Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Головач, Суммарная величина вершинного разделения графа, *Дискрет. матем.*, 1997, том 9, выпуск 4, 86–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:13:30

Суммарная величина вершинного разделения графа

© 1997 г. П. А. Головач

Вводится новый инвариант графов, названный нами суммарной величиной вершинного разделения. Показано, что задача распознавания, состоящая в том, чтобы по графу G и неотрицательному целому числу k проверить, верно ли, что $sv(G) \leq k$, где $sv(G)$ — суммарная величина вершинного разделения графа G , является NP-полной даже для реберных графов. Решается задача вычисления данного инварианта для графов интервалов. Рассмотрен также вопрос о суммарной величине вершинного разделения деревьев.

Работа выполнена при поддержке программой Университеты России.

1. Основные определения

В работе вводится новый инвариант графов, названный нами суммарной величиной вершинного разделения, находящийся в том же отношении к достаточно хорошо изученному инварианту, величине вершинного разделения графа [3, 4], в каком находится ширина ленты графа к суммарной ширине ленты [2]. Характеристики графов, определяемые через оптимальные (по различным критериям) нумерации вершин, находят применение в различных областях, например, в электронике, программировании. Мы полагаем, что введенный нами инвариант также представляет интерес.

В этом разделе даны основные определения, которые потребуются в этой работе.

Пусть $G = (V, E)$ — простой граф с n вершинами. Мы будем рассматривать только простые графы, не оговаривая этого в дальнейшем.

Взаимно однозначное отображение $f: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ называется нумерацией вершин графа G . Положим

$$S_i(G, f) = |\{v: v \in V, f(v) \leq i, \text{ существует ребро } (v, u) \text{ такое, что } f(u) > i\}|,$$

где f — нумерация вершин графа G , $i = 1, \dots, n$, а $|A|$ — число элементов конечного множества A .

Величиной вершинного разделения графа G при нумерации вершин f называется величина

$$vs(G, f) = \max_{1 \leq i \leq n} S_i(G, f),$$

а величиной вершинного разделения графа G называется величина

$$vs(G) = \min vs(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G .

В этой работе рассматривается другая характеристика графа. Положим

$$sv(G, f) = \sum_{i=1}^n S_i(G, f),$$

где f — нумерация вершин графа G , и назовем суммарной величиной вершинного разделения графа G величину

$$sv(G) = \min sv(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G .

Напомним в этой связи, что шириной ленты графа G при нумерации f называется величина

$$bw(G, f) = \max\{|f(u) - f(v)| : (u, v) \in E\},$$

а шириной ленты графа G называется величина

$$bw(G) = \min bw(G, f),$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G . Соответственно, суммарной шириной ленты графа G называется величина

$$bws(G) = \min \sum_{(u,v) \in E} |f(u) - f(v)|,$$

где минимум берется по всевозможным нумерациям f вершин графа G . Таким образом, введенный нами инвариант находится в том же отношении к величине вершинного разделения, в каком ширина ленты графа находится к суммарной ширине ленты.

2. Сложность

В этом разделе рассматривается вопрос о сложности вычисления суммарной величины вершинного разделения. Оценим сначала этот инвариант снизу.

Теорема 1. Пусть G — граф с m ребрами. Тогда $sv(G) \geq m$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нумерацию вершин f графа G . Обозначим через r_i число ребер, соединяющих вершину, получившую номер i , с вершинами с номерами меньшими, чем i , $i = 1, \dots, n$, где n — число вершин G . Легко видеть, что $r_i \leq S_{i-1}(G, f)$ при $i = 2, \dots, n$. Поскольку $r_1 = 0$ и $S_n(G, f) = 0$, получаем, что

$$sv(G, f) = \sum_{i=1}^n S_i(G, f) \geq \sum_{i=1}^n r_i = m.$$

Так как f — произвольная нумерация, отсюда следует, что $sv(G) \geq m$.

Оказывается, что эта оценка является точной для графов интервалов.

Теорема 2. Пусть G — граф интервалов с m ребрами. Тогда $sv(G) = m$.

Доказательство. Поскольку G — граф интервалов, вершинам G соответствуют интервалы действительной прямой и две вершины графа G смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им интервалы пересекаются. Будем считать (очевидно, что это не приводит к потере общности), что левые концы всех интервалов, соответствующих вершинам G , различаются. Перенумеруем вершины G в порядке возрастания величин левых концов соответствующих им интервалов и обозначим получившуюся нумерацию вершин через f . Заметим, что если вершина с номером i смежна вершине с номером j и $i < j$, то для любого $k = i + 1, \dots, j$ вершина с номером i смежна вершине с номером k . Из этого замечания вытекает, что

$$r_i \geq S_{i-1}(G, f), \quad i = 2, \dots, n,$$

где r_i , как и в доказательстве предыдущей теоремы, это число ребер, соединяющих вершину с номером i с вершинами с номерами меньшими, чем i . Так как $r_1 = 0$ и $S_n(G, f) = 0$, отсюда следует, что

$$sv(G, f) = \sum_{i=1}^n S_i(G, f) \leq \sum_{i=1}^n r_i = m.$$

Поскольку, по предыдущей теореме, $sv(G) \geq m$, очевидно, что нумерация f является оптимальной и $sv(G) = m$.

Охарактеризуем теперь с помощью графов интервалов суммарную величину вершинного разделения произвольного графа. Для этого нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1. Пусть G_1 и G_2 — графы и G_1 — подграф G_2 . Тогда $sv(G_1) \leq sv(G_2)$.

Доказательство. Пусть f — оптимальная нумерация вершин графа G_2 , то есть $sv(G_2) = sv(G_2, f)$. Рассмотрим нумерацию g вершин графа G_1 такую, что вершины G_1 нумеруются в той же последовательности, что и вершины G_2 при нумерации f . Легко видеть, что $sv(G_1) \leq sv(G_1, g) \leq sv(G_2, f) = sv(G)$.

Сформулируем теперь основное утверждение этого раздела.

Теорема 3. Пусть G — граф. Суммарная величина вершинного разделения графа G совпадает с числом ребер минимального по числу ребер графа интервалов, содержащего граф G в качестве подграфа.

Доказательство. Ясно, что для доказательства этой теоремы достаточно построить граф интервалов, содержащий граф G в качестве подграфа, суммарная величина вершинного разделения которого совпадает с $sv(G)$.

Рассмотрим оптимальную нумерацию f вершин графа G . Обозначим через v_i вершину с номером i при $i = 1, \dots, n$, где n — число вершин графа G . Для каждого $i = 1, \dots, n$ сопоставим вершине v_i интервал $[i, a_i]$, где $a_i = i + 1/2$, если вершина v_i не смежна вершинам с номерами большими, чем i , и

$$a_i = \max\{k: k \in \{i + 1, \dots, n\} \text{ и вершина } v_i \text{ смежна вершине } v_k\} + 1/2.$$

Обозначим порожденный этими интервалами граф интервалов через $I(G)$.

Докажем, что граф G является подграфом графа $I(G)$. Для этого достаточно показать, что если две вершины графа G являются смежными, то соответствующие им интервалы пересекаются. Пусть (v_i, v_j) — ребро графа G и $i < j$. Вершине v_i сопоставлен интервал $[i, a_i]$, а вершине v_j интервал $[j, a_j]$. Из определения этих интервалов, а также из того, что $i < j$ следует, что $i < j < a_i$ и, следовательно, эти интервалы пересекаются.

Поскольку граф G является подграфом $I(G)$, согласно лемме 1 $sv(G) \leq sv(I(G))$. Докажем, что имеет место и обратное неравенство $sv(G) \geq sv(I(G))$. Ясно, что для этого достаточно доказать, что $sv(G, f) \geq sv(I(G), f)$. Покажем, что $S_i(G, f) \geq S_i(I(G), f)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Это неравенство вытекает из того, что если вершина v_j , где $j \leq i$ смежна в графе $I(G)$ вершине v_k , где $k > i$, то $j < k < a_j$, а по определению a_j из этого следует, что вершина v_j смежна в графе G некоторой вершине v_p , где $p \in \{k, \dots, n\}$.

Из полученных неравенств вытекает, что $sv(G) = sv(I(G))$. Из этого равенства, а также из того, что граф G является подграфом графа интервалов $I(G)$, следует утверждение теоремы.

Таким образом, задача вычисления суммарной величины вершинного разделения графа свелась к задаче о минимальном числе ребер, добавление которых к исходному графу делает его графом интервалов.

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть G — граф с m ребрами. Равенство $sv(G) = m$ справедливо тогда и только тогда, когда G является графом интервалов.

Известно (см. [1]), что проверить является ли граф графом интервалов можно с помощью полиномиального алгоритма. Поэтому проверить верно ли, что $sv(G) = m$ можно за полиномиальное время. Однако в общем случае задача оказывается более сложной.

Теорема 4. Задача распознавания, состоящая в том, чтобы по графу G и неотрицательному целому числу k проверить, верно ли, что $sv(G) \leq k$, является NP-полной даже для реберных графов.

Доказательство. Принадлежность нашей задачи классу NP очевидна.

Согласно [1] задача распознавания, состоящая в том, чтобы по графу $G = (V, E)$ и неотрицательному целому числу k определить, существует ли множество E' , содержащее E , такое, что $|E' \setminus E| \leq k$ и граф $G' = (V, E')$ является графом интервалов, является NP-полной даже для реберных графов. Из теоремы 3 сразу следует, что эта задача полиномиально преобразуется к нашей.

3. Суммарная величина вершинного разделения деревьев

В этом разделе приведены необходимые и достаточные условия того, что $sv(T) \geq k$, где T — дерево, а k — неотрицательное целое число.

Будем обозначать через $v_1 - v_2 - \dots - v_k$ путь в графе, соединяющий вершины v_1 и v_k , последовательно проходящий через вершины $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$.

Пусть $T = (V, E)$ — дерево. Назовем путь $v_1 - v_2 - \dots - v_k$ стволом дерева T , если вершины v_1 и v_k имеют единичные степени.

Если $v_1 - v_2 - \dots - v_k$ — ствол дерева T , то компоненты связности подграфа T , порожденного множеством вершин $V \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, будем называть ветвями ствола, а те ветви ствола, которые имеют вершины, смежные v_i (в дереве T), будем называть ветвями ствола, соответствующими вершине v_i , $i = 1, \dots, k$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть T — дерево с m ребрами, k — неотрицательное целое число. Неравенство $sv(T) \geq k$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого ствола S с ветвями $T_1, T_2, \dots, T_r$

$$\sum_{i=1}^r sv(T_i) + m \geq k.$$

Доказательство. Предположим, что в дереве T существует путь S с ветвями $T_1, T_2, \dots, T_r$, для которого

$$\sum_{i=1}^r sv(T_i) + m < k.$$

Покажем, что в этом случае $sv(G) < k$.

Пусть S — это путь $v_1 - v_2 - \dots - v_t$. Для удобства мы будем считать, что каждая вершина ствола S является ветвью ствола, соответствующей этой вершине, состоящей из единственной вершины. Обозначим через r_i число ветвей ствола S , соответствующих вершине v_i , через $T_1^i, T_2^i, \dots, T_{r_i}^i$ ветви ствола S , соответствующие вершине v_i , где T_1^i состоит из вершины v_i , через $n_1^i, n_2^i, \dots, n_{r_i}^i$ количества вершин, а через $f_1^i, f_2^i, \dots, f_{r_i}^i$ оптимальные нумерации деревьев $T_1^i, T_2^i, \dots, T_{r_i}^i$ при $i = 1, \dots, t$. Перенумеруем вершины T следующим образом: последовательно для $i = 1, 2, \dots, r$ и также последовательно для $j = 1, 2, \dots, r_i$ нумеруются вершины T_j^i в той же последовательности, что при нумерации f_j^i . Обозначим получившуюся нумерацию вершин дерева T через $f(S)$.

Пусть $k \in \{1, \dots, m\}$. Выберем минимальное $i \in \{1, \dots, t-1\}$, а затем минимальное $j \in \{1, \dots, r_i\}$, для которых $p(i, j) \geq k$, где

$$p(i, j) = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{r_p} n_l^p + \sum_{l=1}^j n_l^i$$

(если $i = 1$, то считаем, что первая сумма равна нулю). Нетрудно проверить, что $S_k(T, f(S)) = 1 + S_{k-p(i, j)}(T_j^i, f_j^i)$. Поэтому

$$\begin{aligned} sv(T, f(S)) &= \sum_{k=1}^m S_k(T, f(S)) = \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l=1}^{n_j^i} (S_l(T_j^i) + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{r_i} (sv(T_j^i) + n_j^i) = \sum_{i=1}^r sv(T_i) + m. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^r sv(T_i) + m < k,$$

и $sv(T) \leq sv(T, f(S))$, отсюда следует, что $sv(T) < k$.

Предположим теперь, что $sv(T) < k$ и покажем, что в этом случае найдется некоторый ствол S с ветвями $T_1, T_2, \dots, T_r$, для которого

$$\sum_{i=1}^r sv(T_i) + m < k.$$

Пусть f — оптимальная нумерация вершин дерева T , то есть $sv(T) = sv(T, f)$. Выберем ствол S , содержащий вершины с номерами 1 и $m+1$ (в соответствии с нумерацией f). Пусть r_i, T_j^i, f_j^i, n_j^i при $i = 1, \dots, t$, где t — число вершин ствола S , и при $j = 1, \dots, r_i$ обозначают то же самое, что и выше. Предположим, что для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$ вершина $f^{-1}(k)$ является вершиной T_j^i . Положим

$$p = |\{v: v \text{ — вершина } T_j^i, f(v) \leq k\}|.$$

Заметим, что $S_k(T, f) \geq S_p(T_j^i) + 1$. Из этого следует, что

$$sv(T) = sv(T, f) = \sum_{k=1}^m S_k(T, f) \geq \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{p=1}^{n_j^i} (S_p(T_j^i) + 1) = sv(T, f(S)).$$

Так как

$$sv(T, f(T)) = \sum_{i=1}^r sv(T_i) + m,$$

где $T_1, T_2, \dots, T_r$ — ветви ствола S , получаем, что

$$\sum_{i=1}^r sv(T_i) + m < k.$$

Мы полагаем, что, основываясь на этой теореме, можно построить полиномиальный алгоритм для вычисления суммарной величины вершинного разделения деревьев. Для этого нужно найти ствол S , для которого нумерация $f(S)$ будет оптимальной.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
2. Chinn P. Z., Chvatalova J., Dewdney A. K., Gibbs N. E. Bandwidth problem for graphs and matrices. A survey. *J. Graph Theory* (1982) **6**, 223–254.
3. Ellis J. A., Sudborough I. H., Turner J. S. Graph separation and search number. *Proc. Allerton Conf. on Communication, Control and Computing*. 1983, 224–233.
4. Kinnarsly N. G. The vertex separation number of a graph equals its pathwidth. *Inform. Process Letters* (1992) **42**, 345–350.

Статья поступила 25.05.1994.