Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 100–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 05:10:05

Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент

© 1997 г. В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова

Пусть κ — момент вырождения критического ветвящегося процесса в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями $f_n(s)$ числа потомков n -го, $n = 1, 2, \dots$, поколения. При некоторых ограничениях на параметры функций $f_n(s)$ показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\kappa = n\} \sim cn^{-3/2},$$

где c — некоторая постоянная.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00338, и РФФИ-ИНТАС, проект 95-0099.

1. Введение

Ветвящиеся процессы в случайной среде являются довольно сложными вероятностными объектами, и к настоящему времени известно не так уж много результатов общего характера, описывающих поведение числа частиц или вероятности вырождения таких процессов. К числу наиболее изученных моделей ветвящихся процессов в случайной среде относится модель Смита и Вилкинсона [1], которая задается последовательностью производящих функций

$$f_n(s) = \pi_n^{(0)} + \pi_n^{(1)}s + \pi_n^{(2)}s^2 + \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где наборы неотрицательных случайных величин

$$\pi_n = (\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots), \quad i = 0, 1, \dots, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1,$$

независимы и одинаково распределены при разных n . Предполагается, что если наборы π_n , $n = 0, 1, \dots$, фиксированы, то размножение частиц в процессе происходит как в обычном неоднородном марковском ветвящемся процессе с дискретным временем, т.е. при фиксации общего числа $Z(n)$ частиц n -го поколения количество частиц $(n+1)$ -го поколения удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{M}[s^{Z(n+1)} | Z(0), Z(1), \dots, Z(n); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n] = (f_n(s))^{Z(n)}.$$

Ветвящийся процесс в случайной среде называется надкритическим, критическим и докритическим, если, соответственно, $\mathbf{M} \log f'_0(1)$ положительно, равно нулю, или отрицательно. Пусть $\kappa = \min\{n > 0: Z(n) = 0\}$. В дальнейшем предполагается, что $Z(0) = 1$. Случай $Z(0) = k > 1$ требует лишь несущественной модификации рассуждений.

Известно [1], что если $\mathbf{M} \log f'_0(1) \leq 0$ и $\mathbf{P}\{f_0(s) = s\} < 1$, то $\mathbf{P}\{\kappa < \infty\} = 1$. Более того, если

$$\mathbf{M} \log f'_0(1) = 0, \quad 0 < \mathbf{D} \log f'_0(1) < \infty, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{M} f''_0(1)(f'_0(1))^{-2} < \infty, \quad \mathbf{M} f''_0(1)(f'_0(1))^{-2} \log f'_0(1) < \infty, \quad (1.2)$$

то (см. [2]) существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 n^{-1/2} \leq \mathbf{P}\{\kappa > n\} \leq c_2 n^{-1/2}. \quad (1.3)$$

В [2] установлено также, что если при выполнении условий (1.1) и (1.2) функции $f_n(s)$ имеют вид

$$1 - f_n(s) = \frac{\alpha(n)}{1 - \beta(n)} - \frac{\alpha(n)s}{1 - \beta(n)s}, \quad (1.4)$$

где $0 \leq \alpha(n)$, $\beta(n) < 1$ и $\alpha(n) + \beta(n) < 1$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\kappa > n\} \sim c_3 n^{-1/2}, \quad (1.5)$$

где c_3 — положительная постоянная.

В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначения

$$X_i = \log f'_{i-1}(1), \quad S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Если случайное блуждание S_n нерешетчатое, выполнены условия (1.1), (1.2), (1.4), и

$$\mathbf{M}(f_0(0))^{-1} < \infty, \quad \mathbf{M}(1 - f_0(0))^{-1} < \infty, \quad (1.6)$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\kappa = n\} \sim c n^{-3/2}. \quad (1.7)$$

Здесь и ниже через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаются положительные постоянные, не обязательно одинаковые в разных формулах.

Замечание 1. Случай, когда S_n — решетчатое случайное блуждание, также может быть исследован методами данной статьи. При этом необходимо вместо соответствующих результатов для нерешетчатых случайных блужданий использовать естественные аналоги этих утверждений для решетчатого случая.

Замечание 2. В [3] для обычного критического процесса Гальтона–Ватсона, т.е. для процесса, в котором $f_n(s) = f(s)$ — фиксированная производящая функция, доказано, что если

$$f''(1) = 1, \quad \sigma^2 = f''(1) \in (0, \infty),$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\kappa = n\} \sim 2\sigma^{-2}n^{-2}. \quad (1.8)$$

Таким образом, асимптотическое поведение вероятностей $\mathbf{P}\{\kappa > n\}$ и $\mathbf{P}\{\kappa = n\}$ для критических процессов в случайной среде существенно отличается от асимптотического поведения соответствующих вероятностей для обычных критических процессов Гальтона–Ватсона.

Замечание 3. В [4–6] рассматривалась следующая модель случайных блужданий в случайной среде: пусть $B(i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, носитель распределения каждой из которых сосредоточен на $[0, 1]$, и пусть $\mathcal{A} = \sigma\{B(i), -\infty < i < \infty\}$ — σ -алгебра, порожденная $\{B(i)\}$. Определим последовательность случайных величин D_t , $t = 0, 1, \dots$, соотношениями $D_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{D_{t+1} = D_t + 1 \mid \mathcal{A}, D_0, \dots, D_t\} &= B(i), \\ \mathbf{P}\{D_{t+1} = D_t - 1 \mid \mathcal{A}, D_0, \dots, D_t\} &= 1 - B(i) \end{aligned}$$

на множестве $\{D_t = i\}$. Пусть $\tau = \min\{t > 0: D_t = 0\}$, $D_t^* = D_{t \wedge \tau}$ — остановленное блуждание, и $Y_t = |D_t^*|$. Как установлено в [5], если

$$\mathbf{M} \log \frac{B(0)}{1 - B(0)} = 0, \quad (1.9)$$

то

$$\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1.$$

Положим теперь $Z(n) = |\{t < \tau: Y_t = n + 1, Y_{t+1} = n\}|$. Следуя идеям [7] (см. также [8]), можно показать, что $Z(n)$ является ветвящимся процессом в случайной среде, в котором

$$f_n(s) = \frac{1 - B(n)}{1 - B(n)s}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пусть, как и прежде, $\kappa = \min\{n: Z(n) = 0\}$, а $M = \max Y_t$. Ясно, что $M = \kappa - 1$, и, следовательно, в теореме 1 найдена, в частности, асимптотика при $n \rightarrow \infty$ того, что модуль максимума случайного блуждания в случайной среде к моменту первого его возвращения в ноль будет равен n при выполнении условия (1.9).

2. Основные обозначения и схема доказательства теоремы 1

Отталкиваясь от обозначений

$$X_i = \log f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = \frac{f''_{i-1}(1)}{2(f'_{i-1}(1))^2}, \quad i \geq 1,$$

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

положим, при $r < n$,

$$a_{r,n} = e^{-(S_n - S_r)}, \quad b_{r,n} = \sum_{i=r}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-(S_i - S_r)},$$

$$a_n = a_{0,n} = e^{-S_n}, \quad b_0 = 0, \quad b_n = b_{0,n}, \quad n > 0.$$

Легко понять, что при любом $r < n$

$$a_n + b_n = b_r + a_r(a_{r,n} + b_{r,n}). \quad (2.1)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Агрести [9].

Лемма 1. Если при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено (1.4), то

$$1 - f_0(f_1(\dots f_{n-1}(s) \dots)) = (a_n/(1-s) + b_n)^{-1}. \quad (2.2)$$

Используя (2.2) и полагая $\xi_{n+1} = (1 - f_n(0))^{-1}$ и

$$\Xi_n^* = \frac{a_n}{(a_n + b_n)(\xi_{n+1}a_n + b_n)},$$

$$\Delta_{n+1} = \Xi_n^*(\xi_{n+1} - 1),$$

несложно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\kappa = n+1\} &= \mathbf{P}\{\kappa \leq n+1\} - \mathbf{P}\{\kappa \leq n\} \\ &= \mathbf{M}f_0(f_1(\dots f_n(0) \dots)) - \mathbf{M}f_0(f_1(\dots f_{n-1}(0) \dots)) \\ &= \mathbf{M}\left(\frac{1}{a_n + b_n} - \frac{1}{\xi_{n+1}a_n + b_n}\right) = \mathbf{M}\frac{(\xi_{n+1} - 1)a_n}{(a_n + b_n)(\xi_{n+1}a_n + b_n)} \\ &= \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1)\Xi_n^* = \mathbf{M}\Delta_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим также два неравенства, которые являются следствиями (2.2):

$$(a_{r,n} + b_{r,n})^{-1} = 1 - f_r(f_{r+1}(\dots f_{n-1}(0) \dots)) \leq 1, \quad (2.4)$$

и, кроме того, при любом $q \geq 1$,

$$(qa_{r,n} + b_{r,n})^{-1} \leq 1. \quad (2.5)$$

Введем строгие нижние лестничные моменты $\tau_j, j = 0, 1, 2, \dots$, для случайного блуждания S_n на $(-\infty, \infty)$, полагая

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{j+1} = \min\{n > \tau_j : S_n < S_{\tau_j}\}.$$

Ясно, что τ_1 есть момент первого попадания случайного блуждания S_n в множество $(-\infty, 0)$.

Представим вероятность $\mathbf{P}\{\kappa = n + 1\}$ в виде

$$\mathbf{P}\{\kappa = n + 1\} = \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] + \sum_{j=1}^{J-1} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n, \tau_{j+1} > n] + \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_J \leq n]. \quad (2.6)$$

В основе доказательства теоремы 1 лежат следующие рассуждения, являющиеся развитием идей работы [2]. Поскольку величина Δ_{n+1} в (2.3) имеет вид

$$\Delta_{n+1} = \frac{(\xi_{n+1} - 1)e^{-S_n}}{(a_n + b_n)(\xi_{n+1}a_n + b_n)},$$

те траектории случайного блуждания на $(-\infty, \infty)$, которые в момент n уводят случайное блуждание далеко вправо, т.е. те траектории, для которых значение S_n велико, не дадут существенного вклада в математическое ожидание (2.3). С другой стороны, если случайное блуждание до момента n заходило достаточно далеко влево много раз (что соответствует ситуации $\tau_j \leq n$ при больших j), то величина

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1} e^{-S_i}$$

также будет достаточно большой, и для таких траекторий величина Δ_{n+1} будет маленькой. Наконец, если для фиксированного и не очень большого j разность $\tau_{j+1} - \tau_j$ достаточно велика, то (см. [10])

$$S_{[y(\tau_{j+1} - \tau_j)]} - S_{\tau_j} \approx c\sqrt{\tau_{j+1} - \tau_j} W_0^+(y), \quad 0 < y < 1,$$

где c — положительная постоянная, а $W_0^+(y)$ — броуновская экскурсия на $[0, 1]$. Поэтому в сумму b_n основной вклад внесут лишь слагаемые $\eta_{i+1} e^{-S_i}$, индексы i которых лежат близко к нижним лестничным моментам, что позволяет анализировать вместо b_n , содержащего растущее при $n \rightarrow \infty$ число слагаемых, лишь некоторые конечные суммы.

Строгое обоснование описанных выше этапов требует довольно кропотливых выкладок, основная часть которых сосредоточена в следующем разделе.

3. Вспомогательные результаты

Введем обозначения

$$\sigma^2 = \mathbf{M}X_1^2, \quad m_n = \min_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k, \\ \theta_n = \min\{k \leq n : S_k = m_n\}.$$

Через $\mathbf{M}_y$ и $\mathbf{P}_y$ будем обозначать математические ожидания и вероятности соответствующих случайных величин и событий при условии $S_0 = y$. Там, где это не будет вызывать недоразумений, вместо $\mathbf{M}_0$ мы будем писать просто $\mathbf{M}$. Положим также

$$\begin{aligned} B_{n,y}(x) &= \mathbf{P}\{m_n \geq 0, S_n < x \mid S_0 = y\} = \mathbf{P}_y\{m_n \geq 0, S_n < x\}, \\ \tilde{B}_{n,0}(x) &= \mathbf{P}_0\{M_n < 0, S_n \geq -x\}, \quad x > 0, \\ U_0(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(x + \int_0^x \sum_{s=1}^{\infty} B_{s,0}(u) du \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tilde{U}_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(x + \int_0^x \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{B}_{s,0}(u) du \right). \quad (3.2)$$

Лемма 2 ([11]). Если распределение X_1 нерешетчато, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}X_1 < \infty$, то

$$B_{n,0}(x+1) - B_{n,0}(x) \leq c(x+1)n^{-3/2}, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.3)$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$n^{3/2}B_{n,0}(x) \rightarrow U_0(x) \quad (3.4)$$

равномерно по x из любого конечного интервала $0 < x < T$. Кроме того, при $x \rightarrow \infty$

$$U_0(x) = O(x^2). \quad (3.5)$$

Следствие 1. В условиях леммы 2,

$$\tilde{B}_{n,0}(x+1) - \tilde{B}_{n,0}(x) \leq c(x+1)n^{-3/2}, \quad x \in [0, \infty), \quad (3.6)$$

и, кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$n^{3/2}\tilde{B}_{n,0}(x) \rightarrow \tilde{U}_0(x) \quad (3.7)$$

равномерно по x из любого конечного интервала $0 < x < T$.

Доказательство следствия сводится к почти дословному повторению рассуждений, применявшихся в [11] для доказательства (3.4) и (3.5).

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать лемму 2. В частности, она играет важную роль в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 3. В условиях леммы 2 существует конечный положительный предел

$$H_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[a_n; \tau_1 > n]. \quad (3.8)$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}[a_n; \tau_1 > n] = \int_0^\infty e^{-x} dB_{n,0}(x).$$

Из леммы 2 и монотонности $U_0(x)$ по x вытекает, что при любом фиксированном натуральном R

$$n^{3/2} \int_0^R e^{-x} dB_{n,0}(x) \rightarrow \int_0^R e^{-x} dU_0(x) \quad (3.9)$$

при $n \rightarrow \infty$. Обращаясь к (3.3), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_R^\infty e^{-x} dB_{n,0}(x) &\leq \sum_{k=R}^\infty e^{-k} (B_{n,0}(k+1) - B_{n,0}(k)) \\ &\leq \frac{c}{n^{3/2}} \sum_{k=R}^\infty e^{-k} (k+1) = \frac{\varepsilon(R)}{n^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь и ниже обозначения $\varepsilon(R)$, $\varepsilon_i(R)$, $i = 1, 2, \dots$, используются для функций, стремящихся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Объединяя (3.9) и (3.10), приходим к (3.8) с

$$H_0 = \int_0^\infty e^{-x} dU_0(x).$$

Лемма доказана.

Обозначим $I(A)$ индикатор события A .

Лемма 4. В условиях леммы 1 существует постоянная $c \in (0, \infty)$ такая, что при всех $x, y \in (0, \infty)$

$$\bar{B}_{n,y}(x) = B_{n,y}(x+1) - B_{n,y}(x) \leq c(x+1)(y+1)n^{-3/2}, \quad (3.11)$$

$$B_{n,y}(x) \leq c(x+1)^2(y+1)n^{-3/2}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Используя тот факт, что для любого множества $\Gamma \subseteq [0, \infty)$ справедливо соотношение двойственности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \geq S_j, j = 0, 1, \dots, n-1; S_n \in \Gamma \mid S_0 = 0\} \\ = \mathbf{P}\{m_n \geq 0, S_n \in \Gamma \mid S_0 = 0\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

(см., например, [12], глава XII), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} B_{n,y}(x) &= \mathbf{P}_0\{m_n \geq 0, S_n \leq x-y\} I\{y < x\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^{y \wedge x} \mathbf{P}_y\{m_n \geq 0, S_n \leq x, \theta_n = k, S_k \in (t, t+dt)\} \\ &= \mathbf{P}_0\{m_n \geq 0, S_n \leq x-y\} I\{y < x\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^{y \wedge x} \mathbf{P}_y\{S_j > S_k, 0 \leq j < k, S_k \in (t, t+dt)\} \\ &\quad \times \mathbf{P}_t\{S_k \leq S_j, j = k+1, \dots, n; S_n \leq x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_{n,0}(x-y)I\{y < x\} + \sum_{k=1}^n \int_0^{y \wedge x} B_{n-k,0}(x-t) \\
&\quad \times \mathbf{P}_0\{-S_j < -S_k, 0 \leq j < k, -S_k \in (y-t-dt, y-t)\} \\
&= B_{n,0}(x-y)I\{y < x\} + \sum_{k=1}^n \int_0^{y \wedge x} B_{n-k,0}(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{n,y}(x) &= B_{n,y}(x+1) - B_{n,y}(x) \\
&= \bar{B}_{n,0}(x-y)I\{y < x\} + B_{n,0}(x+1-y)I\{x \leq y < x+1\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^{y \wedge x} \bar{B}_{n-k,0}(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \int_{y \wedge x}^{y \wedge (x+1)} B_{n-k,0}(x+1-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t)I\{x \leq y < x+1\}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Вспоминая (3.3) и (3.6), заключаем, что

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{n,y}(x) &\leq \frac{c(x-y)}{n^{3/2}} + \frac{c}{n^{3/2}} + \sum_{k=1}^n \frac{c^2(x+1)(y+1)}{(n-k+1)^{3/2}k^{3/2}} + \sum_{k=1}^n \frac{c^2x}{(n-k+1)^{3/2}k^{3/2}} \\
&\leq \frac{c_1(x+1)(y+1)}{n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Оценка (3.11) доказана. Неравенство (3.12) вытекает из (3.11) и соотношения

$$B_{n,y}(x) = \sum_{k=1}^{x-1} \bar{B}_{n,y}(k). \tag{3.16}$$

Лемма 5. Для любого $y > 0$ и всех $x \in (0, \infty)$ существует конечный предел

$$U_y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} B_{n,y}(x). \tag{3.17}$$

Доказательство. Мы снова будем использовать представление (3.14). Из леммы 2 и следствия 1 вытекает, что при любом фиксированном T

$$\begin{aligned}
W_T(n) &= \sum_{k=T}^{n-T} \int_0^{y \wedge x} B_{n-k,0}(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t) \leq \sum_{k=T}^{n-T} B_{n-k,0}(x) \tilde{B}_{k,0}(y) \\
&\leq c(x+1)^2(y+1)^2 \sum_{k=T}^{n-T} \frac{1}{(n-k)^{3/2}k^{3/2}} \\
&= \frac{c(x+1)^2(y+1)^2}{n^{3/2}} \varepsilon(T).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Из (3.4) и (3.7) следует также, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \left(B_{n,0}(x-y)I\{y < x\} + \sum_{k=1}^T \int_0^{y \wedge x} B_{n-k,0}(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t) \right) \\ = U_0(x-y)I\{y < x\} + \sum_{k=1}^T \int_0^{y \wedge x} U_0(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t) \end{aligned}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \sum_{k=n-T}^n \int_0^{y \wedge x} B_{n-k,0}(x-t) d\tilde{B}_{k,0}(y-t) = \int_0^{y \wedge x} \sum_{k=1}^T B_{k,0}(x-t) d\tilde{U}_0(y-t).$$

Отсюда, еще раз вспоминая (3.4) и (3.7), и учитывая (3.18) и соотношения

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,0}(x) < \infty, \quad x \in [0, \infty), \\ \tilde{Q}_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{k,0}(x) < \infty, \quad x \in [0, \infty), \end{aligned}$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} U_y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} B_{n,y}(x) \\ &= U_0(x-y)I\{y < x\} + \int_0^{y \wedge x} U_0(x-t) d\tilde{Q}_0(y-t) + \int_0^{y \wedge x} Q_0(x-t) d\tilde{U}_0(y-t). \end{aligned}$$

Лемма 6. Найдется такая постоянная $c_1 < \infty$, что при всех $y \geq 0$

$$n^{3/2} \mathbf{M}_y[a_n; \tau_1 > n] \leq c_1(y+1). \quad (3.19)$$

Доказательство. Используя оценку (3.11), выводим, что

$$\begin{aligned} n^{3/2} \mathbf{M}_y[a_n; \tau_1 > n] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} n^{3/2} \bar{B}_{n,y}(k) \\ &\leq c(y+1) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 e^{-k} \leq c_1(y+1). \end{aligned}$$

Замечание 4. Аналогичными рассуждениями можно показать, что найдется такая постоянная $c_2 < \infty$, что при всех $y \geq 0$

$$n^{3/2} \mathbf{M}_y[(S_n + 1)a_n; \tau_1 > n] \leq c_2(y+1).$$

Лемма 7. Для любого фиксированного $y \geq 0$ существует конечный положительный предел

$$H_y = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}_y[a_n; \tau_1 > n].$$

Доказательство. Имеем

$$n^{3/2} \mathbf{M}_y[a_n; \tau_1 > n] = n^{3/2} \int_0^\infty e^{-x} dB_{n,y}(x).$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться результатами лемм 4 и 5, и повторить почти дословно доказательство леммы 3.

4. Асимптотические свойства $\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n]$

Напомним, что через $\varepsilon(R)$ и $\varepsilon_i(R)$, $i = 1, 2, \dots$, мы обозначаем функции, стремящиеся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Для удобства мы также будем использовать обозначение $\mathcal{E}(n, R)$ для события $\{\tau_1 > n; S_n > R\}$ и $\mathcal{C}(n, R)$ для события $\{\tau_1 > n; S_n \leq R\}$.

Лемма 8. *Справедливо представление*

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{E}(n, R)] = n^{-3/2} \varepsilon(R).$$

Доказательство. Поскольку $\xi_{n+1} - 1 = (1 - f_n(0))^{-1} - 1 > 0$, то (ср. с (2.2) и (2.3))

$$\Delta_{n+1} = (\xi_{n+1} - 1) \Xi_n^* \leq (\xi_{n+1} - 1) a_n. \quad (4.1)$$

Учитывая независимость ξ_{n+1} от σ -алгебры, порожденной последовательностью $X_0, X_1, \dots, X_n$, условие (1.6) и оценку (3.10), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{E}(n, R)] &\leq \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1) \mathbf{M}[a_n; \mathcal{E}(n, R)] \\ &= \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1) \int_R^\infty e^{-x} dB_{n,0}(x) \leq n^{-3/2} \varepsilon(R) \mathbf{M} \xi_{n+1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $F(x) = \mathbf{P}\{X_1 \leq x\}$.

Лемма 9. *Для любого фиксированного $R < \infty$*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M} \left[\sum_{i=q}^{n-q} \eta_{i+1} e^{-S_i}; \mathcal{C}(n, R) \right] = 0. \quad (4.2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma_i(R, n) &= \mathbf{M}[\eta_{i+1} e^{-S_i}; \mathcal{C}(n, R)] \\ &= \int_0^\infty e^{-x} dB_{i,0}(x) \int_0^\infty dF(y-x) \mathbf{M}[\eta_{i+1} | X_{i+1} = y-x] B_{n-i-1,y}(R). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда, используя (3.12), получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma_i(R, n) &\leq \frac{c(R+1)^2}{(n-i)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-x} dB_{i,0}(x) \\ &\quad \times \int_0^\infty (y+1) \mathbf{M}[\eta_{i+1} | X_{i+1} = y-x] dF(y-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(R+1)^2}{(n-i)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-x} dB_{i,0}(x) \\
&\quad \times \int_0^\infty (|y-x|+x+1) \mathbf{M}[\eta_{i+1} \mid X_{i+1}=y-x] dF(y-x) \\
&= \frac{c(R+1)^2}{(n-i)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-x} ((x+1) \mathbf{M}\eta_{i+1} + \mathbf{M}|\eta_{i+1}X_{i+1}|) dB_{i,0}(x) \\
&= \frac{c(R+1)^2}{(n-i)^{3/2}} \{ \mathbf{M}\eta_{i+1} \mathbf{M}[(S_i+1)e^{-S_i}; \tau_1 > i] + \mathbf{M}|\eta_{i+1}X_{i+1}| \mathbf{M}[e^{-S_i}; \tau_1 > i] \}.
\end{aligned}$$

Последнее, ввиду (3.8), условия теоремы и оценки

$$\mathbf{M}[(S_i+1)e^{-S_i}; \tau_1 > i] \leq c_1 i^{-3/2},$$

которую можно получить практически дословным повторением рассуждений, использовавшихся при выводе (3.8), приводит к соотношению

$$\gamma_i(R, n) \leq \frac{c(R+1)^2}{(n-i)^{3/2} i^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=q}^{n-q} \eta_{i+1} e^{-S_i}; \mathcal{C}(n, R) \right] \leq \frac{c(R+1)^2}{n^{3/2}} \sum_{i=q}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}},$$

что, очевидно, влечет (4.2).

Пусть $\{(X_n, \eta_n), n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных векторов, $F(x) = \mathbf{P}\{X_1 \leq x\}$, $G(x, \Gamma) = \mathbf{P}\{\eta_1 \in \Gamma \mid X_1 = x\}$; пусть $x_1, \dots, x_{q-1}, y_0, y_1, \dots, y_q$ — набор положительных (не обязательно конечных) чисел, причем $y_q < \infty$, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q, N_0, N_1, \dots, N_q$ — набор борелевских множеств, лежащих в $(-\infty, \infty)$. Положим

$$\mathcal{A}(q, \vec{x}, \vec{\Gamma}) = \{\eta_1 \in \Gamma_1\} \bigcap_{i=1}^{q-1} \{S_i \leq x_i, \eta_{i+1} \in \Gamma_{i+1}\},$$

$$\mathcal{B}_n(q, \vec{y}, \vec{N}) = \{S_n \leq y_0\} \bigcap_{j=1}^q \{S_{n-j} \leq y_j, \eta_{n-j+1} \in N_j\},$$

$$P_{n,R}(q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{\Gamma}, \vec{N}) = \mathbf{P}\{\mathcal{A}(q, \vec{x}, \vec{\Gamma}) \cap \mathcal{B}_n(q, \vec{y}, \vec{N}) \mid m_n \geq 0, S_n \leq R\}.$$

Следующая лемма является аналогом теоремы В [2].

Лемма 10. Если распределение $F(x)$ нерешетчато, $\mathbf{M}X_1 = 0$, $\mathbf{M}X_1^2 < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
P_{n,R}(q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{\Gamma}, \vec{N}) &\rightarrow \frac{1}{U_0(R)} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_q} \prod_{i=1}^q G(z_i - z_{i-1}, \Gamma_i) dF(z_i - z_{i-1}) \\
&\times \int_0^{y_q} dU_{z_q}(t) \int_{-t}^{y_{q-1}-t} \dots \int_{-t}^{y_1-t} \int_{-t}^{y_0 \wedge R-t} \prod_{j=1}^q G(r_{j-1} - r_j, N_j) dF(r_{j-1} - r_j), \quad (4.4)
\end{aligned}$$

где $z_0 = r_q = 0$, $x_q = \infty$, а функция $U_z(x)$ та же, что и в лемме 5.

Доказательство. Покажем сначала, что для любых $z \in (0, \infty)$, $y_q \in (0, \infty)$, $y_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, и любых борелевских множеств N_j , $j = 0, 1, \dots, q-1$, при $n \rightarrow \infty$,

$$n^{3/2} \mathbf{P}_z \{S_{n-j} \leq y_j, \eta_{n-j+1} \in N_j, j = 1, \dots, q; S_n \leq y_0, m_n \geq 0\} \\ \rightarrow \int_0^{y_q} dU_z(t) \int_{-t}^{y_{q-1}-t} \dots \int_{-t}^{y_1-t} \int_{-t}^{y_0-t} \prod_{j=1}^q G(r_{j-1} - r_j, N_j) dF(r_{j-1} - r_j). \quad (4.5)$$

В самом деле, выражение в левой части (4.5) может быть записано в форме

$$n^{3/2} \mathbf{P}_z \left\{ S_{n-q} \leq y_q, S_{n-q} + \sum_{r=j}^{q-1} X_{n-r} \leq y_j, j = 0, 1, \dots, q-1; \right. \\ \left. \eta_{n-j+1} \in N_j, j = 0, \dots, q, m_n \geq 0 \right\} \\ = n^{3/2} \int_0^{y_q} dB_{n-q,z}(t) \int_{-t}^{y_{q-1}-t} \dots \int_{-t}^{y_1-t} \int_{-t}^{y_0-t} \prod_{j=1}^q G(r_{j-1} - r_j, N_j) dF(r_{j-1} - r_j), \quad (4.6)$$

что, в силу (3.17), влечет (4.5). Обозначив $n^{3/2} T_z(n; y_q, y_{q-1}, \dots, y_1, y_0)$ выражение в правой части (4.6) и используя (3.12), мы получим, что

$$n^{3/2} T_z(n; y_q, y_{q-1}, \dots, y_1, y_0) \leq n^{3/2} B_{n-q,z}(y_q) \leq c(z+1)(1+y_q^2). \quad (4.7)$$

Для завершения доказательства леммы 10 осталось заметить, что

$$P_{n,R}(q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{\Gamma}, \vec{N}) = \frac{1}{B_{n,0}(R)} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_q} T_{z_q}(n-q; y_q, y_{q-1}, \dots, y_1, y_0 \wedge R) \\ \times \prod_{i=1}^q G(z_i - z_{i-1}, \Gamma_i) dF(z_i - z_{i-1})$$

и, воспользовавшись (4.7), перейти к пределу по n при $n \rightarrow \infty$ под знаком интеграла.

При доказательстве формулируемой ниже теоремы 2 мы будем использовать обозначения (см. (2.1))

$$\rho_n = a_n + b_n, \quad \rho_n(q) = \rho_n - a_q b_{q,n-q+1}, \\ \rho_n^* = a_n \xi_{n+1} + b_n, \quad \rho_n^*(q) = \rho_n^* - a_q b_{q,n-q+1}.$$

Заметим, что $\rho_n^* = \rho_{n+1} \geq \rho_n$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует конечный положительный предел

$$A_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n]. \quad (4.8)$$

Доказательство. Из леммы 10 вытекает, что при любом $R < \infty$ и любом фиксированном q существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n(q) \rho_n^*(q)} \mid \mathcal{C}(n, R) \right] = \frac{A_0(R, q)}{U_0(R)}. \quad (4.9)$$

Правая часть (4.4) задает при каждом q распределение случайного вектора размерности $4q$. Для компонент этого вектора мы будем использовать обозначения

$$(\lambda_1, Q_1, \lambda_2, Q_2, \dots, \lambda_{q-1}, Q_{q-1}, \lambda_q, \theta, \gamma_1, \theta + L_1, \gamma_2, \theta + L_2, \dots, \gamma_q, \theta + L_q)$$

подразумевая при этом, что набор $(\lambda_1, Q_1, \lambda_2, Q_2, \dots, \lambda_{q-1}, Q_{q-1}, \lambda_q)$ соответствует допредельным компонентам $(\eta_1, S_1, \eta_2, S_2, \dots, \eta_{q-1}, S_{q-1}, \eta_q)$, величина θ соответствует величине S_{n-q} , а набор из оставшихся компонент $(\gamma_1, \theta + L_1, \gamma_2, \theta + L_2, \dots, \gamma_q, \theta + L_q)$ соответствует вектору $(\eta_{n-q+j}, S_{n-q+j}, j = 1, \dots, q)$. Положим также $\xi \stackrel{d}{=} \xi_{n+1} = (1 - f_n(0))^{-1}$, принимая во внимание тот факт, что ξ_{n+1} в допредельном выражении в левой части (4.9) не зависит от набора (S_i, η_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь и далее знак $\xi \stackrel{d}{=} \zeta$ означает совпадение распределений случайных величин ξ и ζ .

Используя введенные обозначения и полагая $L_0 = 0$, запишем

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_{i+1} e^{-Q_i} + \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_{j+1} e^{-(\theta+L_j)} + e^{-(\theta+L_q)}, \\ \rho^*(q) &= \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_{i+1} e^{-Q_i} + \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_{j+1} e^{-(\theta+L_j)} + \xi e^{-(\theta+L_q)}, \end{aligned}$$

и представим левую часть (4.9) в виде

$$\mathbf{M}^{(R)} \left[\frac{\xi e^{-\theta-L_q}}{\rho(q)\rho^*(q)} \right] = \frac{A_0(R, q)}{U_0(R)} \quad (4.10)$$

отмечая индексом R тот факт, что рассматриваются лишь те допредельные траектории, для которых $S_n < R$.

Очевидно, что допредельное выражение в левой части (4.9) монотонно убывает при росте q , и, следовательно, существует предел

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \mathbf{M}^{(R)} \left[\frac{\xi e^{-\theta-L_q}}{\rho(q)\rho^*(q)} \right] = \frac{A_0(R)}{U_0(R)}.$$

Ввиду (4.9), это означает, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n(q)\rho_n^*(q)}; \mathcal{C}(n, R) \right] = A_0(R) < \infty. \quad (4.11)$$

Заметим теперь, что ввиду соотношений $\rho_n^{-1} \leq 1$, $(\rho_n^*)^{-1} \leq 1$, и

$$\rho_n - \rho_n(q) = \rho_n^* - \rho_n^*(q) = a_q b_{q, n-q+1} \geq 0$$

справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\rho_n(q)} \frac{1}{\rho_n^*(q)} - \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_n^*} = \frac{\rho_n - \rho_n(q)}{\rho_n(q)\rho_n^*(q)\rho_n} + \frac{\rho_n^* - \rho_n^*(q)}{\rho_n\rho_n^*\rho_n^*(q)} \\ &\leq a_q b_{q, n-q+1} \left[\frac{1}{\rho_n(q)} \frac{1}{\rho_n^*(q)} + \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_n^*} \right] \leq a_q b_{q, n-q+1} \frac{2}{a_n^2 \xi_{n+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство $a_n = e^{-S_n}$, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n(q)\rho_n^*(q)} - \frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n\rho_n^*}; \mathcal{C}(n, R) \right] \\ &\leq 2\mathbf{M} \left[\frac{(\xi_{n+1} - 1)(\rho_n - \rho_n(q))}{a_n\xi_{n+1}}; \mathcal{C}(n, R) \right] \\ &\leq 2\mathbf{M}[b_{q, n-q+1}e^{s_n}; \mathcal{C}(n, R)] \leq 2e^R \mathbf{M}[b_{q, n-q+1}; \mathcal{C}(n, R)]. \end{aligned}$$

Эта оценка в сочетании с (4.11) и леммой 9 приводит к соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{C}(n, R)] = A_0(R) < \infty. \quad (4.12)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{C}(n, R)] \leq \mathbf{M}[a_n(\xi_{n+1} - 1); \tau_1 > n] = \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1) \mathbf{M}[a_n; \tau_1 > n]. \quad (4.13)$$

В силу условия (1.6) и леммы 3, правая часть (4.13) есть $O(n^{-3/2})$, и, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{C}(n, R)] = A_0 < \infty.$$

Отсюда и из леммы 8 вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] = A_0. \quad (4.14)$$

Покажем, что $A_0 > 0$. Заметим вначале, что

$$\Delta_{n+1} I\{\mathcal{C}(n, R)\} \geq e^{-R} (\xi_{n+1} - 1) (\rho_n^*)^{-2} I\{\mathcal{C}(n, R)\},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Delta_{n+1} \mid \mathcal{C}(n, R)] &\geq e^{-R} \mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1) (\rho_n^*)^{-2} \mid \mathcal{C}(n, R)] \\ &\geq e^{-R} (\mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{1/2} (\rho_n^*)^{-1} \mid \mathcal{C}(n, R)])^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \rho_n^*; \mathcal{C}(n, R)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{M}[\eta_{i+1} a_i (\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} I(\mathcal{C}(n, R))] + \mathbf{M}[\xi_{n+1} a_n (\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} I\{\mathcal{C}(n, R)\}] \\ &= \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{M} \eta_{i+1} a_i I(\mathcal{C}(n, R)) + \mathbf{M}[\xi_{n+1} a_n (\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} I\{\mathcal{C}(n, R)\}]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Применяя уже ставшие стандартными рассуждения (см. лемму 9) получаем, что при $i < n$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}[\eta_{i+1} a_i I\{\mathcal{C}(n, R)\}] \\
 &= \int_0^\infty e^{-x} dB_{i,0}(x) \int_0^\infty dF(y-x) \mathbf{M}[\eta_{i+1} \mid X_{i+1} = y-x] B_{n-i-1,y}(R) \\
 &\leq \frac{c(R+1)^2}{(n-i-1)^{3/2}} (\mathbf{M}\eta_{i+1} \mathbf{M}[(S_i+1)e^{-S_i}; \tau_1 > i] + \mathbf{M}|\eta_{i+1} X_{i+1}| \mathbf{M}[e^{-S_i}; \tau_1 > i]) \\
 &\leq \frac{c_1(R+1)^2}{(n-i-1)^{3/2}} \mathbf{M}[(S_i+1)e^{-S_i}; \tau_1 > i] \\
 &\leq \frac{c_2(R+1)^2}{(n-i-1)^{3/2} i^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

(для получения последней оценки необходимо воспользоваться схемой доказательства леммы 3). Из (4.17) вытекает, что вторая сумма в (4.16) есть $O(n^{-3/2})$. Заметим теперь, что

$$(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} = \left(\frac{1 - f_n(0)}{f_n(0)} \right)^{1/2} \leq (f_n(0))^{-1/2} \leq (f_n(0))^{-1}$$

и

$$\xi_{n+1}(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} = ((1 - f_n(0))f_n(0))^{-1/2} \leq (1 - f_n(0))^{-1} + (f_n(0))^{-1}.$$

Следовательно, ввиду условий (1.6)

$$\mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} < \infty$$

и

$$\mathbf{M}[\xi_{n+1} a_n (\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} I\{\mathcal{C}(n, R)\}] \leq \mathbf{M}[\xi_{n+1} (\xi_{n+1} - 1)^{-1/2}] < \infty.$$

Приведенные оценки показывают, что

$$\mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \rho_n^*; \mathcal{C}(n, R)] \leq cn^{-3/2},$$

или

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \rho_n^* \mid \mathcal{C}(n, R)] \leq c < \infty. \tag{4.18}$$

Исходя из очевидного неравенства

$$1 \leq \mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \rho_n^* \mid \mathcal{C}(n, R)] \mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{1/2} (\rho_n^*)^{-1} \mid \mathcal{C}(n, R)]$$

и соотношений (3.4), (4.15) и (4.18), получаем, что при каждом фиксированном R

$$\begin{aligned}
 \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \mathcal{C}(n, R)] &= U_0(R) \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[\Delta_{n+1} \mid \mathcal{C}(n, R)] \\
 &\geq e^{-R} U_0(R) \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{1/2} (\rho_n^*)^{-1} \mid \mathcal{C}(n, R)])^2 \\
 &\geq e^{-R} U_0(R) (\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[(\xi_{n+1} - 1)^{-1/2} \rho_n^* \mid \mathcal{C}(n, R)])^{-2} \\
 &\geq e^{-R} U_0(R) c^{-2} > 0;
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] = A_0 > 0.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 5. Дословно повторяя проводившиеся выше рассуждения, можно показать, что для любых $\omega_1 \geq 0$ и $\omega_2 \geq 1$ существует конечный положительный предел

$$A_0(\omega_1, \omega_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{(\omega_1 + \omega_2 \rho_n)(\omega_1 + \omega_2 \rho_n^*)}; \tau_1 > n \right].$$

5. Оценка сверху величины $\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n]$

В этом разделе мы покажем, что те траектории случайного блуждания $\{S_n, n = 0, 1, \dots\}$, которые часто (на промежутке времени $[0, n]$) уходят далеко влево от начала координат, не дают существенного вклада в $\mathbf{M}\Delta_{n+1}$.

Лемма 11. Существует постоянная $c < \infty$ такая, что

$$\mathbf{M}\Delta_{n+1} \leq cn^{-3/2}.$$

Доказательство. Пусть, как и ранее,

$$\theta_n = \min\{0 \leq k \leq n : S_k = \min_{0 \leq j \leq n} S_j\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\Delta_{n+1} &= \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \theta_n = 0] + \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \theta_n = n] \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{M} \left[\frac{e^{-(S_n - S_k)} e^{-S_k} (\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n \rho_n^*}; S_j > S_k, j = 0, \dots, k-1; S_j \geq S_k, j = k, \dots, n \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В силу теоремы 2

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \theta_n = 0] = \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] \leq cn^{-3/2}. \quad (5.2)$$

Далее, применяя принцип двойственности, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \theta_n = n] &= \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{(a_n + b_n)(a_n \xi_{n+1} + b_n)}; \theta_n = n \right] \\ &\leq \mathbf{M}[a_n^{-1}; \theta_n = n] = \mathbf{M}[e^{S_n}; S_j > S_n, j = 0, 1, \dots, n-1] \\ &= \mathbf{M}[e^{-\tilde{S}_n}; \tilde{S}_j < \tilde{S}_n, j = 0, 1, \dots, n-1] \\ &\leq \mathbf{M}[e^{-\tilde{S}_n}; \tilde{S}_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, n-1] = \mathbf{M}[e^{-\tilde{S}_n}; \tilde{\tau}_1 > n], \end{aligned}$$

где $\tilde{S}_n = -S_n$, а $\tilde{\tau}_1$ — первый строгий нижний лестничный момент для $\tilde{S}_n$. Отсюда, используя те же аргументы, что и при доказательстве леммы 3, выводим, что

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \theta_n = n] \leq cn^{-3/2}. \quad (5.3)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \left[\frac{e^{-(S_n - S_k)} e^{-S_k} (\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n \rho_n^*}; S_j > S_k, j = 0, \dots, k-1; S_j \geq S_k, j = k, \dots, n \right] \\
 & \leq \mathbf{M} \left[\frac{e^{-(S_n - S_k)} e^{-S_k} (\xi_{n+1} - 1)}{\rho_k \rho_k^*}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1; S_j \geq S_k, j = k, \dots, n \right] \\
 & = \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1) \mathbf{M} \left[\frac{e^{-S_k}}{\rho_k \rho_k^*}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1 \right] \\
 & \quad \times \mathbf{M}[e^{-(S_n - S_k)}; S_j \geq S_k, j = k, \dots, n] \\
 & = \mathbf{M}(\xi_{n+1} - 1) \mathbf{M} \left[\frac{a_k}{\rho_k \rho_k^*}; S_j > S_k, j = 0, \dots, k-1 \right] \\
 & \quad \times \mathbf{M}[e^{-S'_n - k}; S'_j \geq 0, j = 0, \dots, n-k],
 \end{aligned}$$

где S'_j есть вероятностная копия случайного блуждания S_j . По лемме 3

$$\mathbf{M}[e^{-S'_n - k}; S'_j \geq 0, j = 0, \dots, n-k] \leq c(n-k)^{-3/2}. \quad (5.4)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M} \left[\frac{a_k}{\rho_k \rho_k^*}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1 \right] \\
 & = \mathbf{M} \left[\frac{a_k}{(a_k + b_k)(a_k \xi_{k+1} + b_k)}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1 \right] \\
 & \leq \mathbf{M} \left[\frac{1}{a_k \xi_{k+1}}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1 \right] \\
 & = \mathbf{M} \frac{1}{\xi_{k+1}} \mathbf{M}[e^{S_k}; S_j > S_k, j = 0, 1, \dots, k-1] \\
 & \leq c \mathbf{M}[e^{-\tilde{S}_k}; \tilde{S}_j < \tilde{S}_k, j = 0, 1, \dots, k-1] \\
 & \leq c \mathbf{M}[e^{-\tilde{S}_k}; \tilde{\tau}_1 > k] \leq ck^{-3/2}
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

(здесь, как и выше, $\tilde{S}_k = -S_k$, а $\tilde{\tau}_1$ — первый строгий нижний лестничный момент для $\tilde{S}_n$).

Объединение соотношений (5.1)–(5.5) доказывает лемму 11.

Теорема 3. *Существуют такие постоянные $c < \infty$ и $\lambda \in (0, 1)$, что*

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n] \leq cn^{-3/2}(j+1)\lambda^j. \quad (5.6)$$

Доказательство. Принимая во внимание (2.1), получаем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n] &= \sum_{k=j}^n \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k] \\
 &= \sum_{k=j}^n \mathbf{M} \left[\frac{a_k a_{k,n} (\xi_{n+1} - 1)}{(a_k(a_{k,n} + b_{k,n}) + b_k)(a_k(a_{k,n} \xi_{n+1} + b_{k,n}) + b_k)}; \tau_j = k \right] \\
 &\leq \sum_{k=j}^n \mathbf{M} \left[\frac{a_{k,n} (\xi_{n+1} - 1)}{a_k(a_{k,n} + b_{k,n})(a_{k,n} \xi_{n+1} + b_{k,n})}; \tau_j = k \right] \\
 &= \sum_{k=j}^n \mathbf{M}[a_k^{-1}; \tau_j = k] \mathbf{M} \left[\frac{a_{k,n} (\xi_{n+1} - 1)}{(a_{k,n} + b_{k,n})(a_{k,n} \xi_{n+1} + b_{k,n})} \right] \\
 &= \sum_{k=j}^n \mathbf{M}[a_k^{-1}; \tau_j = k] \mathbf{M} \left[\frac{a_{n-k} (\xi_{n-k+1} - 1)}{(a_{n-k} + b_{n-k})(a_{n-k} \xi_{n-k+1} + b_{n-k})} \right] \\
 &= \sum_{k=j}^n \mathbf{M}[a_k^{-1}; \tau_j = k] \mathbf{M} \Delta_{n-k}. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

В силу леммы 11

$$\mathbf{M} \Delta_{n-k} \leq c(n-k)^{-3/2}, \tag{5.8}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=j}^{[n/2]} \mathbf{M}[a_k^{-1}; \tau_j = k] \mathbf{M} \Delta_{n-k} &\leq cn^{-3/2} \sum_{k=j}^{[n/2]} \mathbf{M}[e^{S_k}; \tau_j = k] \\
 &\leq cn^{-3/2} \mathbf{M} e^{S_{\tau_j}} = cn^{-3/2} (\mathbf{M} e^{S_{\tau_1}})^j = cn^{-3/2} \lambda_1^j, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

где

$$\lambda_1 = \mathbf{M} e^{S_{\tau_1}} < 1.$$

Для дальнейших оценок нам понадобится следующий результат [11, лемма 9]: для любого $x > 0$ существует предел

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{-S_{\tau_1} < x \mid \tau_1 = n\}, \tag{5.10}$$

причем функция $\Psi(x)$ не является константой, и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{P}\{\tau_1 = n\} = c \in (0, \infty). \tag{5.11}$$

Из (5.10) вытекает, что

$$\mathbf{M}[e^{S_{\tau_1}} \mid \tau_1 = n] \leq \lambda_2 < 1$$

или

$$\mathbf{M}[e^{S_{\tau_1}}; \tau_1 = n] \leq \lambda_2 \mathbf{P}\{\tau_1 = n\}.$$

Отсюда по индукции нетрудно вывести, что

$$\mathbf{M}[e^{S_{\tau_j}}; \tau_j = n] \leq \lambda_2^j \mathbf{P}\{\tau_j = n\}. \tag{5.12}$$

В свою очередь, отталкиваясь от (5.11), несложно показать, что для любого фиксированного j

$$\mathbf{P}\{\tau_j = n\} \leq c(2j-1)n^{-3/2}, \quad n \geq n_0(j). \quad (5.13)$$

Объединяя (5.8), (5.12) и (5.13), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \mathbf{M}[e^{S_k}; \tau_j = k] \mathbf{M}[\Delta_{n-k}] &\leq c_1 j \lambda_2^j \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \mathbf{P}\{\tau_j = n\} \mathbf{M}[\Delta_{n-k}] \\ &\leq c_2 j \lambda_2^j n^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Используя неравенства (5.9) и (5.14) при оценивании (5.7), и полагая $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, приходим к (5.6).

6. Асимптотические свойства

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n; \tau_{j+1} > n]$$

В этом разделе основное внимание будет уделено доказательству следующего утверждения.

Теорема 4. Для каждого фиксированного $j = 1, 2, \dots$ существует конечный предел

$$A_j = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n; \tau_{j+1} > n]. \quad (6.1)$$

Доказательство этой теоремы во многом сходно с доказательством теоремы 2, поэтому в некоторых случаях наши рассуждения будут менее детальны, чем прежде.

Следующая лемма, которая будет существенно использована при доказательстве теоремы 4, является аналогом леммы 9.

Лемма 12. Имеет место соотношение

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M} \left[\sum_{i=q+1}^{n-q} \eta_{i+1} e^{-S_i}; \tau_1 = n \right] = 0. \quad (6.2)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что при $i < n-1$

$$\begin{aligned} \gamma_i(n) &= \mathbf{M}[\eta_{i+1} e^{-S_i}; \tau_1 = n] \\ &= \int_0^\infty e^{-x} dB_{i,0}(x) \int_0^\infty dF(y-x) \mathbf{M}[\eta_{i+1} | X_{i+1} = y-x] D_{n-i-1}(y), \end{aligned}$$

где

$$D_j(y) = \mathbf{P}\{\min\{k \leq j: S_k < 0\} = j, S_0 = y\}, \quad y > 0.$$

Поскольку

$$D_n(y) = \mathbf{P}\{\min\{k \leq n: S_k < -y\} = n, S_0 = 0\},$$

получим (см. [11, лемма 5])

$$D_n(y) \leq (y+1)n^{-3/2}. \quad (6.3)$$

Используя эту оценку и повторяя практически дословно рассуждения, проводившиеся при доказательстве леммы 9, можно показать, что

$$\gamma_i(n) \leq ci^{-3/2}(n-i)^{-3/2},$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=q+1}^{n-q} \gamma_i(n) \leq c \sum_{i=q+1}^{n-q} i^{-3/2}(n-i)^{-3/2} \leq cn^{-3/2} \sum_{i=q+1}^{n-q} i^{-3/2}.$$

Последнее, очевидно, влечет (6.2).

Лемма 13. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \sum_{k=T}^{n-T} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau_{j+1} > n] = 0. \quad (6.4)$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{a_{\tau_j} a_{\tau_j, n} (\xi_{n+1} - 1)}{(a_{\tau_j} (a_{\tau_j, n} + b_{\tau_j, n}) + b_{\tau_j}) (a_{\tau_j} (a_{\tau_j, n} \xi_{n+1} + b_{\tau_j, n}) + b_{\tau_j})} \\ &\leq \frac{a_{\tau_j, n} (\xi_{n+1} - 1)}{a_{\tau_j} (a_{\tau_j, n} + b_{\tau_j, n}) (a_{\tau_j, n} \xi_{n+1} + b_{\tau_j, n})} \end{aligned} \quad (6.5)$$

и при фиксации τ_j величина $a_{\tau_j}^{-1} = e^{S_{\tau_j}}$ в правой части (6.5) не зависит от второго сомножителя, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau_{j+1} - \tau_j > n - k] &\leq \mathbf{M}[e^{S_{\tau_j}}; \tau_j = k] \mathbf{M}[\Delta_{n-k+1}; \tau_1 > n - k] \\ &\leq \lambda^j \mathbf{P}\{\tau_j = n\} c(n - k + 1)^{-3/2} \\ &\leq c_1 j \lambda^j k^{-3/2} (n - k + 1)^{-3/2}, \end{aligned}$$

где $\lambda < 1$ (при выводе двух последних неравенств мы использовали теорему 2 и оценки (5.12) и (5.13)). Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=T}^{n-T} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau_{j+1} > n] &\leq c_1 j \lambda^j \sum_{k=T}^{n-T} k^{-3/2} (n - k + 1)^{-3/2} \\ &\leq c_2 j \lambda^j n^{-3/2} \sum_{k=T}^{\infty} k^{-3/2}, \end{aligned}$$

что доказывает (6.4).

Лемма 14. Для любых фиксированных натуральных j и k существует конечный предел

$$Z_{k,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau_{j+1} > n]. \quad (6.6)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau_{j+1} - \tau_j > n - k] \\ &= \mathbf{M} \left[\frac{a_k a_{k,n} (\xi_{n+1} - 1) I\{\tau_{j+1} - \tau_j > n - k\} I\{\tau_j = k\}}{(a_k(a_{k,n} + b_{k,n}) + b_k)(a_k(a_{k,n} \xi_{n+1} + b_{k,n}) + b_k)} \right] \\ &= \mathbf{M} \left[a_k I\{\tau_j = k\} \mathbf{M}' \left[\frac{a'_{n-k} (\xi'_{n-k+1} - 1) I\{\tau'_1 > n - k\}}{(a_k(a'_{n-k} + b'_{n-k}) + b_k)(a_k(a'_{n-k} \xi'_{n-k+1} + b'_{n-k}) + b_k)} \right] \right], \quad (6.7) \end{aligned}$$

где

$$a'_{n-k} \stackrel{d}{=} a_{n-k}, \quad b'_{n-k} \stackrel{d}{=} b_{n-k}, \quad \xi'_{n-k+1} \stackrel{d}{=} \xi_{n-k+1}, \quad \tau'_1 \stackrel{d}{=} \tau_1;$$

эти величины не зависят от a_k, b_k, τ_j ; математическое ожидание $\mathbf{M}'$ берется при фиксированных a_k, b_k, τ_j . В силу замечания 5, при $n \rightarrow \infty$ для фиксированных a_k, b_k

$$\begin{aligned} n^{3/2} \mathbf{M}' \left[\frac{a'_{n-k} (\xi'_{n-k+1} - 1) I\{\tau'_1 > n - k\}}{(a_k(a'_{n-k} + b'_{n-k}) + b_k)(a_k(a'_{n-k} \xi'_{n-k+1} + b'_{n-k}) + b_k)} \right] \\ \rightarrow A_0(b_k, a_k) \end{aligned} \quad (6.8)$$

с вероятностью единица. Легко понять, используя лемму 3 и неравенства $\rho_n^{-1} \leq 1$, $(\rho_n^*)^{-1} \leq 1$, что случайная величина под знаком внешнего математического ожидания в (6.7) не превосходит

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[a'_{n-k} (\xi'_{n-k+1} - 1) I\{\tau'_1 > n - k\}] &\leq \mathbf{M} \xi_1 \mathbf{M}[a'_{n-k} I\{\tau'_1 > n - k\}] \\ &\leq c n^{-3/2} H_0 \mathbf{M} \xi_1. \end{aligned}$$

Отсюда, обращаясь к теореме Лебега и используя (6.8), находим, что

$$\begin{aligned} Z_{k,j} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k, \tau'_1 > n - k] \\ &= \mathbf{M} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \Delta_{n+1} I\{\tau_j = k\} I\{\tau'_1 > n - k\} \right] \\ &= \mathbf{M}[a_{\tau_j} I\{\tau_j = k\} A_0(b_k, a_k)] < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает (6.6).

Наша следующая цель — доказательство того, что для любого фиксированного j и любого натурального p существует конечный предел

$$Z'_{p,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = n - p, \tau_{j+1} > n]. \quad (6.9)$$

Приводимое ниже доказательство этого факта весьма громоздко и опирается на целый ряд утверждений из [11]. Для удобства ссылок мы приведем формулировки этих результатов, которые дополняют соотношения (5.10) и (5.11).

Для $x > 0$ положим

$$C_n(x) = \mathbf{P}\{\tau_1 = n, S_{\tau_1} < -x\}, \quad \zeta_x = \min\{i: S_i < -x\}. \quad (6.10)$$

Лемма 15 ([11]). Если выполнены условия леммы 2, то существует такая постоянная $c < \infty$, что

$$C_n(x) \leq cn^{-3/2} \int_x^\infty y^2 dF(y), \quad (6.11)$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_x = n\} \leq c(|x| + 1)n^{-3/2}. \quad (6.12)$$

Пусть $x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_q$ — набор неотрицательных (не обязательно конечных) чисел, $y_0 < 0$, $x_q = \infty$, а $l_1, \dots, l_p$ — набор действительных чисел (не обязательно конечных). Пусть также $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q, N_1, \dots, N_q, L_1, \dots, L_p$ — набор борелевских множеств, лежащих в $(-\infty, \infty)$. Как и в лемме 10, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q, \vec{x}, \vec{\Gamma}) &= \{\eta_1 \in \Gamma_1\} \bigcap_{i=1}^{q-1} \{S_i \leq x_i, \eta_{i+1} \in \Gamma_{i+1}\}, \\ \mathcal{B}_n(q, \vec{y}, \vec{N}) &= \{S_n \leq y_0\} \bigcap_{j=1}^q \{S_{n-j} \leq y_j, \eta_{n-j+1} \in N_j\}, \\ \mathcal{R}_n(p, \vec{l}, \vec{L}) &= \bigcap_{k=1}^p \{S_{n+k} \leq l_k, \eta_{n+k+1} \in L_k\}, \\ \mathcal{K}(n, q, p) &= \mathcal{A}(q, \vec{x}, \vec{\Gamma}) \cap \mathcal{B}_n(q, \vec{y}, \vec{N}) \cap \mathcal{R}_n(p, \vec{l}, \vec{L}). \end{aligned}$$

Лемма 16. Если выполнены условия леммы 10, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_0\{\mathcal{K}(n, q, p) \mid \tau_1 = n, \tau_2 > n + p\} \\ &\rightarrow \frac{1}{c} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_q} \prod_{i=1}^q G(z_i - z_{i-1}, \Gamma_i) dF(z_i - z_{i-1}) \\ &\quad \times \int_0^{y_q} dU_{z_q}(t) \int_{-t}^{y_{q-1}-t} \dots \int_{-t}^{y_1-t} \int_{-\infty}^{y_0-t} \mathbf{P}_0\{\mathcal{R}_0(p, \vec{l} - \vec{l}t_0, \vec{L}) \mid \tau_1 > p\} \quad (6.13) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^q G(t_{j-1} - t_j, N_{j-1}) dF(t_{j-1} - t_j), \end{aligned}$$

где $z_0 = t_q = 0$, $\vec{l} - \vec{l}t_0 = (l_1 - t_0, \dots, l_p - t_0)$, с определяется соотношением (5.11), а функция $U_z(x)$ та же, что и в лемме 5.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 10, и мы его опускаем.

Лемма 17. В условиях теоремы 1 для любого фиксированного натурального p существует конечный предел

$$Z''_{p,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[\Delta_{n+1} \mid \tau_1 = n - p, \tau_2 > n]. \quad (6.14)$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \rho_n(q, p) &= \sum_{i=0}^{q-1} \eta_{i+1} e^{-S_i} + \sum_{j=n-q-p}^{n-1} \eta_{j+1} e^{-S_j} + e^{-S_n}, \\ \rho_n^*(q, p) &= \rho_n(q, p) + (\xi_{n+1} - 1) e^{-S_n}. \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду (2.4)

$$\rho_n(q, p) \geq \sum_{j=n-p}^{n-1} \eta_{j+1} e^{-S_j} + e^{-S_n} = a_{n-p}(b_{n-p,n} + a_{n-p,n}) \geq a_{n-p}, \quad (6.15)$$

$$\rho_n^*(q, p) \geq a_{n-p}. \quad (6.16)$$

Используя представление $a_n = a_{\tau_1} a_{\tau_1, n}$, лемму 16 и условия теоремы 1, нетрудно убедиться в существовании конечного предела

$$Z'_{p,1}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n(q, p) \rho_n^*(q, p)} \mid \tau_1 = n - p, \tau_2 > n \right]. \quad (6.17)$$

В силу монотонного убывания по q величины, стоящей под знаком математического ожидания в левой части (6.17), существует

$$Z'_{p,1} = \lim_{q \rightarrow \infty} Z'_{p,1}(q).$$

Ввиду (6.15) и (6.16)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\rho_n(q, p)} \frac{1}{\rho_n^*(q, p)} - \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_n^*} \\ &\leq (\rho_n - \rho_n(q, p)) \left(\frac{1}{\rho_n(q, p)} \frac{1}{\rho_n^*(q, p)} + \frac{1}{\rho_n} \frac{1}{\rho_n^*} \right) \\ &\leq 2(\rho_n - \rho_n(q, p)) a_{n-p}^{-2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{M} \left[\frac{a_n(\xi_{n+1} - 1)}{\rho_n(q, p) \rho_n^*(q, p)} - \Delta_{n+1}; \tau_1 = n - p, \tau_2 > n \right] \\ &\leq 2\mathbf{M}[a_{\tau_1} a_{\tau_1, n-\tau_1}(\xi_{n+1} - 1) a_q b_{q, \tau_1-q+1} a_{\tau_1}^{-2}; \tau_1 = n - p, \tau_2 > n] \\ &\leq 2\mathbf{M}[a_p(\xi_{n+1} - 1); \tau_1 > p] \mathbf{M}[a_q b_{q, n-p-q+1}; \tau_1 = n - p]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Отсюда, из леммы 12 и равенства (6.12) вытекает (6.14).

Лемма 18. В условиях теоремы 1 для любого фиксированного $p = 0, 1, \dots$ и любого $j \geq 1$ существует конечный предел

$$Z''_{p,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[\Delta_{n+1} \mid \tau_j = n - p, \tau_{j+1} > n]. \quad (6.19)$$

Доказательство. При $j = 1$ существование предела в (6.19) было доказано в лемме 17. В случае $j > 1$ мы воспользуемся индукцией. Введем случайную величину

$$\Xi_{n-p,p} = \frac{a_{n-p}(\xi'_{p+1} - 1)}{(a_{n-p}\rho'_p + b_{n-p})(a_{n-p}\tilde{\rho}'_p + b_{n-p})},$$

где $\rho'_p = a'_p + b'_p$, $\tilde{\rho}'_p = a'_p \xi'_{p+1} + b'_p$,

$$a'_p \stackrel{d}{=} a_p, \quad b'_p \stackrel{d}{=} b_p, \quad \xi'_{p+1} \stackrel{d}{=} \xi_{p+1}, \quad \tau'_1 \stackrel{d}{=} \tau_1,$$

причем наборы $(a'_p, b'_p, \xi'_{p+1}, \tau'_1)$ и (a_{n-p}, b_{n-p}) независимы. Ясно, что

$$\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = n - p, \tau_{j+1} > n] = \mathbf{M}[a'_p I\{\tau'_1 > p\} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_j = n - p\}]], \quad (6.20)$$

где символ $\mathbf{M}'$ означает, что соответствующее математическое ожидание берется при фиксированных a'_p, b'_p и τ'_1 . Запишем внутреннее математическое ожидание в (6.20) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_j = n - p\}] &= \sum_{l=j-1}^T \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = l; \tau_j = n - p\}] \\ &\quad + \sum_{l=T+1}^{n-p-T} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = l; \tau_j = n - p\}] \\ &\quad + \sum_{l=0}^{T-1} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = n - l - p; \tau_j = n - p\}]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Очевидно, что средняя сумма в (6.21) оценивается (с вероятностью единица) суммой

$$\sum_{l=T+1}^{n-p-T} \mathbf{P}\{\tau_{j-1} = l; \tau_1 = n - p - l\}$$

которая, ввиду (5.13), есть $\varepsilon(T)n^{-3/2}$. Далее, при $j - 1 \leq l \leq T$

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = l; \tau_j = n - p\}] \\ &= \mathbf{M}' \left[a_l I\{\tau_{j-1} = l\} \mathbf{M}'' \left[\frac{a''_{n-p-l}(\xi'_{p+1} - 1) I\{\tau'_1 = n - p - l\}}{(a_l(a''_{n-p-l}\rho'_p + \rho''_{n-p-l}) + b_l)(a_l(a''_{n-p-l}\rho'_p + \tilde{\rho}''_{n-p-l}) + b_l)} \right] \right], \end{aligned} \quad (6.22)$$

где

$$\begin{aligned} a''_{n-p-l} &\stackrel{d}{=} a_{n-p-l}, \quad b''_{n-p-l} \stackrel{d}{=} b_{n-p-l}, \quad \tau''_1 \stackrel{d}{=} \tau_1, \\ \rho''_{n-p-l} &= a''_{n-p-l} + b''_{n-p-l}, \quad \tilde{\rho}''_{n-p-l} = a''_{n-p-l}\xi'_{p+1} + b''_{n-p-l}, \end{aligned}$$

причем наборы (a_l, b_l) , (a'_p, b'_p) и $(a''_{n-p-l}, b''_{n-p-l})$ независимы, а внутреннее математическое ожидание берется при фиксированных $a_l, b_l, \tau_{j-1}, a'_p, b'_p, \tau'_1$ и ξ'_{p+1} .

Обозначая $\mathcal{G}(n, a_l, b_l, \rho'_p, \tilde{\rho}'_p)$ внутреннее математическое ожидание в (6.22) и повторяя практически дословно доказательство леммы 17, можно показать, что с вероятностью единица существует предел

$$\mathcal{G}(a_l, b_l, \rho'_p, \tilde{\rho}'_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathcal{G}(n, a_l, b_l, \rho'_p, \tilde{\rho}'_p),$$

который, очевидно, ограничен с вероятностью единица. Это позволяет нам, воспользовавшись теоремой Лебега, получить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = l; \tau_j = n - p\}] = \mathbf{M}'[a_l I\{\tau_{j-1} = l\} \mathcal{G}(a_l, b_l, \rho'_p, \tilde{\rho}'_p)] < \infty$$

с вероятностью единица. Таким образом, с вероятностью единица существует предел

$$\mathcal{G}(\rho'_p, \tilde{\rho}'_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \sum_{l=j-1}^{T-1} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = l; \tau_j = n - p\}].$$

Рассмотрим, наконец, последнюю сумму в (6.21). Вместо (6.22), воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = n-l-p; \tau_j = n-p\}] \\ &= \mathbf{M}'\left[a_l'' I\{\tau_1'' = l\} \mathbf{M}''\left[\frac{a_{n-p-l}(\xi_{p+1}' - 1) I\{\tau_{j-1} = n-p-l\}}{(a_{n-p-l}(a_l'' \rho_p' + \rho_l'') + b_{n-p-l})(a_{n-p-l}(a_l'' \rho_p' + \tilde{\rho}_l'') + b_{n-p-l})}\right]\right], \end{aligned} \quad (6.23)$$

где внутреннее математическое ожидание берется при фиксированных $a_p', b_p', \tau_1', a_l'', b_l'', \tau_1''$ и ξ_{p+1}' . Обозначая $\mathcal{F}_j(n, a_l'', \rho_p', \rho_l'', \tilde{\rho}_l'')$ внутреннее математическое ожидание в (6.23) и используя индуктивный переход, можно показать, что с вероятностью единица существует конечный предел

$$\mathcal{F}_j(n, a_l'', \rho_p', \rho_l'', \tilde{\rho}_l'') = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathcal{F}_j(n, a_l'', \rho_p', \rho_l'', \tilde{\rho}_l'').$$

Отсюда, воспользовавшись теми же аргументами, что и раньше, и применяя теорему Лебега, можно вывести, что с вероятностью единица существует конечный предел

$$\mathcal{F}_j(\rho_p') = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \sum_{l=0}^{T-1} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_{j-1} = n-l-p; \tau_j = n-p\}].$$

Возвращаясь к представлению (6.21), заключаем, что с вероятностью единица существует конечный ограниченный предел

$$\mathcal{G}^*(\rho_p', \tilde{\rho}_p') = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{M}'[\Xi_{n-p,p} I\{\tau_j = n-p\}]. \quad (6.24)$$

Наконец, используя (6.24) в (6.20), и еще раз переходя к пределу под знаком математического ожидания в соотношении

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}[\Delta_{n+1} \mid \tau_j = n-p, \tau_{j+1} > n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{M}[n^{3/2} \Delta_{n+1} I\{\tau_j = n-p, \tau_{j+1} > n\}]}{n^{3/2} \mathbf{P}\{\tau_j = n-p, \tau_{j+1} > n\}}$$

получаем (6.19).

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 1, то имеет место соотношение (5.9).

Это утверждение следует из леммы 18 и соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_j = n-p, \tau_{j+1} > n\} &= \mathbf{P}\{\tau_j = n-p\} \mathbf{P}\{\tau_1 > p\} \\ &\sim c_j n^{-3/2} \mathbf{P}\{\tau_1 > p\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 4. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n; \tau_{j+1} > n] &= \sum_{k=j}^{T-1} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k; \tau_{j+1} > n] \\ &\quad + \sum_{k=T}^{n-T} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = k; \tau_{j+1} > n] \\ &\quad + \sum_{p=1}^{T-1} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j = n-p; \tau_{j+1} > n]. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться леммами 13, 14, и соотношением (6.9).

7. Доказательство теоремы 1

Теперь все готово для завершения доказательства теоремы 1. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\varkappa = n + 1\}$ в виде (см. (2.6))

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\varkappa = n + 1\} &= \mathbf{M}\Delta_{n+1} \\ &= \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] + \sum_{j=1}^{J-1} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n; \tau_{j+1} > n] + \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_J \leq n].\end{aligned}$$

В силу теорем 2 и 4, при фиксированном J

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \left(\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_1 > n] + \sum_{j=1}^{J-1} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_j \leq n; \tau_{j+1} > n] \right) = \sum_{j=0}^{J-1} A_j > 0,$$

в то время, как, согласно лемме 3, остаточный член $\mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_J \leq n]$ допускает оценку

$$n^{3/2} \mathbf{M}[\Delta_{n+1}; \tau_J \leq n] \leq c(J+1)\lambda^J, \quad \lambda < 1,$$

и может быть сделан выбор J сколь угодно малым. Таким образом,

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} \mathbf{P}\{\varkappa = n\} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j < \infty.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Smith W. L., Wilkinson W. E. On branching processes in random environments. *Ann. Math. Stat.* (1969) **40**, 814–827.
2. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, 813–825.
3. Kesten H., Ney P., Spitzer F. The Galton–Watson process with mean one and finite variance. *Теория вероятностей и ее применения* (1966) **11**, 513–540.
4. Козлов М. В. Блуждание в одномерной случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1973) **18**, 406–408.
5. Solomon F. Random walk in random environment. *Ann. Probab.* (1975) **3**, 1–31.
6. Kesten H., Kozlov M. V., Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment. *Composito Math.* (1975) **30**, 145–168.
7. Dwass M. The total progeny in a branching process and related random walk. *J. Appl. Probab.* (1969) **6**, 682–686.
8. Rodgers L. C. G. Brownian local times and branching processes, *Lect. Notes Math.* (1984) **1059**, 42–55.
9. Agresti A. On the extinction time of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, 39–46.

10. Kaigh W. D. An invariance principle for random walk conditioned by a late return to zero. *Ann. Probab.* (1976) **1**, 115–121.
11. Эппель М. С. Локальная предельная теорема для момента первого перескока. *Сибирский матем. журнал* (1979) **20**, 181–191.
12. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т.2. Мир, Москва, 1967.

Статья поступила 28.06.1996.