Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Малышев, Е. В. Кутырева, О распределении числа единиц в булевом треугольнике Паскаля, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 123–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:11:17

УДК

О распределении числа единиц в булевом треугольнике Паскаля

© 2006 г. Ф. М. Малышев, Е. В. Кутырева

Работа посвящена оценке числа булевых треугольников Паскаля достаточно большого размера s с заданным числом единиц $\xi \leq ks$, $k > 0$. Показано, что в любом подобном треугольнике Паскаля имеется нулевой треугольник, размер которого отличается от s не более чем на константу, зависящую только от k . Доказано, что имеется монотонная неограниченная последовательность рациональных чисел $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ такая, что распределение числа треугольников сосредоточено в некоторых окрестностях точек $k_i s$. При этом вид распределения в каждой такой окрестности зависит не от s , а только от вычета s по некоторому модулю, своему для каждого $i \geq 0$.

Рассматриваемые в работе обобщения треугольника Паскаля возникают, в частности, при исследовании клеточных автоматов. По этой тематике имеется обширная литература (см. [5–13]). Клеточный автомат использовался в качестве простой модели для изучения различных биологических процессов. Много работ посвящено изучению различных свойств симметрии треугольников Паскаля по некоторому модулю, генерируемых специальным классом клеточных автоматов (например, [2]). В [3] также изучаются некоторые свойства треугольников Паскаля, в частности, приведен способ нахождения числа специальных элементов некоторых строк треугольника Паскаля. С помощью клеточных автоматов можно строить схемы разделения секретов (см., например, [4]). Результаты данной работы касаются также двух следующих вопросов: какие статистические качества характеризуют поведение клеточного автомата и как шум и другие помехи воздействуют на клеточные автоматы?

Рассмотрим булев аналог треугольника Паскаля T_s , состоящий из s строк элементов $GF(2)$. В этом треугольнике элементы i -й строки $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_i^{(i)}$, $i = 1, \dots, s-1$, получаются из элементов $(i+1)$ -й строки $x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{i+1}^{(i+1)}$ по следующему правилу:

$$x_j^{(i)} = x_j^{(i+1)} \oplus x_{j+1}^{(i+1)}, \quad j = 1, \dots, i.$$

Последняя s -я строка $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_s^{(s)}$ может быть произвольной. Число единичных элементов в треугольнике T_s обозначим через ξ . Всего в треугольнике T_s имеется $s(s+1)/2$ элементов. Настоящая работа посвящена оценке числа треугольников T_s (или, иначе, оценке числа s -х строк треугольников T_s) с заданным значением числа единиц $\xi \leq ks$ при достаточно больших s и фиксированных $k > 0$.

Через s_0 обозначим размер максимального треугольника T_{s_0} , состоящего целиком из нулевых элементов и содержащегося в треугольнике T_s . Предполагается, что каждая

Рис. 1.

строка T_{s_0} состоит из подряд идущих элементов одной из строк T_s . В общем случае нулевых треугольников T_{s_0} в треугольнике T_s с максимально возможным значением s_0 может быть несколько. Естественно, что величина s_0 , как и конкретное расположение одного из треугольников T_{s_0} в треугольнике T_s зависят от конкретной s -й строки.

Нетрудно убедиться, что верно следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого целого $R > 0$ при достаточно больших $s > S$ в случае $s - s_0 \leq R$ справедливо неравенство $\xi \leq ks$, где $k = k(R)$ и $S = S(R)$ — зависящие от R константы.

Справедливо и обратное к этому предложению утверждение.

Теорема 1. Для любого $k > 0$ при достаточно больших $s > S$ в случае $\xi \leq ks$ справедливо неравенство $s - s_0 \leq R$, где $R = R(k)$ и $S = S(k)$ — зависящие от k константы.

Доказательство. В приводимых ниже рассуждениях нам будет удобно элементы треугольника Паскаля приписывать вершинам одной из стандартных решеток евклидовой плоскости с углом в 60° между ее образующими e_1, e_2 одинаковой длины 1. Вершины с отметками находятся внутри и на границе правильного треугольника со стороной $s - 1$. Сумма элементов булева треугольника Паскаля, приписанных к вершинам $v, v + e_1, v + e_2$, всегда нулевая. Вершины данной решетки являются пересечениями трех семейств параллельных прямых с образующими e_1, e_2 и $e_2 - e_1$, соответственно. Соседние вершины с единичными отметками будем соединять отрезками этих прямых. Совокупность этих отрезков делит треугольник T_s на фигуры трех типов, изображенных на рис. 1.

При этом нулевой треугольник, содержащийся в фигуре I-го типа, лежит строго внутри треугольника T_s , нулевой треугольник, содержащийся в фигуре II-го типа, касается одной из сторон треугольника T_s , а нулевой треугольник из фигуры III-го типа располагается при одной из вершин треугольника T_s . Фигуры типов II и III указаны с точностью до поворота на 120° . Обозначим через t число нулей, лежащих на стороне нулевого треугольника каждой из этих фигур. Для фигур типов II и III $t \geq 1$, а для фигуры типа I $t \geq 0$. При $t = 0$ шестиугольник типа I вырождается в треугольник без нулей с единицами при вершинах.

Пусть $\xi \leq ks$. Вначале докажем, что $s_0 \geq cs$ для достаточно больших значений s , где $c = c(k)$ — зависящая от k положительная константа. Через $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ обозначим длины сторон фигур типа III. Положим $t_i = \alpha_i(s - 1)$. Будем считать, что $0 \leq \alpha_i \leq 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Если, например, $\alpha_1 > 1/2$, то $s_0 \geq \alpha_1(s - 1) > (1/2)(s - 1) > cs$ для любого $c < 1/2$. Исключив из треугольника T_s фигуры типа III с сохранением граничных вершин с единичными отметками, получим шестиугольник, который разбивается на фигуры типов I и II.

Под площадью той или иной фигуры будем понимать площадь выпуклой оболочки ее вершин. За единицу площади возьмем площадь правильного треугольника (T_2) со стороной 1, равную $\sqrt{3}/4$. Среднее число нулей на единицу площади в фигуре типа I равно

$$\frac{t(t+1)}{2(t^2+4t+1)},$$

для фигуры типа II оно больше, именно, оно равно

$$\frac{t(t+1)}{2(t^2+2t)} = \frac{t+1}{2(t+2)}.$$

Обе эти величины растут с ростом t , поэтому число нулей на единицу площади шестиугольника, полученного из T_s исключением фигуры типа III, не превосходит

$$\frac{s_0+1}{2(s_0+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s_0+2} \right).$$

Для числа нулей N_0 в шестиугольнике справедливо неравенство

$$N_0 \leq ((s-1)^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2) \frac{s_0+1}{2(s_0+2)},$$

откуда для числа единиц в треугольнике T_s получаем оценку

$$\begin{aligned} \xi &\geq \frac{s(s+1)}{2} - \frac{t_1(t_1+1)}{2} - \frac{t_2(t_2+1)}{2} - \frac{t_3(t_3+1)}{2} - ((s-1)^2 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2) \frac{s_0+1}{2(s_0+2)} \\ &= \frac{(s-1+1)(s-1+2)}{2} - \frac{(s-1)\alpha_1((s-1)\alpha_1+1)}{2} - \frac{(s-1)\alpha_2((s-1)\alpha_2+1)}{2} \\ &\quad - \frac{(s-1)\alpha_3((s-1)\alpha_3+1)}{2} - (s-1)^2(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s_0+2} \right) \\ &= \frac{(s-1)^2}{2} (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) + \frac{s-1}{2} (3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + 1 \\ &\quad - \frac{(s-1)^2}{2} (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) + \frac{(s-1)^2}{2} (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) \frac{1}{s_0+2} \\ &= \frac{s-1}{2} \left(3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) \frac{s-1}{s_0+2} \right) + 1 \\ &\geq \frac{s-1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \frac{s-1}{s_0+2} \right). \end{aligned}$$

У нас $\xi \leq ks \leq (k+\varepsilon)(s-1)$ при $s \geq k/\varepsilon + 1$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому

$$\frac{s-1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} \frac{s-1}{s_0+2} \right) \leq (k+\varepsilon)(s-1).$$

Из последнего неравенства получаем, что

$$s_0 \geq \frac{s-1}{8(k+\varepsilon-\frac{3}{4})} - 2 \geq \frac{s}{8k}$$

при $s \geq (16k(k+\varepsilon) - 11k)/(3/4 - \varepsilon)$. В качестве требуемого s можно взять, например, $s(k) = \min(1/(8k), 0,49)$.

Рис. 2.

Обозначим далее через r_1, r_2, r_3 числа строк между соответственными параллельными сторонами треугольников T_s (с вершинами A_1, A_2, A_3) и T_{s_0} (с вершинами B_1, B_2, B_3), увеличенные на 1 (см. рис. 2), обозначим также r_1 длину отрезка $[B_2, C_{12}]$, r_2 длину отрезка $[C_{13}, A_3]$, r_3 длину отрезка $[B_1, C_{31}]$. Для задания элементов, располагающихся на сторонах треугольника T_s , достаточно задать, например, значения элементов, находящихся на отрезках $[C_{12}, B_2]$, $(B_3, C_{23}]$, $[C_{31}, B_1]$. Число различных треугольников T_s с заданными значениями r_1, r_2, r_3 составляет, таким образом, $2^{\lfloor (r_1-1)/2 \rfloor + \lfloor (r_2-1)/2 \rfloor + \lfloor (r_3-1)/2 \rfloor}$, (или $2^{(r_1-1)+(r_2-1)+(r_3-1)}$ при $r_i > 0, i = 1, 2, 3$).

Для завершения доказательства теоремы нужно проверить, что величины $r_i, i = 1, 2, 3$, ограничены сверху зависящей от k константой. Это будет следовать из того, что число единиц в трапеции C_{12}, C_{13}, B_3, B_2 (см. рис. 2) по порядку величины не меньше, чем $s_0(\log_2 r_1)/2$, где $s_0 \geq c(k)s$. Докажем это.

Пусть вершины на полуинтервале $(B_2, C_{12}]$ имеют метки $x_0 = 1, x_1, \dots, x_{r_1-1}$ (если бы $x_0 = 0$, то s_0 не было бы размером максимального нулевого треугольника в треугольнике T_s). Строку рассматриваемой трапеции, начинающуюся с элемента x_i , далее будем называть i -й строкой трапеции. Она ненулевая, так как в противном случае строка, первым элементом которой является x_0 , также была бы нулевой (i -я строка трапеции при $r_1 > 0$ находится на $(i + s - r_1 + 1)$ -й строке треугольника T_s). Элементы i -й строки трапеции линейно выражаются через переменные $x_0, x_1, \dots, x_i$, причем переменная x_i на всех местах входит с коэффициентом 1. Период i -й строки трапеции обозначим через $h(i)$.

Периодичность проверяется по индукции. Периодичность i -й строки следует из периодичности $(i-1)$ -й строки, поскольку метки принимают значения из конечного поля $GF(2)$. Нулевая строка состоит сплошь из единиц.

Докажем, что первая строка имеет период 2, две последующие имеют период 2^2 , у 2^2 следующих период 2^3 и так далее, то есть каждые 2^i следующих строк имеют период 2^{i+1} , $i > 0$. Поэтому число единиц в i -й группе строк будет не меньше, чем $\lfloor s_0/2^{i+1} \rfloor 2^i \simeq s_0/2$, $i \geq 0$, а число таких групп строк составляет около $\log_2 r_1$. В результате для близкой к единице константы c_1 получаем, что

$$ks \geq \xi \geq \frac{s_0}{2} c_1 \log_2 r_1 \geq \frac{c_1 c(k)s}{2} \log_2 r_1,$$

откуда и следует ограниченность r_1 . Аналогично, r_2 и r_3 ограничены.

Рис. 3.

Использованное свойство периодичности достаточно проверить (в силу линейности) при $x_1 = \dots = x_{r_1-1} = 0$, когда заполнение трапеции C_{12}, C_{13}, B_3, B_2 совпадает с частью специального булева треугольника Паскаля $T_{2^t+1-1}^P$, обозначаемой как $T_{2^t}^P$ и имеющей по 2^t единиц на каждой стороне (см. рис. 3). Здесь у треугольника Паскаля $T_{2^t+1-1}^P$ в последней строке только одна единица (в середине) и $2^{t+1} - 2$ нулей, по $2^t - 1$ нулей слева и справа. На t -м месте i -й строки трапеции находится элемент вида $x_0\alpha_{0,t}^{(i)} + x_1\alpha_{1,t}^{(i)} + \dots + x_{i-1}\alpha_{i-1,t}^{(i)} + x_i, t \geq 0$. Требуемая периодичность последовательностей коэффициентов $\{\alpha_{0,t}^{(i)}, t \geq 0\}, i \geq 0$, а значит, и последовательностей коэффициентов $\{\alpha_{j,t}^{(i)}, t \geq 0\}, i \geq j > 0$, следует из симметричности треугольников $T_{2^t}^P$, которые строятся в соответствии с рекурсивным равенством, приведенным на рис. 3. На этом рисунке $t \geq 0, T_1^P = 1$.

Теорема доказана.

Используемая в приведенном доказательстве техника позволяет при каждом $k > 0$ вычислять все предельные точки множества $\{\xi/s \mid \xi \leq ks\}$. Величины ξ/s данного множества отвечают тем треугольникам $T_s, s > 0$, для которых $\xi \leq ks$ или (с некоторой погрешностью) $s - s_0 \leq R = R(k)$.

При каждом R число предельных точек конечно. Так, если $R \geq r_1 + r_2 + r_3 = s - s_0$, причем $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0$ фиксированы, и для каждой из трех рассматриваемых выше трапеций заданы также значения $x_0 = 1, x_1, \dots, x_{r-1} \in GF(2), r \in \{r_1, r_2, r_3\}$, то при каждом s треугольник T_s определяется однозначно, а предельной точкой будет $\chi = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi/s$. Этот предел представляется суммой трех пределов по каждой трапеции отдельно: $\chi = \chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3)$.

Из доказательства теоремы можно понять, что предел $\chi(r), r \in \{r_1, r_2, r_3\}$ (зависящий еще и от $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$, хоть это и не отражено в обозначении $\chi(r)$ во избежание излишней громоздкости), равен числу единиц в матрице

$$D = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r-1} & x_{r-2} & x_{r-3} & \dots & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

деленному на число столбцов в ней. Строка трапеции с номером $j = 0, 1, \dots, r - 1$

Таблица 1.

$$\begin{aligned}
\chi(0) &= 0; \\
\chi(1) &= 1; \\
\chi(2) &= 1\frac{1}{2}; \\
\chi(3) &= 2; \\
\chi(4) &= 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}; \\
\chi(5) &= 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{4}; \\
\chi(6) &= 3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}; \chi(7) = 3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{4}, 4, 4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}; \chi(8) = 3\frac{3}{8}, 4\frac{1}{8}, 4\frac{3}{8}, 4\frac{5}{8}, 4\frac{7}{8}, 5\frac{1}{8}; \\
\chi(9) &= 3\frac{7}{8}, 4\frac{5}{8}, 4\frac{7}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{3}{8}, 5\frac{5}{8}; \\
\chi(10) &= 4\frac{1}{8}, 4\frac{3}{8}, 4\frac{5}{8}, 4\frac{7}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{1}{4}, 5\frac{3}{8}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8}, 5\frac{3}{4}, 6, 6\frac{1}{4}; \\
\chi(11) &= 4\frac{3}{8}, 4\frac{5}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{3}{8}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{5}{8}, 5\frac{3}{4}, 5\frac{7}{8}, 6, 6\frac{1}{8}, 6\frac{1}{4}, 6\frac{3}{8}, 6\frac{1}{2}, 6\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}; \\
\chi(12) &= 4\frac{5}{2}, 5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{3}{8}, 5\frac{3}{4}, 5\frac{5}{8}, 6, 6\frac{1}{8}, 6\frac{1}{4}, 6\frac{3}{8}, 6\frac{1}{2}, 6\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}, 6\frac{7}{8}, 7, 7\frac{1}{8}, 7\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

отвечает $(j+1)$ -й строке матрицы D . Здесь в матрице второго сомножителя r строк и 2^i столбцов, $i = [\log_2 r]$, над ее главной диагональю располагается треугольник $T_{2^i}^P$, деформированный так, что три угла по 60° превратились, соответственно, в углы по 45° , 45° и 90° . Период последней $(r-1)$ -й строки трапеции равен в точности 2^i .

Возможные значения $\chi(r)$ следует вычислять последовательно для $r \geq 1$, при этом каждый раз необходимо отслеживать число единиц на периоде $2^{\lceil \log_2 r \rceil}$ только в последней строке матрицы D , отдельно при $x_{r-1} = 0$ и при $x_{r-1} = 1$.

На этом пути с помощью вычислительной техники были получены значения $\chi(r)$ для значений $r \leq 28$. Здесь, с целью экономии места, мы приведем их для $r \leq 12$ в табл. 1.

Основная цель работы, как это было указано в ее начале, состоит в определении числа треугольников T_s с числом единиц в нем $\xi \leq ks$, которое будем обозначать через $M_s(\xi)$. Величина ξ может принимать, вообще говоря, целочисленные значения от нуля до величины порядка $s^2/3$. Последняя величина достигается, например, для $(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_s^{(s)}) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$. Большие значения ξ принимать не может, поскольку вершины треугольника T_s содержатся среди объединения трехточечных подмножеств $\{n(e_1 + e_2) + m_3e_1, e_1 + n(e_1 + e_2) + m_3e_1, e_2 + n(e_1 + e_2) + m_3e_1\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, к вершинам которых может быть приписано не более двух единиц, а число таких подмножеств, пересекающихся с T_s , имеет порядок $s^2/6$, в чем убеждаемся, например, делением площади треугольника T_s на площадь параллелограмма с вершинами $0, e_1 + e_2, 3e_1, 4e_1 + e_2$.

Приведенные после доказательства теоремы рассуждения существенно уточняют область значений ξ при $\xi \leq ks, k \geq 0$.

Следствие 1. *Имеются монотонная неограниченная последовательность рациональных чисел $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ и последовательность неотрицательных чисел $\varepsilon_i, i \geq 0$, такие, что для любого фиксированного $k > 0$ при $\xi \leq ks$ и достаточно больших $s > S(k)$ справедливо равенство $M_s(\xi) = 0$, если $\xi \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$.*

Доказательство. Из приведенных выше рассуждений, следующих за доказательством теоремы, заключаем, что для каждого $k > 0$ и при любом достаточно большом s число треугольников T_s с $\xi \leq ks$ не зависит от s , а зависит только от k . Каждый такой треугольник задается наборами целых неотрицательных чисел $r_1, r_2, r_3, r_1 + r_2 + r_3 = s - s_0 \leq R(k)$, и булевыми значениями $x_{i0} = 1, x_{i1}, \dots, x_{i, r_i - 1}, i = 1, 2, 3$. Последние параметры при $r_i = 0$ отсутствуют. Зафиксировав r_1, r_2, r_3 и $x_{ij}, j = 0, 1, \dots, r_i - 1, i = 1, 2, 3$,

получаем серию однозначно задаваемых треугольников T_s , параметризованных величиной s , для которых $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi/s = \chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3)$. Тем самым, в качестве k_i , $i \geq 0$, выступает сумма любых трех чисел вида $\chi(r)$. Среди этих трех чисел могут быть и одинаковые. Если $i \geq 0$ зафиксировано и $k_i = \chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3)$, то величина $(\chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3))s_0 = (\chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3))(s - r_1 - r_2 - r_3)$ отличается от ξ не более, чем на зависящую от i константу. Отличие обусловлено единицами, не вошедшими в матрицы D и приписанными к вершинам, содержащимся в четырехугольниках $A_1 C_{21} B_1 C_{31}$, $A_3 C_{13} B_3 C_{23}$, $A_2 C_{32} B_2 C_{12}$ (см. рис. 2). Для доказательства следствия остается заметить, что при каждом конкретном k_i число возможностей для r_1, r_2, r_3 и $x_{j0} = 1, x_{j1}, \dots, x_{j,r_j-1}$, $j = 1, 2, 3$, ограничено.

В силу приведенного следствия при $\xi \leq ks$ и достаточно больших s обязательно $\xi \in \bigcup_{i: k_i \leq k} (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$. Введем обозначение

$$N_i = \sum_{\xi \in (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)} M_s(\xi).$$

Начиная с некоторых достаточно больших значений эта величина, как уже отмечалось, не зависит от s .

Ниже приводим первые 45 значений k_i , $i = 0, 1, \dots, 44$, указывая в скобках соответствующие величины N_i : $0(1)$, $1(3)$, $1\frac{1}{2}(6)$, $2(15)$, $2\frac{1}{4}(12)$, $2\frac{1}{2}(12)$, $2\frac{3}{4}(36)$, $3(61)$, $3\frac{1}{4}(72)$, $3\frac{3}{8}(24)$, $3\frac{1}{2}(78)$, $3\frac{3}{4}(120)$, $3\frac{7}{8}(48)$, $4(216)$, $4\frac{1}{8}(96)$, $4\frac{1}{4}(204)$, $4\frac{3}{8}(240)$, $4\frac{1}{2}(368)$, $4\frac{5}{8}(264)$, $4\frac{3}{4}(240)$, $4\frac{7}{8}(744)$, $5(660)$, $5\frac{1}{16}(48)$, $5\frac{1}{8}(600)$, $5\frac{1}{4}(1128)$, $5\frac{3}{8}(1440)$, $5\frac{1}{2}(1560)$, $5\frac{9}{16}(96)$, $5\frac{5}{8}(1344)$, $5\frac{3}{4}(2472)$, $5\frac{13}{16}(96)$, $5\frac{7}{8}(1896)$, $5\frac{15}{16}(48)$, $6(4336)$, $6\frac{1}{16}(192)$, $6\frac{1}{8}(2712)$, $6\frac{3}{16}(192)$, $6\frac{1}{4}(5952)$, $6\frac{5}{16}(144)$, $6\frac{3}{8}(5376)$, $6\frac{7}{16}(192)$, $6\frac{1}{2}(9360)$, $6\frac{9}{16}(1440)$, $6\frac{5}{8}(5064)$, $6\frac{11}{16}(624)$.

Сами слагаемые $M_s(\xi)$, упорядоченные по $\xi \in (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$, в сумме

$$N_i = \sum_{\xi \in (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)} M_s(\xi),$$

вообще говоря, зависят от s , но они одинаковы для тех $s > S(k_i)$, у которых одинаковы вычеты по модулю 2^{ρ_i} , $i > 0$, где

$$\rho_i = \max_{r_1, r_2, r_3 \geq 0: \chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3) = k_i} \max_{j=1,2,3} \lceil \log_2 r_j \rceil.$$

Проверим это. Если

$$s_0 + 1 = s - r_1 - r_2 - r_3 + 1 = \alpha 2^{\rho_i} + \Delta, \quad \Delta \in \{0, 1, \dots, 2^{\rho_i} - 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{N},$$

то

$$\xi = \alpha 2^{\rho_i} k_i + f_{r_1, r_2, r_3; x}(\Delta).$$

Здесь $f_{r_1, r_2, r_3; x}: \{0, 1, \dots, 2^{\rho_i} - 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ — некоторое отображение, зависящее, кроме $i > 0$, как от r_1, r_2, r_3 , так и от значений $(x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{j,r_j-1}) \in GF(2^{r_j})$, $j = 1, 2, 3$, своих для каждой из трех трапеций.

Пусть $r_{1i} \geq 0$, $r_{2i} \geq 0$, $r_{3i} \geq 0$ — один специально выделенный набор, для которого $\chi(r_{1i}) + \chi(r_{2i}) + \chi(r_{3i}) = k_i$, и $s_0 + 1 = s - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i} + 1 = \alpha_1 2^{\rho_i} + \Delta_i$, $\Delta_i \in \{0, 1, \dots, 2^{\rho_i} - 1\}$. Величина Δ_i определяется по вычету $s \pmod{2^{\rho_i}}$.

Вместо $\xi = \xi_s$ рассмотрим центрированную величину

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \zeta_{i,s} = \xi - (s - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i} - \Delta_i + 1)k_i = f_{r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}; x}(\Delta_i) \\ &\in ((r_{1i} + r_{2i} + r_{3i} + \Delta_i - 1)k_i - \varepsilon_i, (r_{1i} + r_{2i} + r_{3i} + \Delta_i - 1)k_i + \varepsilon_i).\end{aligned}$$

Для величины $M_s(\xi)$ введем новое обозначение

$$m_s(\zeta_i) = M_s(\zeta_i + (s - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i} - \Delta_i + 1)k_i) = M_s(\xi).$$

Предложение 2. Если размеры двух треугольников T_{s_1} , T_{s_2} являются достаточно большими, $s_1, s_2 > S(k_i)$, и $\xi_{s_1} \in (k_i s_1 - \varepsilon_i, k_i s_1 + \varepsilon_i)$, $\xi_{s_2} \in (k_i s_2 - \varepsilon_i, k_i s_2 + \varepsilon_i)$, причем $s_1 \equiv s_2 \pmod{2^{\rho_i}}$, то $m_{s_1}(\zeta_i) = m_{s_2}(\zeta_i)$.

Предложение 2 следует из того, что для любых $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, $r_3 \geq 0$ таких, что $\chi(r_1) + \chi(r_2) + \chi(r_3) = k_i$, величина

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \xi - (s - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i} - \Delta_i + 1)k_i = (s - r_1 - r_2 - r_3 - \Delta + 1)k_i \\ &\quad + f_{r_1, r_2, r_3; x}(\Delta) - (s - r_{1i} - r_{2i} - r_{3i} - \Delta_i + 1)k_i \\ &= f_{r_1, r_2, r_3; x}(\Delta) + (r_{1i} + r_{2i} + r_{3i} + \Delta_i)k_i - (r_1 + r_2 + r_3 + \Delta)k_i\end{aligned}$$

не зависит от конкретного достаточно большого s с заданным вычетом по модулю 2^{ρ_i} , который определяет величины Δ и Δ_i .

Предложение 2 устанавливает, что при каждом $i \geq 0$ две целочисленные случайные величины ζ_{i,s_1} и ζ_{i,s_2} , определенные на множестве мощности N_i с равномерным распределением вероятностей, имеют одинаковое распределение, если s_1, s_2 достаточно большие и $s_1 \equiv s_2 \pmod{2^{\rho_i}}$. В этом случае случайные величины $\xi_{s_1} - k_i s_1$ и $\xi_{s_2} - k_i s_2$ тоже одинаково распределены, только не являются целочисленными.

Суммируя вышесказанное, можно заключить, что имеется строго возрастающая неограниченная последовательность рациональных чисел $\{k_i, i \geq 0\}$ такая, что при любом $k > 0$, $k \notin \{k_i, i \geq 0\}$, для достаточно больших s число $N(k)$ булевых треугольников Паскаля T_s с числом единиц в нем $\xi_s < ks$ не зависит от s , а сами значения ξ_s сосредоточены около величин $k_i s$, $k_i < k$, точнее, $\xi_s \in \bigcup_{i \geq 0: k_i < k} (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$, где ε_i , $i \geq 0$, — независимые от s конечные величины. В результате, при каждом $i \geq 0$ с $k_i < k$ число N_i треугольников T_s с $\xi_s \in (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$ тоже не зависит от s , $\sum_{i \geq 0: k_i < k} N_i = N(k)$. Распределение случайной величины ξ_s при условии, что $\xi_s \in (k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$, зависит только от i и от вычета $s \pmod{2^{\rho_i}}$, где ρ_i , $i \geq 0$, — неотрицательные целые числа. Заметим еще, что ξ_s не может превосходить величины порядка $s^2/3$, а число всех треугольников T_s равно 2^s .

Список литературы

1. Малышев Ф. М., Кутырева Е. В., Об одном свойстве булевых аналогов треугольника Паскаля. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2004) **11**, №2, 245–246.
2. Barbe A., Symmetric patterns in the cellular automaton that generates Pascal's triangle modulo 2. *Discrete Appl. Math.* (2000) **105**, 1–38.
3. Crespo C., Ponteville Ch., de Spinadel V. W., Divisibility cellular automata. *Chaos Solitons Fractals* (1995) **6**, 105–112.
4. Marañón G. Á., Encinas L. H., del Rey Á. M., Sharing secret color images using cellular automata with memory. <http://arxiv.org/abs/cs/0312034>, 2003.

5. Wolfram S., *Cellular automata as simple self-organizing systems*. Caltech preprint CALT-68-938, 1982.
6. Wolfram S., *Cellular automata*, *Los Alamos Sci.* (1983) **9**, 2–21.
7. Wolfram S., *Statistical mechanics of cellular automata*. *Rev. Mod. Phys.* (1983) **55**, 601–644.
8. Wolfram S., *Universality and complexity in cellular automata*. *Physica* (1984) **10D**, 1–35.
9. Wolfram S., Martin O., Odlyzko A. M., *Algebraic properties of cellular automata*. *Comm. Math. Phys.* (1984) **93**, 219–258.
10. Wolfram S., *Computation theory of cellular automata*, *Comm. Math. Phys.* (1984) **96**, 15–57.
11. Wolfram S., *Twenty problems in the theory of cellular automata*. *Physica Scripta* (1985) **T9**, 170–183.
12. Wolfram S., *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore, 1986.
13. Wolfram S., *Cryptography with cellular automata*. *Lecture Notes Computer Sci.* (1986) **218**, 429–432.

Статья поступила 06.10.2004.

Переработанный вариант поступил 14.12.2005.