Поскольку $\{a_{j+1}, \dots, a_k\} \subseteq B^*$, справедливо соотношение $\{a_{j+1}, \dots, a_k\} \cap G^* = \emptyset$. Следовательно, полустепени захода и исхода a_j в G^* равны единице. Так как a_j была добавлена в соответствии с определением 1, существует вершина $v' \in G^*$ такая, что у v' и a_j есть общая заходящая и общая исходящая вершины. Тогда a_j удовлетворяет правилу 1, и мы получаем противоречие.

Следовательно, G^* — дерево с тем же корнем r , что и граф G . Лемма 1 доказана.

Определение 3. Короной длины n будем называть граф $G = (V, E)$, где

$$V = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{u_1, \dots, u_n\},$$

$$E = \{(v_i, u_i), (v_i, u_{(i+1) \pmod n}) \mid i = 1, \dots, n\}$$

(см. рис. 2).

Определение 4. В графе будем называть M -конфигурацией пять вершин $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3\}$ таких, что существуют пути

$$p(v_1, u_1), \quad p(v_1, u_2), \quad p(v_2, u_2), \quad p(v_2, u_3)$$

и не существует путей

$$p(v_1, v_2), \quad p(v_1, u_3), \quad p(v_2, u_1).$$

Вершины u_1, u_3 будем называть крайними в M -конфигурации, а вершину u_2 средней (см. рис. 3).

Теорема 1. Граф $G \in TP_2$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим условиям.

- (1) Граф G — ориентированный градуированный граф, связный по корню r .
- (2) В каждом цикле длины, большей четырех, любое ребро принадлежит циклу длины четыре.

Рис. 3.

Рис. 4.

- (3) В графе G нет подграфов-корон длины n для любого $n \geq 2$.
- (4) В графе G нет M -конфигураций с висячими в G крайними вершинами.

Лемма 2. Если граф G удовлетворяет условиям 1–4 теоремы 1, то либо G является ориентированным деревом с одним корнем r , либо существует вершина $v \in G$, удовлетворяющая правилу 1.

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условиям 1–4, но не является деревом и не существует вершины, удовлетворяющей правилу 1.

Проведем доказательство индукцией по количеству уровней графа G .

Пусть в G три уровня. Рассмотрим цикл $\{u, v_1, v_2, w\}$ (см. рис. 4). При этом $u = r$. Из условия 1 следует, что $\text{In}(v_1) = r = \text{In}(v_2)$.

Если $|\text{Out}(v_1)| = 1$ (или $|\text{Out}(v_2)| = 1$), то получим вершину v_1 (или v_2), удовлетворяющую правилу 1, т.е. получим противоречие. Следовательно, $|\text{Out}(v_1)| > 1$, $|\text{Out}(v_2)| > 1$.

Если $\text{Out}(v_1) \subseteq \text{Out}(v_2)$ (или $\text{Out}(v_2) \subseteq \text{Out}(v_1)$), то получим граф $K_{2,2}$, являющийся короной длины 2.

Если существует $w_1 \neq w$, $w_1 \in \text{Out}(v_1)$, $w_1 \notin \text{Out}(v_2)$, и существует $w_2 \neq w$, $w_2 \in \text{Out}(v_2)$, $w_2 \notin \text{Out}(v_1)$, то получим M -конфигурацию $\{v_1, v_2, w_1, w, w_2\}$ с висячими крайними вершинами, т.е. получим противоречие.

Следовательно, либо G — дерево, либо есть вершина, удовлетворяющая правилу 1.

Пусть лемма 2 верна для всех графов с $l - 1$ уровнем вершин, где $l > 3$. Пусть в графе G имеется l уровней.

Из предположения, что G не является деревом, и из условия 2 следует, что существует цикл $\{u, v_1, v_2, w\}$ такой, что v_1 и v_2 лежат на одном уровне, u — общая заходящая вершина для v_1 и v_2 , а w — общая исходящая вершина для v_1 и v_2 , лежащая на наибольшем уровне. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Вершина w лежит не на последнем уровне (т.е. нет таких циклов, в которых w лежала бы на последнем уровне). Тогда, удалив все вершины последнего уровня, получим граф G^* с $l - 1$ уровнем, удовлетворяющий условиям 1–3 теоремы 1.

Если в G^* есть M -конфигурация с висячими крайними вершинами, то, добавив к крайним вершинам по одной исходящей вершине последнего уровня, из числа удаленных из G , получим M -конфигурацию с висячими крайними вершинами в G , т.е. получим противоречие. Следовательно, G^* удовлетворяет условию 4.

По предположению индукции либо G^* — дерево, тогда G — тоже дерево, либо в G^* существует вершина, удовлетворяющая правилу 1, тогда эта же вершина есть и в G .

Случай 2. Вершина w лежит в последнем уровне. Построим граф G^* , отбросив в G корень r и заменив все вершины первого уровня новым корнем r^* .

Очевидно, что G^* удовлетворяет условиям 1–4 и не является деревом. Следовательно, существует вершина v , удовлетворяющая правилу 1. Если v лежит в G^* не на первом уровне, то эта же вершина удовлетворяет правилу 1 и в графе G .

Пусть вершина v лежит в G^* на первом уровне и не удовлетворяет правилу 1 в графе G . Тогда в G вершина v имеет полустепень исхода, равную единице, а полустепень захода, большую единицы.

(а) Вершина v' , у которой с v есть общая исходящая вершина s , имеет полустепень исхода, равную единице (рис. 5). Для того, чтобы v' не удовлетворяла правилу 1, должна существовать входящая в v' вершина a_2 такая, что $a_2 \notin \text{In}(v)$. Вершины a_1 и a_2 имеют только одну входящую вершину, корень r . Чтобы они не удовлетворяли правилу 1, должны существовать вершины b_1 и b_2 такие, что

$$b_1 \in \text{Out}(a_1), \quad b_1 \notin \text{Out}(a_2), \quad b_2 \in \text{Out}(a_2), \quad b_2 \notin \text{Out}(a_1).$$

Из условия 4 следует, что все висячие вершины, достижимые из b_1 (b_2), должны быть достижимы из b_2 (b_1) или s .

Легко показать, что если существует вершина, достижимая из b_1 и b_2 , то должна существовать общая исходящая вершина из b_1 и b_2 . Однако тогда должна существовать и общая заходящая вершина для b_1 и b_2 , которая будет лежать в короне, соединяющей b_1 и b_2 .

Рис. 5.

Рис. 6.

Аналогично, если для каждой вершины $c_i \in \text{Out}(b_i)$ и c существует общая достижимая висячая вершина, то существует общая исходящая вершина, а следовательно, общая заходящая вершина, т.е. существует $b_3 \neq v$, $b_3 \neq v'$, из которой исходят c_i и c . В случае $|\text{Out}(b_i)| > 1$ получаем корону. Если $b_3 = b_1$, то пары вершин b_1 и v , b_1 и v' должны иметь общие заходящие вершины, получаем корону. Если $b_3 \neq b_1$, то пары b_3 и v , b_3 и v' , b_1 и b_3 должны иметь общие заходящие вершины, снова получаем корону.

(б) Полустепень исхода вершины v' больше единицы (рис. 6). Тогда должны существовать входящая в v вершина a_1 и исходящая из v' вершина c_2 . Для того, чтобы a_1 не удовлетворяла правилу 1, должна существовать вершина $b_1 \neq v$, $b_1 \neq v'$ исходящая из a_1 .

Из условия 4 следует, что либо всякая висячая вершина, достижимая из b_1 , достижима из v' , тогда существует корона, соединяющая b_1 и v' , либо всякая висячая вершина, достижимая из c_2 , достижима или из b_1 , тогда получаем случай, аналогичный рассмотренному в пункте (а), или из c , тогда полустепень исхода вершины c_2 равна единице. Итак, мы получили вершину $c_2 \neq v$, аналогичную вершине v . Продолжая рассуждения, будем находить новые вершины c_i , свойства которых

такие же, как у v , что противоречит конечности графа.

Рассмотрев все случаи, мы получали вершину, удовлетворяющую правилу 1, либо приходили к противоречию. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $G \in TP_2$. Выполнение условий 1 и 2 очевидно следует из определения 1.

Докажем справедливость условия 3. Если в G есть корона длины n , то, удалив все вершины, удовлетворяющие правилу 1, мы должны получить дерево. Однако ни одна вершина короны не удовлетворяет правилу 1. Следовательно, корона длины n сохранится после удаления вершин по правилу 1. Получаем противоречие.

Докажем справедливость условия 4. Если в G есть M -конфигурация, то после удаления вершин по правилу 1, в графе останется цикл, проходящий через среднюю вершину этой M -конфигурации. Получаем противоречие.

Пусть теперь G удовлетворяет условиям 1–4. По лемме 2 либо G — дерево, либо существует вершина v_1 , удовлетворяющая правилу 1. Очевидно, что граф $G \setminus \{v_1\}$ снова удовлетворяет условиям 1–4.

Выбирая таким образом вершины $\{v_1, \dots, v_k\}$, в конце получим дерево $T = G \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$. Следовательно, граф G можно получить из дерева T добавлением вершин $\{v_k, \dots, v_1\}$. По определению 1 такой граф принадлежит TP_2 .

Теорема 1 доказана.

Граф G и множество H помеченных вершин задают мощностную задачу Штейнера из класса $K(TP_2)$, если G принадлежит TP_2 и G может быть разобран до дерева путем последовательного удаления непомеченных вершин, удовлетворяющих правилу 1. Тогда алгоритм решения задачи из класса $K(TP_2)$ состоит в последовательном поиске и удалении непомеченных вершин, удовлетворяющих правилу 1, и поиске дерева Штейнера в полученном дереве.

Временная сложность алгоритма сведения графа $G \in TP_2$ к дереву составляет $O(|V|^4)$ при условии, что хранятся $\text{In}(v)$ и $\text{Out}(v)$ для каждой вершины графа G и удаление вершины и ребра занимает постоянное время. Поскольку поиск дерева Штейнера на дереве занимает $O(|V|)$ времени, сложность алгоритма поиска дерева Штейнера в классе $K(TP_2)$ составляет $O(|V|^4)$.

Распознавание принадлежности произвольного ориентированного градуированного графа классу TP_2 состоит из процедуры удаления всех вершин, удовлетворяющих правилу 1, и проверки принадлежности полученного графа классу деревьев. Сложность этого алгоритма есть также $O(|V|^4)$.

4. Класс TS_2

Графы из класса TS_2 получаются из ориентированных деревьев добавлением ориентированной звезды, т.е. набора ребер

$$(u_i, v), (v, w_j), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Определение 5. Ориентированное дерево с корнем r принадлежит классу TS_2 .

Если $G \in TS_2$, то граф

$$G^* = (V \cup \{v\}, E \cup \{(u, v) \mid u \in U\} \cup \{(v, w) \mid w \in W\}),$$

Рис. 7.

где $v \notin V(G)$, $v' \in V(G)$, $U \subseteq \text{In}(v')$, $W \subseteq \text{Out}(v')$, $U \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$, тоже принадлежит классу TS_2 (см. рис. 7).

Очевидно, что класс TS_2 является подклассом класса ориентированных градуированных графов и содержит в себе класс TP_2 .

Определение 6. Вершина v в графе G удовлетворяет правилу 2, если $|\text{In}(v)| > 0$, $|\text{Out}(v)| > 0$, и существует вершина v' такая, что $\text{In}(v') \supseteq \text{In}(v)$ и $\text{Out}(v') \supseteq \text{Out}(v)$.

Лемма 3. Если $G \in TS_2$, то, удалив все вершины, удовлетворяющие правилу 2, получим ориентированное дерево с одним корнем.

Доказательство. Граф G получен из ориентированного дерева T добавлением вершин $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Пусть, удалив вершины $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, удовлетворяющие правилу 2, получим граф G^* , не являющийся деревом.

Пусть существует вершина $b_i \in B$, $b_i \notin A$, с наименьшим в B индексом i . Поскольку она удовлетворяет правилу 2, существует вершина v' такая, что

$$\text{In}(b_i) \subseteq \text{In}(v'), \quad \text{Out}(b_i) \subseteq \text{Out}(v').$$

Вершина $b_i \in T$, следовательно, существуют $u \in \text{In}(b_i)$ и $w \in \text{Out}(b_i)$, $u, w \in T$. Тогда любая вершина, исходящая из u и входящая в w , должна лежать в A .

Если среди таких вершин есть вершина a_j такая, что

$$\text{In}(a_i) \subseteq \text{In}(b_i), \quad \text{Out}(a_i) \subseteq \text{Out}(b_i),$$

то заменим в B вершину b_i на a_j .

Если такой вершины нет, то заменим в T вершину b_i на любую a_j , исходящую из u и входящую в w , соответственно, в A заменим a_j на b_i .

Проведя такие замены для всех возможных вершин, получим, что граф G построен из дерева T^* добавлением вершин $A^* = \{a_1, \dots, a_k\}$. Удалив из G вершины множества $B^* = \{b_1, \dots, b_m\}$, $B^* \subseteq A^*$, получим граф G^* , не являющийся деревом.

Очевидно, что $T^* \subseteq G^*$. Рассмотрим вершину $a_j \in G^*$, $a_j \notin B^*$, с наибольшим в A^* индексом j . Поскольку $\{a_{j+1}, \dots, a_k\} \subseteq B^*$, имеем $\{a_{j+1}, \dots, a_k\} \cap G^* = \emptyset$. Следовательно, $\text{In}(a_j)$ и $\text{Out}(a_j)$ в G^* такие же, как на момент добавления a_j , т.е. существует $v' \in G^*$ такая, что

$$\text{In}(a_i) \subseteq \text{In}(v'), \quad \text{Out}(a_i) \subseteq \text{Out}(v').$$

Таким образом, a_j удовлетворяет правилу 2, получаем противоречие.

Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Граф $G \in TS_2$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим условиям.*

- (1) *Граф G — ориентированный градуированный граф, связный по корню r .*
- (2) *Если две вершины одного уровня имеют общую исходящую вершину, то у них есть общая заходящая вершина.*
- (3) *В каждом цикле длины, большей четырех, любое ребро принадлежит циклу длины четыре.*
- (4) *Если в графе G есть M -конфигурация с висячими крайними вершинами v_1 и v_2 , то существует вершина w , из которой достижимы средняя и обе крайние вершины M -конфигурации и*

$$\rho(r, w) \geq \min(\rho(r, v_1), \rho(r, v_2))$$

(см. рис. 3)

Лемма 4. *Если граф G удовлетворяет условиям 1–4 теоремы 2, то либо G является ориентированным деревом с корнем r , либо существует вершина $v \in G$, удовлетворяющая правилу 2.*

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условиям 1–4, но не является деревом и не существует вершин, удовлетворяющих правилу 2.

Проведем доказательство индукцией по числу уровней в графе G .

Пусть в графе G три уровня вершин. Рассмотрим цикл $\{u, v_1, v_2, w\}$ (рис. 8). При этом $u = r$. Из условия 1 следует, что $\text{In}(v_1) = r = \text{In}(v_2)$.

Если $\text{Out}(v_1) \not\subseteq \text{Out}(v_2)$ и $\text{Out}(v_2) \not\subseteq \text{Out}(v_1)$, то имеем M -конфигурацию для каждой вершины $u_1 \in \text{Out}(v_1) \setminus \text{Out}(v_2)$ и каждой вершины $u_3 \in \text{Out}(v_2) \setminus \text{Out}(v_1)$. По условию 4 для каждой M -конфигурации существует вершина v_3 , входящая для u_1 , w , и u_3 .

Если все эти вершины различны, то получим корону длины

$$n = |\text{Out}(v_2) \setminus \text{Out}(v_1)| + |\text{Out}(v_1) \setminus \text{Out}(v_2)|.$$

Тогда по условию 3 существует вершина v^* такая, что $\text{In}(v^*) = r$, $\text{Out}(v^*) \supseteq \text{Out}(v_1)$, т.е. v_1 удовлетворяет правилу 2. Получаем противоречие.

Рис. 8.

Если все вершины v_3 совпадают, то получим, что $\text{Out}(v_3) \supseteq \text{Out}(v_1)$, т.е. v_1 удовлетворяет правилу 2.

Если совпадают только некоторые из v_3 , то получим корону длины, меньшей n , содержащую все вершины из $\text{Out}(v_1)$. Таким образом, v_1 снова удовлетворяет правилу 2. Получаем противоречие.

Следовательно, либо G — дерево, либо есть вершина, удовлетворяющая правилу 2.

Пусть теперь лемма 4 верна для всех графов с $l - 1$ уровнем вершин, $l > 3$.

Пусть в графе G имеется l уровней. Построим граф G^* , удалив в G корень r и заменив все вершины первого уровня новым корнем r^* . Очевидно, что G^* имеет $l - 1$ уровней и удовлетворяет условиям 1–4. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Пусть G^* — дерево. Тогда в G есть циклы вида $\{r, v_1, v_2, w\}$, где v_1, v_2 лежат на первом уровне, а w на втором. Кроме того, циклов на других уровнях нет.

Если $\text{Out}(v_1) \not\subseteq \text{Out}(v_2)$ и $\text{Out}(v_2) \not\subseteq \text{Out}(v_1)$, то имеются такие M -конфигурации, что вершины v_3 , из которых достижимы крайние и средняя вершины, могут лежать только на первом уровне. Рассмотрев их, как и в случае графа на трех уровнях, получим вершину, удовлетворяющую правилу 2, т.е. получим противоречие.

Случай 2. Пусть в G^* есть вершина v , удовлетворяющая правилу 2 и лежащая не на первом уровне. Тогда эта же вершина будет удовлетворять правилу 2 и в графе G . Получаем противоречие.

Случай 3. Пусть в G^* есть вершина u_2 , удовлетворяющая правилу 2 и лежащая на первом уровне, т.е. в G есть вершина u_1 такая, что $\text{Out}(u_2) \subseteq \text{Out}(u_1)$, но $\text{In}(u_2) \not\subseteq \text{In}(u_1)$ (см. рис. 9). Поскольку v_2 не должна удовлетворять правилу 2, существует $u_3 \notin \text{Out}(v_1)$.

(а) Пусть в G есть M -конфигурация, проходящая через $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3\}$. Тогда есть общая входящая для u_2, u'_1, u'_3 вершина v_3 , где $\{v_1, v_2, u'_1, u_2, u'_3\}$ лежат в некоторой M -конфигурации.

Если все вершины из $\text{Out}(v_1)$ лежат в какой-нибудь M -конфигурации, то из условий 3, 4, и конечности ширины графа получаем, что существует вершина v_3 такая, что

$$\text{Out}(v_1) \subseteq \text{Out}(v_3), \quad \text{In}(v_1) = \text{In}(v_2) = r,$$

Рис. 9.

т.е. v_1 удовлетворяет правилу 2. Получаем противоречие.

(b) Вершины $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3\}$ не лежат в M -конфигурации из-за достижимости крайних висячих вершин из v_1 и v_2 . Тогда любая пара вершин u_1, u_3^* , где

$$u_3^* \in \text{Out}(v_2), \quad u_3^* \neq u_2,$$

имеет общую достижимую вершину, следовательно, общую исходящую и общую заходящую вершины. Это же верно и для любой пары u_1^*, u_3 , где $u_1^* \in \text{Out}(v_1)$. Тогда из условия 3 следует, что найдется вершина v^* такая, что

$$\text{Out}(v_1) \subseteq \text{Out}(v^*), \quad \text{In}(v^*) = r,$$

т.е. v_1 удовлетворяет правилу 2. Получаем противоречие.

(c) Вершины $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3\}$ не лежат в M -конфигурации из-за достижимости одной крайней вершины из средней. Тогда любая пара u_1^*, u_2 , где $u_1^* \in \text{Out}(v_1)$, $u_1^* \neq u_2$, имеет общую исходящую и общую входящую вершины. Это приводит к тому, что найдется вершина v^* такая, что

$$\text{Out}(v_1) \subseteq \text{Out}(v^*), \quad \text{In}(v^*) = r.$$

Таким образом, мы опять получаем противоречие.

Все случаи привели к противоречию, следовательно, граф G — дерево или в G есть вершина, удовлетворяющая правилу 2. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $G \in TP_2$. Выполнение условий 1 и 2 прямо следует из определения 5.

Докажем справедливость условия 3. Если в G есть корона длины n , то, удалив все вершины, удовлетворяющие правилу 2, мы должны получить дерево. Для этого нужно, чтобы были удалены все (кроме, быть может, одной) верхние вершины короны и чтобы оставшиеся вершины не имели общих исходящих вершин в короне. Это возможно только тогда, когда все нижние вершины короны имеют общую входящую вершину.

Докажем справедливость условия 4. Пусть в G есть M -конфигурация, но не существует вершины, из которой достижимы крайние и средняя вершины. Тогда средняя вершина и два входящих в нее ребра останутся после удаления всех вершин, удовлетворяющих правилу 2. Получаем противоречие.

Пусть теперь G удовлетворяет условиям 1–4. По лемме 4 либо G — дерево, либо существует вершина v_1 , удовлетворяющая правилу 2. Очевидно, граф $G \setminus \{v_1\}$ снова удовлетворяет условиям 1–4.

Выбирая таким образом вершины $\{v_1, \dots, v_k\}$, в конце получим дерево $T = G \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$. Следовательно, граф G можно получить из дерева T добавлением вершин $\{v_k, \dots, v_1\}$. По определению 5 такой граф принадлежит TS_2 .

Теорема 2 доказана.

Граф G и множество H немеченных вершин задают мощностную задачу Штейнера из класса $K(TS_2)$, если G принадлежит TS_2 и G может быть разобран до дерева путем последовательного удаления немеченных вершин, удовлетворяющих правилу 2. Тогда алгоритм решения задачи из класса $K(TS_2)$ состоит в последовательном поиске и удалении немеченных вершин, удовлетворяющих правилу 2, и поиске дерева Штейнера в полученном дереве. Сложность этого алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Распознавание принадлежности произвольного ориентированного градуированного графа классу TS_2 состоит из процедуры удаления вершин, удовлетворяющих правилу 2, до тех пор, пока такие вершины существуют, и проверки, является ли полученный граф деревом. Сложность этого алгоритма есть также $O(|V|^4)$.

Список литературы

1. Щербакова В. А. Минимальные деревья, связывающие заданное подмножество вершин в ориентированном градуированном графе. Деп. ВИНТИ 21.10.94, №2391–В94.
2. Takamizawa K., Nishizeki T., Saito N. Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs. *J. Assoc. Computing Machinery* (1982) **29**, 623–641.

Статья поступила 08.09.1994.

Переработанный вариант поступил 07.09.1997.