Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Горшков, О сложности задачи нахождения числа решений систем булевых уравнений, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 72–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:27:21

О сложности задачи нахождения числа решений систем булевых уравнений

© 1996 г. С. П. Горшков

В работе рассматриваются классы систем булевых уравнений вида

$$f_{s_i}(x_{s_{i1}}, \dots, x_{s_{ik_i}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $m \in \{1, 2, \dots\}$, $x_{s_{ij}} \in \{x_1, x_2, \dots\}$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, m$, функции f_{s_i} выбираются из некоторого набора булевых функций

$$F = \{f_j(x_1, \dots, x_{k_j} \mid j \in J)\}.$$

Задача определения числа решений систем уравнений такого класса обозначена $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$. Множество всех булевых функций, представимых конъюнкцией аффинных функций, обозначено A . Показано, что если $F \subseteq A$, то задача $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ является полиномиальной, а если $F \not\subseteq A$, то задача $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ является $\#P$ -полной (труднорешаемой).

1. Постановка задачи, комментарии

К проблеме решения систем булевых уравнений сводится ряд задач дискретной математики (см., например, [1, 2]). Важным направлением исследования этой проблемы является изучение такой характеристики систем уравнений, как число решений. В настоящей работе рассматриваются так называемые системы булевых уравнений без ограничений на выбор неизвестных, которые, в частности, возникают при анализе булевых формул из известной задачи “обобщенная выполнимость” [3–5].

Введем необходимые понятия. Под классом систем булевых уравнений далее понимаем бесконечное множество систем булевых уравнений определенного вида (например, множество систем булевых линейных уравнений), в которых функции левых частей записаны некоторыми булевыми формулами. При необходимости будем указывать, какими именно булевыми формулами (например, многочленами Жегалкина, дизъюнктивными нормальными формами) записаны функции левых частей систем уравнений. Пусть N — множество натуральных чисел; B_n — n -мерное пространство двоичных векторов; R — некоторый класс систем уравнений; $S(x_{q_1}, \dots, x_{q_n})$ — некоторая система из R , зависящая от неизвестных $x_{q_1}, \dots, x_{q_n}$ (считаем, что система S зависит от неизвестного x_{q_i} , если это неизвестное содержится в записи системы S).

Множество всех решений системы $S(x_{q_1}, \dots, x_{q_n})$ обозначим $\text{sol}(S(x_{q_1}, \dots, x_{q_n}))$.

Сформулируем некоторые массовые задачи [3], связанные с решением систем уравнений класса R .

- (1) Задача распознавания совместности систем класса R .

Условие. Задана система $S \in R$.

Вопрос. Верно ли, что $|\text{sol}(S)| > 0$?

- (2) Задача определения числа решений систем класса R .

Условие. Задана система $S \in R$.

Вопрос. Какова мощность множества $\text{sol}(S)$?

Задачи 1, 2 обозначим, соответственно, $\text{sat}(R)$, $\text{enu}(R)$. Очевидно, что задача $\text{sat}(R)$ не сложнее задачи $\text{enu}(R)$. Известные результаты о сложности задач $\text{sat}(R)$ и $\text{enu}(R)$ для ряда классов систем уравнений R приведем ниже.

Задачи вида $\text{enu}(R)$ являются частным случаем задач перечисления, на которых остановимся подробнее (полную постановку вопроса см. в разделе 5.4 работы [6] или в разделе 7.3 монографии [3]). Пусть в массовой задаче W каждая индивидуальная задача $w \in W$ имеет ассоциированное с ней множество решений $\text{sol}(w)$. Задача перечисления, соответствующая задаче W , формулируется так: задана $w \in W$, какова мощность множества $\text{sol}(w)$?

Считающей машиной Тьюринга называется недетерминированная машина Тьюринга с вспомогательным устройством, в котором подсчитывается число ветвей вычислений, приводящих к решению. Функция сложности $\varphi(n)$ есть длина самого продолжительного пути вычисления по всем входам размера n .

Обозначим через $\#P$ класс задач перечисления, которые могут быть решены за полиномиальное время на подходящей считающей машине Тьюринга, а через P' — класс задач перечисления, которые могут быть решены за полиномиальное время (с полиномиальной сложностью) на подходящей детерминированной машине Тьюринга. Задачи класса P' называются полиномиальными.

Пример. Задача определения числа решений систем булевых линейных уравнений

$$\alpha_{i1}x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{in}x_n = \alpha_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

является полиномиальной. Соответствующий полиномиальный алгоритм просто строится на основе следующих фактов:

- (а) задачи вычисления ранга матрицы и определения совместности систем булевых линейных уравнений являются полиномиальными;
- (б) если система булевых линейных уравнений совместна, то она имеет 2^{n-r} решений, где

$$r = \text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Говорят, что задача перечисления W_2 сводится по Тьюрингу к задаче перечисления W_1 , и записывают $W_2 \propto_T W_1$, если в случае существования полиномиального алгоритма решения W_1 может быть построен полиномиальный алгоритм решения W_2 .

Задача W_1 называется $\#P$ -полной, если для любой задачи $W_2 \in \#P$ имеет место сводимость $W_2 \propto_T W_1$.

В настоящее время гипотеза $P' \neq \#P$, так же как и гипотеза $P \neq NP$, ни доказана, ни опровергнута. $\#P$ -полные задачи являются, по-видимому, более сложными, чем NP -полные задачи; даже в случае $P = NP$ совершенно неясно, решаются ли $\#P$ -полные задачи за полиномиальное время. $\#P$ -полные задачи относятся к разряду труднорешаемых задач [3].

Классы $\#P$ -задач и $\#P$ -полных задач были введены в работе [7] (аналогичное предложение было сделано в [8]). В работе [9] продолжено изучение этой тематики, доказана $\#P$ -полнота многих задач перечисления, в том числе задачи определения числа решений систем булевых уравнений вида

$$x_{s_{i1}} \vee x_{s_{i2}} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $x_{s_{ij}} \in \{x_1, x_2, \dots\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2$. Пусть R — произвольный класс систем булевых уравнений. Используя тот факт, что с полиномиальной сложностью можно вычислить значение всякой булевой формулы на любом фиксированном наборе значений переменных [10, с. 419], нетрудно построить считающую машину Тьюринга, решающую задачу $\text{enu}(R)$ за полиномиальное время. Поэтому $\text{enu}(R) \in \#P$ и, если для некоторой $\#P$ -полной задачи $\text{enu}(R')$, где R' — некоторый класс систем уравнений, удастся показать сводимость $\text{enu}(R') \propto_T \text{enu}(R)$, то задача $\text{enu}(R)$ $\#P$ -полна.

Пусть $N_0 = \{\mathbb{N} \cup 0\}$. Для доказательства сводимости $\text{enu}(R') \propto_T \text{enu}(R)$ будем строить вычисляемые за полиномиальное время функцию $\psi_1: N_0 \rightarrow N_0$ и функцию ψ_2 , сопоставляющую каждой системе $S' \in R'$ систему $\psi_2(S') \in R$, обладающие свойством $|\text{sol}(S')| = \psi_1(|\text{sol}(\psi_2(S'))|)$. Такая сводимость называется консервативной сводимостью (см. [3, с. 210]).

Определим классы систем булевых уравнений, которые будем рассматривать далее. Пусть $X = \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, $F = \{f_j(x_1, \dots, x_{k_j}) \mid j \in J\}$ — конечный или бесконечный набор булевых функций. Считаем, что функции набора F записаны булевыми формулами (в дальнейшем для краткости слово булевы иногда будем опускать).

Символом $[F]_{\text{NC}}$ обозначим класс всевозможных систем уравнений, каждое уравнение которых имеет следующую структуру: правая часть равна 1, левая часть есть функция из набора F , переменные выбираются из множества X ; других ограничений на системы класса $[F]_{\text{NC}}$ не накладывается. Так, если $F = \{f_j(x_1, \dots, x_k) \mid j = 1, \dots, d\}$ — конечный набор булевых функций, то системы класса $[F]_{\text{NC}}$ имеют вид

$$f_{s_i}(x_{s_{i1}}, \dots, x_{s_{ik}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $f_{s_i} \in F$, $x_{s_{ij}} \in X$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$.

Такие системы называются системами булевых уравнений без ограничений на выбор неизвестных. Системы класса $[F]_{\text{NC}}$ являются аналогами S-формул из работы [4]. Заметим, что в виде $[F]_{\text{NC}}$ могут быть записаны многие классы систем уравнений. Так, например, если

$$F = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_k \oplus \alpha \mid k \in \mathbb{N}, \alpha \in \{0, 1\}\},$$

то $[F]_{\text{NC}}$ — множество всех систем линейных уравнений; если

$$F = \{x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_k^{\alpha_k} \mid \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, k\},$$

то множество $[F]_{NC}$ эквивалентно классу всех систем, каждое уравнение которых зависит не более чем от k неизвестных.

Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ называется мультиаффинной [4], если существует представление функции f в виде конъюнкции аффинных (степени нелинейности не выше первой) функций

$$f = \bigwedge_{i=1}^t (\alpha_{i1}x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{ik}x_k \oplus \alpha_{i0}), \quad (4)$$

где $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, t$, $j = 0, \dots, k$. Множество всех мультиаффинных функций обозначим A . Запись (4) будем называть приведенным представлением мультиаффинной функции f .

В разделе 2 настоящей работы, при некоторых ограничениях на запись функций бесконечных наборов $F \subseteq A$, доказана следующая теорема разделимости: если для набора булевых функций F выполняется включение $F \subseteq A$, то задача $\text{epu}([F]_{NC})$ полиномиальна, в случае $F \not\subseteq A$ задача $\text{epu}([F]_{NC})$ является $\#P$ -полной.

Термин разделимость употребляется в том смысле, что любая задача вида $\text{epu}([F]_{NC})$ оказывается либо полиномиальной, либо $\#P$ -полной. Заметим, что для задач вида $\text{sat}([F]_{NC})$ также имеет место разделимость на полиномиальные и NP -полные.

Согласно [4], функция $f(x_1, \dots, x_k)$ называется 0-выполнимой, если $f(0, \dots, 0) = 1$, 1-выполнимой, если $f(1, \dots, 1) = 1$, биюнктивной, если

$$f = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{\alpha_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{\alpha_{i2}}),$$

слабо положительной, если

$$f = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{\alpha_{i1}} \vee x_{s_{i2}} \vee \dots \vee x_{s_{ik_i}}),$$

слабо отрицательной, если

$$f = \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i1}}^{\alpha_{i1}} \vee \bar{x}_{s_{i2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{ik_i}}).$$

Множество всех функций этих классов обозначим соответственно 0-S, 1-S, Bi, WP, WN.

В [4] получен следующий результат. Если для конечного набора булевых функций F , не равных тождественно нулю, выполняется хотя бы одно из включений

$$F \subseteq A, \quad F \subseteq \text{Bi}, \quad F \subseteq \text{WP}, \quad F \subseteq \text{WN}, \quad F \subseteq 0\text{-S}, \quad F \subseteq 1\text{-S}, \quad (5)$$

то задача $\text{sat}([F]_{NC})$ полиномиальна. Если не выполняется ни одно из включений (5), то задача $\text{sat}([F]_{NC})$ является NP -полной. Заметим, что в [3] этот результат приведен с искажениями.

Таким образом, сравнивая результаты настоящей работы и [4], можно констатировать, что только в случае $F \subseteq A$ задачи $\text{sat}([F]_{\text{NC}})$ и $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ полиномиальны; если $F \not\subseteq A$, но выполняется хотя бы одно другое включение из (5), задача $\text{sat}([F]_{\text{NC}})$ полиномиальна, а задача $\text{epu}[F]_{\text{NC}} \#P$ -полна. Если не выполняется ни одно из включений (5), то задача $\text{sat}[F]_{\text{NC}} \text{ NP}$ -полна, а задача $\text{epu}[F]_{\text{NC}} \#P$ -полна.

Обозначим $F \oplus 1 = \{f_j \oplus 1 \mid f_j \in F\}$. Системы класса $F \oplus 1$ можно рассматривать как системы класса $[F]_{\text{NC}}$ с тем лишь отличием, что в правой части систем встречаются как единицы, так и нули (системы с произвольной правой частью). Легко показать, что если $\{F, F \oplus 1\} \subseteq A$, то все функции класса F являются аффинными. Следовательно, в случае справедливости гипотезы $P' \neq \#P$, задачи вида $\text{epu}([F, F \oplus 1]_{\text{NC}})$ имеют полиномиальную сложность тогда и только тогда, когда $[F, F \oplus 1]_{\text{NC}}$ является подклассом класса систем линейных уравнений.

2. Теорема разделимости

Для дальнейшего изложения введем несколько обозначений. Если $f(x_1, \dots, x_k)$ — функция, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_k$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in B_k$ — двоичные векторы, то полагаем

$$\alpha \oplus \beta = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \dots, \alpha_k \oplus \beta_k), \quad f(\alpha) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \\ 0_k = (0, \dots, 0) \in B_k, \quad 1_k = (1, \dots, 1) \in B_k.$$

Символом $\langle f \rangle_{\text{C}}$ обозначим набор булевых функций

$$\{f(y_{p_1}, \dots, y_{p_k}) \mid y_{p_i} \in \{0, 1, x_1, \dots, x_k\}, i = 1, \dots, k\}$$

(символ y_{p_i} обозначает константу 0 или 1 или одну из переменных $x_1, \dots, x_k$);

$$\langle f \rangle_0 = \{f(z_{p_1}, \dots, z_{p_k}) \mid z_{p_i} \in \{0, x_1, \dots, x_k\}, i = 1, \dots, k\}.$$

Классы систем уравнений $[\langle f \rangle_{\text{C}}]_{\text{NC}}$, $[\langle f \rangle_0]_{\text{NC}}$ обозначим соответственно $[f]_{\text{C}}$, $[f]_0$.

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_k$, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$, то α назовем выполняющим вектором функции f . Множество всех выполняющих векторов функции f обозначим E_f .

Теорема. Если все функции набора F являются мультиаффинными и в случае $|F| = \infty$ функции набора F записаны или соответствующими приведенными представлениями, или многочленами Жегалкина, или дизъюнктивными нормальными формами, то задача $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ полиномиальна. Если в наборе F найдется не мультиаффинная функция, то задача $\text{epu}([F]_{\text{NC}}) \#P$ -полна.

Доказательство. Если набор функций $F \subseteq A$ конечен (при этом функции из F первоначально могут быть записаны в любом виде), то со сложностью не более некоторой константы, зависящей от набора F , все функции из F могут быть записаны приведенными представлениями.

Пусть $F \subseteq A$ и все функции набора F записаны приведенными представлениями. Тогда любая система класса $[F]_{\text{NC}}$ с полиномиальной сложностью сводится к соответствующей системе линейных уравнений вида (1), у которой множество

решений совпадает с множеством решений исходной системы уравнений. Поскольку задача определения числа решений систем линейных уравнений является полиномиальной, то задача $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ также полиномиальна.

Для доказательства существования полиномиального алгоритма решения задачи $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$, при условии, что $F \subseteq A$ и функции набора F записаны или многочленами Жегалкина, или дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ), достаточно показать, что существует полиномиальный алгоритм нахождения по многочлену Жегалкина или ДНФ приведенного представления функции. В этом случае полиномиальный алгоритм определения числа решений систем класса $[F]_{\text{NC}}$ состоит из двух этапов:

- (1) все функции левой части каждой решаемой системы (3) из класса $[F]_{\text{NC}}$ заменяем приведенным представлением функций,
- (2) находим число решений полученной системы.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_k) \in A$ представлена многочленом Жегалкина. Без ограничения общности можем считать, что $k \geq 1$. В случае $f \equiv 0$, приведенное представление функции имеет вид $f \equiv x_1 \bar{x}_1$. Далее считаем $f \neq 0$. Очевидно, что, если аффинная функция $\alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k x_k \oplus \alpha_0$ является сомножителем в некотором приведенном представлении функции f , то

$$(\alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k x_k \oplus \alpha_0) f \equiv f. \quad (6)$$

Используя соотношение (6), составим систему линейных уравнений (обозначим ее L_f) относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_0, \dots, \alpha_k$. Нетрудно видеть, что конъюнкция всех аффинных функций, соответствующих линейно независимым решениям линейной системы L_f , является приведенным представлением функции f .

Предположим теперь, что функция $f \neq 0$ представлена дизъюнктивной нормальной формой, E_f — множество выполняющих векторов функции f . Заметим, что поскольку f — мультиаффинная функция, то E_f есть множество решений некоторой системы линейных уравнений.

Так как f записана в виде ДНФ, с полиномиальной сложностью находим некоторый вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in E_f$. Множество $E_f \oplus \beta = \{\alpha \oplus \beta \mid \alpha \in E_f\}$ является множеством выполняющих векторов функции $f'(y_1, \dots, y_k)$, получаемой из f заменой переменных

$$x_i = y_i^{(\beta_i \oplus 1)}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Кроме того, множество $E_f \oplus \beta$ есть некоторое линейное пространство векторов.

В функции f проведем замену переменных (7). Пусть ДНФ функции f' принадлежит импликанта $y_1^{\delta_1} \dots y_t^{\delta_t}$. Выпишем вектора длины k : $(\delta_1, \dots, \delta_t)$, если $t = k$; $(\delta_1, \dots, \delta_t, 1, 0, \dots, 0), \dots, (\delta_1, \dots, \delta_t, 0, \dots, 0, 1), (\delta_1, \dots, \delta_t, 0, \dots, 0)$, если $t < k$ (здесь число элементов, дополняющих вектор до размера t равно $k - t$). Прделаем эту процедуру для всех импликант ДНФ функции f' . Полученное множество векторов обозначим $T_{f'}$. Ясно, что $T_{f'} \subseteq E_f \oplus \beta$.

Базис пространства $E_f \oplus \beta$ может быть составлен из векторов множества $T_{f'}$. Выберем этот базис и обозначим его $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(q)}$.

Далее подберем такую невырожденную замену переменных

$$y_i = l_i(z_1, \dots, z_k), \quad i = 1, \dots, k, \quad (8)$$

при которой множество выполняющих векторов функции $f''(z_1, \dots, z_k) = f'(l_1(z_1, \dots, z_k), \dots, l_k(z_1, \dots, z_k))$ имело бы базис $e^{(1)}, \dots, e^{(q)}$, где в $e^{(i)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in B_k$ единица стоит на i -м месте, $i = 1, \dots, q$. При этом $f''(z_1, \dots, z_k) = \bar{z}_{q+1} \dots \bar{z}_k$. Проведя замены, обратные к (8) и (7), получим приведенное представление функции f .

Легко показывается, что указанные алгоритмы имеют полиномиальную сложность.

Предположим теперь, что $F \not\subseteq A$. Через $f(x_1, \dots, x_k)$ обозначим некоторую не мультиаффинную функцию набора F . Покажем, что задача $\text{enu}([f]_{\text{NC}})$ является $\#P$ -полной, откуда будет следовать $\#P$ -полнота задачи $\text{enu}([F]_{\text{NC}})$. Доказательство второй части теоремы разобьем на несколько лемм.

Как было отмечено выше, в [9] доказана $\#P$ -полнота задачи $\text{enu}([x_1 \vee x_2]_{\text{NC}})$ (см. (2)), откуда очевидно следует $\#P$ -полнота задачи $\text{enu}([\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}})$.

Лемма 1. Задача $\text{enu}([x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}})$ $\#P$ -полна.

Доказательство. Покажем, что

$$\text{enu}([x_1 \vee x_2]_{\text{NC}}) \propto_T \text{enu}([x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}).$$

Сначала заметим, что существует полиномиальный алгоритм, который для всякой системы S , зависящей от n неизвестных, может таким образом перенумеровать неизвестные, чтобы система S зависела от неизвестных $x_1, \dots, x_n$.

Рассмотрим некоторую систему (2) из класса $[x_1 \vee x_2]_{\text{NC}}$, неизвестными которой являются $x_1, \dots, x_n$. Системе (2) сопоставим систему из класса $[x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}$

$$\begin{aligned} x_{i(n+1)+j} \vee \bar{x}_{s_{i1}} &= 1, & i &= 1, \dots, m, \\ x_{i(n+1)+j} \vee \bar{x}_{s_{i2}} &= 1, & j &= 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Для всякого $h \in \{0, \dots, m\}$ через q_h обозначим число двоичных векторов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ длины n , каждый из которых, при подстановке в систему (2) значений $x_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, не удовлетворяет ровно h уравнениям системы (2). Заметим, что при этом символом q_0 обозначено число решений системы (2).

Число решений t системы (9) следующим образом выражается через величины q_h , $h = 0, \dots, m$:

$$t = \sum_{h=0}^m q_h 2^{h(n+1)}.$$

Следовательно, q_0 есть остаток от деления числа t на 2^{n+1} . Дальнейшее доказательство сводимости по Тьюрингу $\text{enu}([x_1 \vee x_2]_{\text{NC}}) \propto_T \text{enu}([x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}})$ очевидно. Таким образом, задача $\text{enu}([x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}})$ $\#P$ -полна. Лемма доказана.

Замечание. Функция $x_1 \vee \bar{x}_2$ является биконктивной, слабо положительной и слабо отрицательной, в то время как функция $x_1 \vee x_2$ является биконктивной и слабо положительной, но не слабо отрицательной.

Лемма 2. Если $f(x_1, \dots, x_k) \notin A$, $f(0, \dots, 0) = 1$, то задача $\text{enu}([f]_0) \# P$ -полна.

Доказательство. Поскольку функция f не мультиаффинная, то по критерию мультиаффинности [4] найдутся три вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, такие, что

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 1, \quad f(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) = 0. \quad (10)$$

Покажем, что в случае $f(0_k) = 1$ можно выбрать три вектора, среди которых один нулевой, удовлетворяющие соотношениям (10). Если $f(\alpha \oplus \beta) = 0$, то для векторов 0_k , α , β выполняется (10). В случае $f(\alpha \oplus \beta) = 1$ соотношения (10) справедливы для векторов 0_k , $\alpha \oplus \beta$, γ . Далее будем полагать, что три вектора, для которых выполняется (10), есть 0_k , β , γ .

В наборе $\langle f \rangle_0$ найдется такая функция $f'(x_1, \dots, x_k) = f(x_{p_1}, \dots, x_{p_k})$, отличающаяся от f только перестановкой переменных, что

$$\begin{aligned} (\beta_{p_1}, \dots, \beta_{p_k}) &= (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1), \\ (\gamma_{p_1}, \dots, \gamma_{p_k}) &= (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \end{aligned}$$

где r_1, r_2, r_3, r_4 — длины последовательных частей вектора, состоящих сплошь из нулей и единиц, $r_1 + \dots + r_4 = k$. Выберем из набора $\langle f \rangle_0$ функцию

$$g(x_1, x_2, x_3) = f'(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, x_3, \dots, x_3),$$

в которой аргументы начинаются r_1 нулей и продолжаются r_2, r_3 и r_4 переменными x_1, x_2 и x_3 соответственно. Очевидно, что $g(0, 0, 0) = g(0, 1, 1) = g(1, 0, 1) = 1$, $g(1, 1, 0) = 0$. Возможные варианты функции $g(x_1, x_2, x_3)$ приведены в таблице:

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g_2(x_1, x_2, x_1) &= x_1 \vee \bar{x}_2, & g_3(x_1, 0, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, \\ g_4(x_1, 0, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, & g_5(0, x_1, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, \\ g_6(0, x_1, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, & g_7(0, x_1, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, \\ g_8(0, x_1, x_2) &= x_1 \vee \bar{x}_2, & g_9(0, x_1, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, \\ g_{10}(0, x_1, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, & g_{11}(0, x_1, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, \\ g_{12}(0, x_1, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, & g_{13}(x_1, 0, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, \\ g_{14}(x_1, 0, x_2) &= \bar{x}_1 \vee x_2, & g_{15}(x_1, x_2, 0) &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \end{aligned}$$

$$g_{16}(x_1, x_2, 0) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Следовательно, для задач $\text{епу}([g_i]_0)$, $i = 2, \dots, 16$, имеет место хотя бы одна из сводимостей $\text{епу}([x_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}) \propto_{\text{T}} \text{епу}([g_i]_0)$ или $\text{епу}([\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}) \propto_{\text{T}} \text{епу}([g_i]_0)$. Используя лемму 1 и $\#P$ -полноту задачи $\text{епу}([\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}})$, находим, что задачи $\text{епу}([g_i]_0)$, $i = 2, \dots, 16$, $\#P$ -полны.

Рассмотрим функцию g_1 . Покажем, что

$$\text{епу}([\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}) \propto_{\text{T}} \text{епу}([g_1]_0).$$

Пусть система уравнений

$$\bar{x}_{s_{i1}} \vee \bar{x}_{s_{i2}} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

есть некоторая система из класса $[\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}$, зависящая от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Системе (11) сопоставим систему из класса $[g_1]_0$

$$g_1(x_{s_{i1}}, x_{s_{i2}}, x_{n+i}) = 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Заметим, что если вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — решение системы (11), то системе (12) удовлетворяет вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{s_{i1}} \vee \alpha_{s_{i2}}, \dots, \alpha_{s_{m1}} \vee \alpha_{s_{m2}})$. С другой стороны, для всякого решения системы (12) $(\beta_1, \dots, \beta_{n+m}) \in B_{n+m}$ выполняются соотношения

$$\bar{\beta}_{s_{i1}} \vee \bar{\beta}_{s_{i2}} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad \beta_{n+i} = \beta_{s_{i1}} \vee \beta_{s_{i2}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

На основе этих выкладок легко доказать, что число решений системы (11) равно числу решений системы (12). Поэтому $\text{епу}([\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]_{\text{NC}}) \propto_{\text{T}} \text{епу}([g_1]_0)$ и задача $\text{епу}([g_1]_0)$ $\#P$ -полна. Следовательно, при любых вариантах функции g задача $\text{епу}([f]_0)$ $\#P$ -полна. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $f(x_1, \dots, x_k) \notin A$, то задача $\text{епу}([f]_{\text{C}})$ $\#P$ -полна.

Доказательство. Поскольку f — не мультиаффинная функция, то найдутся три вектора α, β, γ такие, что $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 1$, $f(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что векторы α, β, γ имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha &= (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1), \\ \beta &= (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1), \\ \gamma &= (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \end{aligned}$$

где длины восьми частей каждого из векторов совпадают с длинами частей вектора γ , состоящими сплошь из нулей и единиц, и равны соответственно $r_1, \dots, r_8$, $r_1 + \dots + r_8 = k$.

Рассмотрим функцию из набора $\langle f \rangle_{\text{C}}$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = f(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_1, \dots, x_6, \dots, x_6, 1, \dots, 1),$$

где аргументы разбиты на восемь частей длин $r_1, \dots, r_8$, состоящих сплошь из нулей, $x_1, \dots, x_6$ и единиц, соответственно. Очевидно,

$$h(0, 0, 0, 1, 1, 1) = h(0, 1, 1, 0, 0, 1) = h(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 1, \quad h(1, 1, 0, 1, 0, 0) = 0, \quad h \notin A.$$

Предположим, что набор $\langle f \rangle_C$ содержит функцию $f'(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$. Определим функцию вида

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1).$$

Поскольку

$$h_1(0, 0, 0) = h_1(0, 1, 1) = h_1(1, 0, 1) = 1, \quad h_1(1, 1, 0) = 0,$$

то $h_1 \notin A$ и по лемме 2 задача $\text{enu}([h_1]_0) \#P$ -полна.

Покажем, что $\text{enu}([h_1]_0) \propto_T \text{enu}([f]_C)$. Пусть система уравнений

$$h_1(z_{s_{i1}}, z_{s_{i2}}, z_{s_{i3}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $s_{ij} \in \mathbb{N}$, $z_{s_{ij}} \in \{0, x_{s_{ij}}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2, 3$, есть некоторая система из класса $[h_1]_0$, зависящая от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Этой системе сопоставим систему уравнений из класса $[f]_C$

$$\begin{aligned} h(z_{s_{i1}}, z_{s_{i2}}, z_{s_{i3}}, y_{s_{i2}}, y_{s_{i1}}) &= 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{s_{ij}} \oplus x_{s_{ij}+n} &= 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j \in J_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_{s_{ij}} &= \begin{cases} 1, & \text{если } z_{s_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{s_{ij}+n}, & \text{если } z_{s_{ij}} = x_{s_{ij}}, \quad j = 1, 2, 3, \end{cases} \\ J_i &= \{j \mid z_{s_{ij}} = x_{s_{ij}}, \quad j = 1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что указанные системы уравнений имеют одинаковое число решений. Следовательно, если $\langle f \rangle_C \ni (x_1 \oplus x_2)$, то $\text{enu}([h_1]_0) \propto_T \text{enu}([f]_C)$, и задача $\text{enu}([f]_C) \#P$ -полна.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Если $h(0, \dots, 0) = 1$, то по лемме 2 задача $\text{enu}([h]_0) \#P$ -полна, откуда вытекает $\#P$ -полнота задачи $\text{enu}([f]_C)$. В дальнейшем считаем $h(0, \dots, 0) = 0$. Рассмотрим возможные варианты функции h .

Если $h(0, 0, 0, 0, 0, 1) = 0$, то для функции $h_2(x_1, x_2) = h(0, x_1, x_1, x_2, x_2, 1)$ либо $h_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, либо $h_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. По доказанному ранее, в любом из этих случаев задача $\text{enu}([f]_C) \#P$ -полна. Далее считаем $h(0, 0, 0, 0, 0, 1) = 1$.

Если $h(0, 0, 0, 0, 1, 0) = 0$, то для функции $h_3(x_1, x_2) = h(x_1, 0, x_1, x_2, 1, x_2)$ либо $h_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, либо $h_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. В любом из случаев задача $\text{enu}([f]_C) \#P$ -полна. Далее считаем $h(0, 0, 0, 0, 1, 0) = 1$.

Функция $h_4(x_1, x_2) = h(0, 0, 0, 0, x_1, x_2)$ принимает одно из двух значений $h_4(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ или $h_4(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. При этом задача $\text{enu}([f]_C) \#P$ -полна.

Таким образом, при любых вариантах функции h задача $\text{enu}([f]_C) \#P$ -полна. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению сложности задач определения числа решений систем класса $[f]_{NC}$. Обозначим

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3, \\ u_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Лемма 4. Задачи $\text{epu}([u_1]_{\text{NC}})$ и $\text{epu}([u_2]_{\text{NC}})$ $\#P$ -полны.

Доказательство. Для наглядности в таблице приведены векторы, на которых соответственно функции u_1 и u_2 принимают значение 1:

x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Поскольку $u_1 \notin A$, $u_2 \notin A$, по лемме 3 задачи $\text{epu}([u_1]_C)$ и $\text{epu}([u_2]_C)$ $\#P$ -полны, и для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\text{epu}([u_1]_C) \propto_T \text{epu}([u_1]_{\text{NC}}), \quad \text{epu}([u_2]_C) \propto_T \text{epu}([u_2]_{\text{NC}}).$$

Пусть система уравнений

$$u_1(y_{s_{i1}}, y_{s_{i2}}, y_{s_{i3}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

где $s_{ij} \in \mathbb{N}$, $y_{s_{ij}} \in \{0, 1, x_{s_{ij}}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2, 3$, есть некоторая система из класса $[u_1]_C$, зависящая от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Системе (13) сопоставим систему из класса $[u_1]_{\text{NC}}$

$$\begin{aligned} u_1(x'_{s_{i1}}, x'_{s_{i2}}, x'_{s_{i3}}) &= 1, & i &= 1, \dots, m, \\ u_1(x_j, x_1, x_2) &= 1, & j &= 3, \dots, n+2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$x'_{s_{ij}} = \begin{cases} x_1, & \text{если } y_{s_{ij}} = 0, \\ x_2, & \text{если } y_{s_{ij}} = 1, \\ x_{s_{ij}+2}, & \text{если } y_{s_{ij}} = x_{s_{ij}}, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Через q_1 , t_1 обозначим соответственно число решений систем (13), (14).

Легко видеть, что если вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — решение системы (13), то векторы $(0, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(1, 0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ являются решениями системы (14). Кроме того, векторы 0_{n+2} и 1_{n+2} есть решения системы (14). Поэтому

$$t_1 \geq 2q_1 + 2. \quad (15)$$

Система (14) обладает тем свойством, что, если в ее решении $(\beta_1, \dots, \beta_{n+2})$ первые две координаты равны между собой, то $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n+2}$. Через t обозначим множество решений системы (14), первые две координаты которых равны, соответственно, 0 и 1. Просто убедиться в том, что

$$q_1 \geq t'_1 = (t_1 - 2)/2. \quad (16)$$

Объединяя соотношения (15) и (16), находим, что $q_1 = (t_1 - 2)/2$. Следовательно, $\text{epu}([u_1]_C) \propto_T \text{epu}([u_1]_{\text{NC}})$, и задача $\text{epu}([u_1]_{\text{NC}})$ $\#P$ -полна.

Пусть система

$$u_2(y_{s_{i1}}, y_{s_{i2}}, y_{s_{i3}}, y_{s_{i4}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

где $s_{ij} \in \mathbb{N}$, $y_{s_{ij}} \in \{0, 1, x_{s_{ij}}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, есть некоторая система из класса $[u_2]_C$, зависящая от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Системе (17) сопоставим систему из класса $[u_2]_{NC}$

$$\begin{aligned} u_2(x''_{s_{i1}}, x''_{s_{i2}}, x''_{s_{i3}}, x''_{s_{i4}}) &= 1, & i &= 1, \dots, m, \\ u_2(x_1, x_{2j-1}, x_{2j}, x_2) &= 1, & j &= 2, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$x''_{s_{ij}} = \begin{cases} x_1, & \text{если } y_{s_{ij}} = 0, \\ x_2, & \text{если } y_{s_{ij}} = 1, \\ x_{2s_{ij}-1}, & \text{если } y_{s_{ij}} = x_{s_{ij}}, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 2, \dots, n+1. \end{matrix}$$

Число решений систем (17), (18) обозначим соответственно q_2 , t_2 . Заметим, что если вектор $(\beta_1, \dots, \beta_{2n+2})$ есть решение системы (18) и $\beta_1 = \beta_2$, то $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_{2n+2}$, а в случае $\beta_1 \neq \beta_2$ выполняются неравенства $\beta_{2j-1} \neq \beta_{2j}$, $j = 2, \dots, n+1$. Кроме того, системы (17) и (18) обладают следующими свойствами: если вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — решение системы (17), то векторы $(0, 1, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}_n)$ и $(1, 0, \bar{\alpha}_1, \alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_n, \alpha_n)$ являются решениями системы (18); если вектор $(0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n})$ есть решение системы (18), то вектор $(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \dots, \gamma_{2n-1})$ есть решение системы (17).

Используя эти свойства и то обстоятельство, что решениями системы (18) является векторы 0_{2n+2} , 1_{2n+2} , находим, что $q_2 = (t_2 - 2)/2$.

Следовательно, $\text{epu}([u_2]_C) \propto_T \text{epu}([u_2]_{NC})$, и задача $\text{epu}([u_2]_{NC}) \#P$ -полна.

Лемма 5. Если $f(x_1, \dots, x_k) \notin A$, то задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна.

Доказательство. Рассмотрим возможные варианты значений функции f на векторах 0_k и 1_k .

Пусть $f(0_k) = f(1_k) = 0$. Предположим, что найдется вектор $\alpha \in B_k$, для которого $f(\alpha) = 1$, $f(\alpha \oplus 1_k) = 0$. Без ограничения общности можем считать

$$\alpha = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \quad (19)$$

где число нулей $r \in \{1, \dots, k-1\}$.

Рассмотрим некоторую систему уравнений из класса $[f]_C$

$$f(y_{s_{i1}}, \dots, y_{s_{ik}}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (20)$$

где $s_{ij} \in \mathbb{N}$, $y_{s_{ij}} \in \{0, 1, x_{s_{ij}}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, зависящую от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Системе (20) сопоставим систему из класса $[f]_{NC}$

$$\begin{aligned} f(x'_{s_{i1}}, \dots, x'_{s_{ik}}) &= 1, & i &= 1, \dots, m, \\ f(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2) &= 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где число переменных x_1 в последнем уравнении равно r ,

$$x'_{s_{ij}} = \begin{cases} x_1, & \text{если } y_{s_{ij}} = 0, \\ x_2, & \text{если } y_{s_{ij}} = 1, \\ x_{2s_{ij}-1}, & \text{если } y_{s_{ij}} = x_{s_{ij}}, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, k. \end{matrix}$$

Поскольку из уравнения $f(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2) = 1$ следует, что $x_1 = 0, x_2 = 1$, то число решений систем (20) и (21) совпадает. Следовательно, справедлива сводимость $\text{epu}([f]_C) \propto_T \text{epu}([f]_{NC})$ и, используя лемму 3, находим, что задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна.

Предположим теперь, что $f(\beta) = f(\beta \oplus 1_k)$ для любого вектора $\beta \in B_k$. Так как $f \notin A$, то $f \neq 0$ и найдется вектор α , для которого $f(\alpha) = 1$. Без ограничения общности считаем, что вектор α имеет вид (19). Системе (20) сопоставим систему (21). Легко видеть, что число решений системы (21) равно удвоенному числу решений системы (20). Поэтому $\text{epu}([f]_C) \propto_T \text{epu}([f]_{NC})$, и задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна.

Пусть $f(0_k) = 1, f(1_k) = 0$. В этом случае из уравнения $f(x_1, \dots, x_1) = 1$ следует $x_1 = 0$. Неизвестное x_1 можно использовать в качестве константы 0. Поэтому $\text{epu}([f]_0) \propto_T \text{epu}([f]_{NC})$ и по лемме 2 задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна.

Пусть $f(0_k) = 0, f(1_k) = 1$. Рассмотрим функцию $f'(x_1, \dots, x_k) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$. Так как $f' \notin A, f'(0) = 1, f'(1) = 0$, согласно доказательству данной леммы в предыдущем случае, задача $\text{epu}([f']_{NC}) \#P$ -полна. Очевидно, что справедлива сводимость $\text{epu}([f']_{NC}) \propto_T \text{epu}([f]_{NC})$, следовательно, $\#P$ -полна и задача $\text{epu}([f]_{NC})$.

Пусть $f(0_k) = f(1_k) = 1$. Пусть существует вектор $\alpha \in B_k$ такой, что $f(\alpha) = 1, f(\alpha \oplus 1_k) = 0$. Можем считать, что вектор α имеет вид (19). Тогда $f(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$, и задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна.

Предположим теперь, что $f(\alpha) = f(\alpha \oplus 1_k)$ для любого вектора $\alpha \in B_k$. Поскольку $f \notin A, f(0) = 1$, то найдутся векторы $\beta, \gamma \in B_k$ такие, что $f(\beta) = f(\gamma) = 1, f(\beta \oplus \gamma) = 0$. Без ограничения общности считаем, что

$$\begin{aligned} \beta &= (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1), \\ \gamma &= (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \end{aligned}$$

где оба вектора разбиты на четыре части длин $r_1, \dots, r_4$, сплошь состоящие из нулей и единиц. Рассмотрим функцию

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, x_3, \dots, x_3, x_4, \dots, x_4),$$

где аргументы f состоят из $r_1, \dots, r_4$ переменных $x_1, \dots, x_4$ соответственно. Для функции u

$$\begin{aligned} u(0, 0, 0, 0) &= u(0, 0, 1, 1) = u(0, 1, 0, 1) = 1, & u(0, 1, 1, 0) &= 0, \\ u(\lambda) &= u(\lambda \oplus 1_4), & \lambda &\in B_4. \end{aligned}$$

Если $u(0, 0, 0, 1) \neq u(0, 0, 1, 0)$, то либо $u(x_2, x_2, x_1, x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3)$ (определение функции u_1 дано перед леммой 4), либо $u(x_3, x_3, x_2, x_1) = u_1(x_1, x_2, x_3)$. В этих случаях по лемме 4 задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна. Аналогично показывается, что при $u(0, 1, 0, 0) \neq u(0, 0, 0, 1)$ или $u(1, 0, 0, 0) \neq u(0, 0, 1, 0)$ задача $\text{epu}([f]_{NC}) \#P$ -полна. Далее полагаем, что $u(0, 0, 0, 1) = u(0, 0, 1, 0) = u(0, 1, 0, 0) = u(1, 0, 0, 0)$.

При этом возможны два варианта для u , либо $u(0, 0, 0, 1) = 0$, либо $u(0, 0, 0, 1) = 1$. В первом случае $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (определение функции u_2 дано перед леммой 4) и по лемме 4 задача $\text{epu}([f]_{\text{NC}}) \notin \text{P}$ -полна. Если $u(0, 0, 0, 1) = 1$, то $u(x_2, x_1, x_1, x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3)$, и по лемме 4 задача $\text{epu}([f]_{\text{NC}}) \notin \text{P}$ -полна.

Таким образом, для любой не мультиаффинной функции f задача $\text{epu}([f]_{\text{NC}}) \notin \text{P}$ -полна. Лемма и теорема разделимости для задач вида $\text{epu}([F]_{\text{NC}})$ доказаны.

Список литературы

1. Rudeanu S. *Boolean Functions and Equations*. Elsevier, Amsterdam, 1974.
2. Закревский А. Д. *Логический синтез каскадных схем*. Наука, Москва, 1981.
3. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
4. Schaefer T. The complexity of satisfiability problems. In: *Proc. 10th Annual ACM Symp. Theory of Computing*. San Diego, California, May 1–3, 1978.
5. Горшков С. П. О сложности нахождения числа выполняющих наборов значений переменных в задаче “обобщенная выполнимость”. В кн.: *Тезисы докладов Девятой Всесоюзной конференции по математической логике*. Наука, Ленинград, 1988.
6. Стокмейер Л. Классификация вычислительной сложности проблем. *Киберн. сб.* (1989) **26**, 20–83.
7. Valiant L. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Sci.* (1978) **8**, 189–201.
8. Simod J. On the difference between one and many. *Lect. Notes in Computer Sci.* (1977) **52**, 480–491.
9. Valiant L. The complexity of enumeration and reliability problems. *SIAM J. Comput.* (1979) **8**, 410–421.
10. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.

Статья поступила 09.09.93.