Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Стеценко, Об одном виде раскраски ребер графа в предписанные цвета, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 92–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:43:46

Об одном виде раскраски ребер графа в предписанные цвета

© 1997 г. О. П. Стеценко

Рассматривается раскраска ребер графа в предписанные цвета, при которой ребра одного цвета образуют связный граф. Получено достаточное условие существования такой раскраски для леса, состоящего из деревьев с четным числом ребер.

Рассмотрим произвольный граф G , состоящий из n ребер. Пусть каждому ребру i предписано некоторое непустое множество цветов S_i , $i = 1, \dots, n$. При раскраске ребер графа G в предписанные цвета каждое ребро i получает один из цветов множества S_i , $i = 1, \dots, n$. Если при этом все ребра одного цвета образуют связный подграф, то такую раскраску будем называть правильной.

Лемма 1. Пусть T — дерево с четным числом ребер $|E(T)| = 2m$, где m — целое положительное число. Тогда существует нумерация ребер, при которой любые два ребра с номерами вида $2i$ и $2i - 1$, $i = 1, \dots, m$, смежны.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по m . При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $m \geq 2$. Найдем два смежных висячих ребра или висячий двухзвенник. Отбросим эти два ребра вместе с их одновалентными концами или двухзвенник вместе со средней и концевой вершинами. В результате получим дерево T' , состоящее из четного числа $2(m - 1)$ ребер. Пронумеруем ребра дерева T' так, что любые два ребра с номерами вида $2i$ и $2i - 1$, $i = 1, \dots, m - 1$, были смежны. Это можно сделать по предположению индукции. Теперь восстановим дерево T и присвоим отброшенным ранее ребрам номера $2m$ и $2m - 1$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть G — лес с числом ребер $|E(G)| = 2k$. Предположим, что каждая компонента связности G имеет четное число ребер. Если каждому ребру G предписано k цветов, то G допускает правильную раскраску.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Для $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что теорема верна для $k - 1$, и докажем ее для k . Пронумеруем ребра леса таким образом, что любые два ребра с номерами вида $2i$ и $2i - 1$, $i = 1, \dots, k$, смежны. В силу леммы 1 это можно сделать, пронумеровав последовательно ребра каждого дерева. Вместе с ребром получит номер и предписанное ему множество цветов.

Рассмотрим семейство предписанных множеств $\{S_1, S_2, \dots, S_{2k-1}, S_{2k}\}$, где S_i предписано i -му ребру леса G , $i = 1, \dots, 2k$. Предположим, что существует такая пара номеров вида $2i$ и $2i - 1$, что $S_{2i} \cap S_{2i-1} \neq \emptyset$. Возьмем какой-нибудь элемент из множества $S_{2i} \cap S_{2i-1}$, обозначим его v . Вычеркнем элемент v из всех остальных предписанных множеств (там, где его нет, вычеркнем любой элемент). Далее, выбросим из леса G ребра с номерами $2i$ и $2i - 1$. В итоге получим новый лес из деревьев с четными числами ребер, в котором $2(k - 1)$ ребер. При этом мощность каждого из предписанных множеств цветов равна $k - 1$. По предположению индукции такой лес допускает правильную раскраску. Рассмотрим соответствующий такой раскраске набор цветов

$$a_1, a_2, \dots, a_{2i-1}, a_{2i}, \dots, a_{2k},$$

где номер элемента соответствует номеру ребра. Восстановим первоначальный лес. К уже использованным цветам добавим цвет v , в который раскрасим восстановленные смежные ребра с номерами $2i$ и $2i - 1$. Нигде больше цвет v не появится, так как из всех остальных списков он был вычеркнут.

Если же $S_{2i} \cap S_{2i-1} = \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, k$, то выполняется условие теоремы Холла о системе различных представителей [1]. Действительно, пусть $B_{r,t}$ — произвольный набор (блок) из r множеств семейства $\{S_1, \dots, S_{2k}\}$, содержащий t различных элементов. Покажем, что выполняется неравенство

$$r \leq t. \quad (1)$$

По условию $|S_i| = k$, $i = 1, \dots, 2k$, следовательно, всегда $t \geq k$. Таким образом, при $r \leq k$, неравенство (1) выполняется. Пусть теперь $r > k$. Семейство предписанных множеств распадается на k пар вида S_{2i} и S_{2i-1} . Если блок $B_{r,t}$ содержит более k множеств, то обязательно какие-то два из них попадут в одну пару. По предположению индукции множества из одной пары не пересекаются, следовательно, вместе они содержат $2k$ различных элементов. Значит, $t \geq 2k$. Но всегда $r \leq 2k$ и неравенство (1) доказано. Таким образом, для семейства предписанных множеств $\{S_1, \dots, S_{2k}\}$ существует система различных представителей. В этом случае представителя каждого из множеств мы и используем для раскраски соответствующего ребра.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Холл М., *Комбинаторика*. Мир, Москва, 1970.

Статья поступила 14.12.1995.