Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Ильченко, Критерий полноты для неоднородных функций с задержками, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 86–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:00:14

Критерий полноты для неоднородных функций с задержками

© 1996 г. Н. В. Ильченко

Рассмотрена функциональная система неоднородных функций $f: \{0, 1\}^n \rightarrow C$, $C \in \{\{0, 1\}, \{0, 3\}\}$ с задержками t из $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, т. е. пар (f, t) с операциями синхронной суперпозиции. Для нее в терминах предполных классов решена задача описания всех ϕ -полных множеств, т. е. таких, из элементов которых с помощью указанных операций можно получить пару (f, t) для любой функции f . Из этого описания вытекает алгоритмическая разрешимость задачи об ϕ -полноте.

1. Введение

Рассматривается функциональная система $\bar{P}_\Sigma$ пар (f, t) с операциями синхронной суперпозиции (s -суперпозиции), где $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{a, b\}, \quad \{a, b\} \in \{\{0, 1\}, \{0, 3\}\}.$$

Пара (f, t) называется неоднородной функцией f с задержкой t . Система $\bar{P}_\Sigma$ является ближайшим обобщением булевых функций с задержками с операциями s -суперпозиции. Основным результатом работы является установление критерия, позволяющего выяснить для любой системы указанных пар возможность из нее с помощью операций s -суперпозиции получить любую из указанных неоднородных функций хоть с какой-нибудь задержкой — свойство функциональной полноты (ϕ -полноты). Из критерия вытекает алгоритмическая разрешимость задачи об ϕ -полноте. Необходимые понятия и результаты заимствуются из [1, 2] с упрощенными обозначениями.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, $D = \{0, 3\}$, $V \in \{E_2, D\}$, $N = \{1, 2, \dots\}$, $N_0 = N \cup \{0\}$ и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ — множество переменных со значениями из E_2 , переменные из U будем обозначать метасимволами x_i , $i = 1, 2, \dots$. Обозначим через P_V класс всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ со значениями из V , а через P_Σ класс $P_{E_2} \cup P_D$. Для P_{E_2} далее используем принятое обозначение P_2 , а его элементы назовем булевыми функциями. Если $K \subseteq P_\Sigma$, полагаем $K_V = K \cap P_V$.

Пусть $K \subseteq P_\Sigma$. Введем операции суперпозиции над K следующим образом.

- (1) Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in K$ и $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n} \in U$. Тогда $f(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n})$ задает новую функцию из P_Σ , полученную по определению из f с помощью операций суперпозиции (операции переименования переменных).
- (2) Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in K$ и $g_1, \dots, g_n$ — строка переменных из U или функций из P_2 , которые получены из K с помощью операций суперпозиции. Тогда функция g , определяемая выражением $f(g_1, \dots, g_n)$, по определению получена из f и $g_1, \dots, g_n$ с помощью операций суперпозиции (подстановка функций и переменных в функцию).

Для $K \subseteq P_\sigma$ через $[K]$ обозначим множество всех функций, полученных из K с помощью конечного числа применений операций (1) и (2), и назовем его замыканием множества K . Назовем множество K замкнутым, если $[K] = K$, и полным в P_Σ , если $[K] = P_\Sigma$. Множество K называется предполным, если K не полно и для любой $f \in P_\Sigma \setminus K$

$$[K \cup \{f\}] = P_\Sigma.$$

Введем классы $\bar{P}_V = \{(f, t) : f \in P_V, t \in \mathbb{N}_0\}$ и $\bar{P}_\Sigma = \bar{P}_2 \cup \bar{P}_D$. Для обозначения подмножеств из $\bar{P}_\Sigma$ будем использовать символ $\tilde{K}$. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, положим

$$\tilde{K}^p = \{(f, t) : (f, p) \in \tilde{K}\}, \quad \tilde{K}^{(1)} = \{f : (f, t) \in \tilde{K}\}.$$

Пусть $\bar{Q} \in \{\bar{P}_2, \bar{P}_\Sigma\}$ и $\tilde{K} \subseteq \bar{Q}$. Введем понятие операции с-суперпозиции над $\tilde{K}$ следующим образом.

- (1') Пусть $(f(x_1, \dots, x_n), t) \in \tilde{K}$ и $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n} \in U$. Тогда выражение $(f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), t)$ задает пару (g, t) из $\bar{Q}$, в которой g реализуется выражением $f(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_n})$. Пара (g, t) по определению получается из $(f(x_1, \dots, x_n), t)$ с помощью операции с-суперпозиции (с-переименование переменных).
- (2') Пусть $(f(x_1, \dots, x_n), t) \in \tilde{K}$ и $(g_1, \tau), \dots, (g_n, \tau)$ — строка пар из $\bar{Q}_{E_2}$, которые получены из $\tilde{K}$ с помощью операций с-суперпозиции, или при $\tau = 0$ могут также иметь вид $(x_j, 0)$. Тогда выражение $(f(g_1, \dots, g_n), t + \tau)$ задает по определению элемент из $\bar{Q}$, полученный из (f, t) и $(g_1, \tau), \dots, (g_n, \tau)$ с помощью операций с-суперпозиции (с-подстановка пар в пару).

Обозначим через $[\tilde{K}]_c$ множество всех пар, полученных из $\tilde{K}$ с помощью конечного числа применений операций (1') и (2'), и назовем его с-замыканием множества $\tilde{K}$.

Назовем множество $\tilde{K}$ с-замкнутым, если $[\tilde{K}]_c = \tilde{K}$. Множество $\tilde{K}$ называется с-полным в $\bar{Q}$, если $[\tilde{K}]_c = \bar{Q}$. Множество $\tilde{K}$ называется с-предполным в $\bar{Q}$, если $\tilde{K}$ не с-полно, но для любого элемента $(f, t) \in \bar{Q} \setminus \tilde{K}$

$$[\tilde{K} \cup \{(f, t)\}]_c = \bar{Q}.$$

Задача о полноте для $\bar{P}_\Sigma$ состоит в решении уравнения $[\tilde{K}]_c = \bar{P}_\Sigma$ относительно $\tilde{K}$, т.е. в описании всех с-полных множеств. В [3] она решена путем отыскания всех с-предполных классов в $\bar{P}_\Sigma$.

Для $K \subseteq P_\Sigma$ обозначим через $\bar{K}$ множество всех пар из $\bar{P}_\Sigma$ вида (f, t) , где $f \in K$ и $t \in N_0$.

Множество $\tilde{K} \subseteq \bar{Q}$ называется ϕ -полным в $\bar{Q}$, если $[\tilde{K}]_c^{(1)} = Q$. Пусть $t \in N_0$, $N' \subseteq N_0$. Обозначим через $\tilde{R}_t$ любое множество вида

$$\bigcup_{j \in N'} (f_j, k_j t) \cup \{(x, t)\},$$

где $k_j \in N$, такое, что $[\tilde{R}_t]_c^{(1)} = P_2$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Множество $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ является ϕ -полным в $\bar{P}_\Sigma$ тогда и только тогда, когда для некоторых $t, T \in N_0$, $\tilde{R}_t$ и $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$*

$$[\tilde{K}]_c \supseteq \tilde{R}_t \cup \{(f, T)\}.$$

Следствие 1. *Любое ϕ -полное множество содержит конечное ϕ -полное подмножество.*

Пусть L, S, M, T_0, T_1 — соответственно классы линейных, самодвойственных, монотонных, сохраняющих 0, сохраняющих 1 булевых функций.

Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, то при совпадении $f(x, \dots, x)$ с $x, 1, 0$ или $\bar{x}$ назовем f соответственно функцией типа $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle$, обозначая соответственно классы всех таких функций через A, B, Γ, Δ .

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется четной, если $f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Пусть Y — класс всех таких функций.

Пусть $r \in N$, $N_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $\mathfrak{M}_E = \{3\} \cup P_2$, $0 = \{0\}$, $1 = \{1\}$.

Введем следующие классы: $\bar{\mathfrak{M}}_E, \bar{L}, \bar{S}, \bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{H} = \bar{S}^0 \cup (\bar{Y} \setminus \bar{Y}^0)$,

$$\bar{C} = \bar{A}^0 \cup (\bar{B} \setminus \bar{B}^0) \cup (\bar{\Gamma} \setminus \bar{\Gamma}^0),$$

$$\bar{E}_0 = \bar{A}^0 \cup \bar{B}^0 \cup (\bar{0} \setminus \bar{0}^0) \cup \bar{1},$$

$$\bar{E}_1 = \bar{A}^0 \cup \bar{\Gamma}^0 \cup \bar{0} \cup (\bar{1} \setminus \bar{1}^0),$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_r = \{ & (f, (2t+1)2^r) : f \in M, t \in N_0 \} \\ & \cup \{(\varphi, (2t+1)2^s) : \varphi \in M, s \in N \setminus N_r, t \in N_0\} \\ & \cup \bar{M}^0 \cup \bar{1} \cup \bar{0}, \quad r \in N_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_r = \{ & (f, (2t+1)2^r) : f \in \Delta, t \in N_0 \} \\ & \cup \{(\varphi, (2t+1)2^s) : \varphi \in A, s \in N \setminus N_r, t \in N_0\} \cup \bar{A}^0, \quad r \in \bar{N}_0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathfrak{L} = \{\bar{L}, \bar{S}, \bar{M}, \bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{H}, \bar{C}, \bar{E}_0, \bar{E}_1\} \cup \bigcup_{r \in N_0} \{\bar{W}_r\} \cup \bigcup_{r \in \bar{N}_0} \{\bar{Z}_r\}.$$

Если $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$, то ${}^0[\tilde{K}]_c = [\tilde{K}]_c \cap \bar{0}$.

Теорема 2. Множество $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ является ϕ -полным в $\bar{P}_\Sigma$ тогда и только тогда, когда $\tilde{K}_B \not\subseteq \bar{\mathfrak{M}}_E$ и для любого Q из $\mathcal{L}$

$$\tilde{K}_{E_2} \cup {}^0[\tilde{K}]_c \not\subseteq Q.$$

Теорема 3. Распознавание свойства ϕ -полноты конечных множеств в $\bar{P}_\Sigma$ алгоритмически разрешимо.

Множество $\tilde{K}$ называется ϕ -предполным в $\bar{P}_\Sigma$, если оно не является ϕ -полным, но для всякой пары (f, t) , $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus \tilde{K}$, множество $\tilde{K} \cup \{(f, t)\}$ ϕ -полно в $\bar{P}_\Sigma$.

Обозначим через Γ^* множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n) \in P_D$ таких, что $f(0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1) = 0$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется D -самодвойственной, если на всякой паре наборов $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, называемых противоположными,

$$(f(\vec{\alpha}), f(\vec{\beta})) \neq (0, 0).$$

Обозначим через $P_{D,S}$ класс всех не D -самодвойственных функций.

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} \bar{T}_0^* &= \bar{T}_0 \cup \bar{P}_D, \quad \bar{M}^* = \bar{M} \cup \bar{P}_D, \quad \bar{L}^* = \bar{L} \cup \bar{P}_D, \quad \bar{E}_1^* = \bar{E}_1 \cup \bar{P}_D, \\ \bar{T}_1^* &= \bar{T}_1 \cup (\bar{P}_D \setminus \bar{\Gamma}^*), \quad \bar{S}^* = \bar{S} \cup (\bar{P}_D \setminus \bar{P}_{D,S}), \\ \bar{C}^* &= \bar{C} \cup (\bar{P}_D \setminus \bar{\Gamma}^{*0}), \quad \bar{E}_0^* = \bar{E}_0 \cup (\bar{P}_D \setminus \Gamma^{*0}), \quad \bar{H}^* = \bar{H} \cup (\bar{P}_D \setminus \bar{P}_{D,S}^0), \\ \bar{W}_r^* &= \bar{W}_r \cup \bar{P}_D, \quad \bar{Z}_r^* = \bar{Z}_r \cup (\bar{P}_D \setminus \Gamma^*), \quad r \in \mathbf{N}_0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{\bar{T}_0^*, \bar{M}^*, \bar{L}^*, \bar{E}_0^*, \bar{T}_1^*, \bar{S}^*, \bar{C}^*, \bar{E}_0^*, \bar{H}^*\} \cup \bigcup_{r \in \mathbf{N}_0} \{\bar{W}_r^*\} \cup \bigcup_{r \in \mathbf{N}_0} \{\bar{Z}_r^*\}.$$

Теорема 4. Множество всех ϕ -предполных классов в $\bar{P}_\Sigma$ совпадает с $\tilde{\mathcal{L}} \cup \{\bar{\mathfrak{M}}_E\}$; $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ является ϕ -полным тогда и только тогда, когда $\tilde{K} \not\subseteq Q^*$ для любого Q^* из $\tilde{\mathcal{L}} \cup \{\bar{\mathfrak{M}}_E\}$.

3. Доказательство теоремы 1

В [1] доказаны следующие леммы.

Лемма 1. Множество $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_2$ является ϕ -полным тогда и только тогда, когда $[\tilde{K}]_c \supseteq \bar{R}_t$ для некоторого $t \in \mathbf{N}_0$.

Обозначим через X_t множество вида $\{(x, t), (\bar{x}, t), (1, t), (0, t)\}$, где $t \in \mathbf{N}_0$.

Лемма 2. Если $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_2$ конечно, ϕ -полно и $[\tilde{K}]_c \supseteq \{(x, t), (\bar{x}, t)\}$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$, то найдется такое $t' \in \mathbf{N}_0$, что $[\tilde{K}]_c \supseteq X_{t'}$.

Доказательство теоремы 1. Докажем необходимость. Покажем, что если $\tilde{K}$ ф-полно, то $\tilde{K} \supseteq \tilde{R}_t \cup \{(f, T)\}$. Поскольку $\tilde{K}$ ф-полно, то $(([\tilde{K}]_c)_{E_2})^{(1)} = P_2$. Следовательно, по лемме 1 $\tilde{K} \supseteq \tilde{R}_t$ при некотором $t \in N_0$.

Из ф-полноты $\tilde{K}$ следует, что существует $t' \in N_0$ такое, что $(f, t') \in ([\tilde{K}]_c)_D$ для некоторой функции $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$.

Установим достаточность. Пусть $[\tilde{K}]_c \supseteq \tilde{R}_t \cup \{(f, T)\}$. Покажем, что $\tilde{K}$ ф-полно. Для этого с учетом ф-полноты $\tilde{R}_t$ в $\tilde{P}_2$ достаточно установить, что для любой функции $g \in P_D$ найдется t_g , такое, что $(g, t_g) \in [\tilde{K}]_c$. Нетрудно видеть, что если $(h, \tau) \in [\tilde{R}_t]_c$, то $\tau = at$. Поэтому с учетом ф-полноты $\tilde{R}_t$ в $\tilde{P}_2$ при некотором $b \geq 0$ имеем $(\bar{x}, bt)$. Таким образом, $[\tilde{R}_t]_c \supseteq \{(x, t), (\bar{x}, bt)\}$. Отсюда следует, что $[\tilde{R}_t]_c \supseteq \{(x, ct), (\bar{x}, ct)\}$ при некотором $c \geq 0$. По лемме 2 заключаем, что $[\tilde{R}_t]_c \supseteq X_{t_1}$ для некоторого X_{t_1} .

Рассмотрим $(f(x_1, \dots, x_n), T)$. Для f найдутся два набора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $f(\vec{\alpha}) \neq f(\vec{\beta})$. Подставим в пару (f, t) вместо x_i пару $(0, t_1)$, если $\alpha_i = \beta_i = 0$, пару $(1, t_1)$, если $\alpha_i = \beta_i = 1$, пару (x, t_1) , если $\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 0$, пару $(\bar{x}, t_1)$, если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

В результате получим $(e(x), T + t_1)$, причем $e(0) \neq e(1)$. Поскольку $(\bar{x}, t) \in [\tilde{K}]$, можно считать, что $e(0) = 0$ и $e(1) = 3$. Пусть $g(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная функция из P_D . Выберем в $([\tilde{K}]_c)_{E_2}$ пару $(\lambda(x_1, \dots, x_m), T')$ такую, что λ и g равны нулю на одних и тех же наборах. Нетрудно видеть, что, подставляя пару (λ, T') в $(e, T + t_1)$, получаем, что $(g, T' + t_1 + T) \in [\tilde{K}]_c$. Теорема доказана.

Интересно отметить, что уточнение теоремы с требованием кратности T в паре (f, T) числу t , оказывается, вообще говоря, неверным. Установим это.

Рассмотрим множество $\tilde{K} = \{(x, 2), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, 2), (f, 3)\}$, где $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$, а также $\tilde{K}_a = \{(x, 2), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, 2)\} \cup \bar{0} \cup \bar{1}$ и $\tilde{K}_b = \tilde{K}_a \cup \{(h, 3)\}$, где $h \in P_D \setminus \{0, 3\}$.

Предложение 1. Если $(g, l) \in [\tilde{K}_a]_c$, то при $g \notin \{0, 1\}$ число l четно.

Доказательство. Установим утверждение индукцией по числу l . Пусть $(g, l) \in [\tilde{K}_a]_c$ и $l \leq 2$, тогда нетрудно убедиться, что $(g, l) \in \{(x, 2), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$, т.е. если $g \notin \{0, 1\}$, то l четно.

Пусть теперь $n > 2$. Предположим, что наше утверждение верно для $l \leq n$. Покажем, что оно верно и для $l \leq n + 1$. Пусть $l \leq n + 1$ и (g, l) есть результат с-подстановки пар $(g_1, \tau), \dots, (g_m, \tau)$ в пару (f, p) . В этом случае, если $p \leq 1$ или $\tau \leq 1$, то $g \in \{0, 1\}$. Пусть $p > 1$ и $\tau \geq 1$. Тогда, если $p = 2k + 1$ или $\tau = 2r + 1$, то по предположению индукции $f \in \{0, 1\}$ или $g_i \in \{0, 1\}$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, следовательно, $g \in \{0, 1\}$. Если же $p = 2k$ и $\tau = 2r$, то $l = 2(k + r)$ и при $g \in P_2 \setminus \{0, 1\}$ наше утверждение верно. Предложение установлено.

Предложение 2. Если $(g, l) \in [\tilde{K}_b]_c$, то при $g \notin \{0, 3\}$ число l нечетно.

Доказательство. Пусть $(g, l) \in [\tilde{K}_b]_c$ и $g \in P_D$. Можно считать, что пара (g, l) получена с-подстановкой пар $(g_1, \tau), \dots, (g_m, \tau)$ в пару $(h, 3)$, где $h \in P_D \setminus \{0, 3\}$ и $i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $g_i \in \{0, 1\}$, откуда $g \in \{0, 3\}$.

Далее, по предложению 1, если $g_i \notin \{0, 1\}$ при некотором i , то $\tau = 2k$. В этом случае результат с-подстановки дает пару $(h(g_1, \dots, g_m), 3 + 2k) = (g, 1 + 2(k + 1))$, где $g \in P_D$. Таким образом, в паре $(g, l) \in [\tilde{K}_b]_c$ при условии, что $g \in P_D \setminus \{0, 3\}$, имеем $l = 1 + 2r$. Предложение установлено.

Предложение 3. Условие $[\tilde{K}]_c \supseteq \tilde{R}_t \cup \{(f, kt)\}$, где $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$, не является необходимым для ϕ -полноты $\tilde{K}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{K} = \{(x, 2), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, 2), (h, 3)\}$, где $h \in P_D \setminus \{0, 3\}$. По теореме 1 множество $\tilde{K}$ является ϕ -полным. Покажем, что в $[\tilde{K}]_c$ не существует ϕ -полной системы вида $\tilde{R}_t \cup \{(f, lt)\}$, где $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$.

Если $(g, t) \in [\tilde{K}]_c \cap \bar{P}_2$, то $(g, t) \in [\tilde{K}_a]_c$, и по предложению 1 при $g \notin \{0, 1\}$ имеем $t = 2k$.

Если $(u, t) \in [\tilde{K}]_c \cap \bar{P}_D$, то $(u, t) \in [\tilde{K}_b]_c$, и по предложению 2 при $u \notin \{0, 1\}$ имеем $t = 2l + 1$.

Таким образом, если $\tilde{R}_t \subseteq [\tilde{K}]_c$, то пары из $[\tilde{K}]_c \cap \bar{P}_2$ имеют четную задержку, а пары из $\bar{P}_D \cap [\tilde{K}]_c$ нечетную. Предложение установлено.

4. Доказательство теоремы 2

В [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Множество $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_2$ является ϕ -полным тогда и только тогда, когда $\tilde{K} \not\subseteq Q$ для любого $Q \in \mathcal{L}$.

Предложение 4. Для $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $([\tilde{K}]_c^{(1)}) \supseteq P_2$,
- (2) $(\tilde{K}_{E_2} \cup {}^0[\tilde{K}]_c)^{(1)} = P_2$,
- (3) при любом $Q \in \mathcal{L}$ $\tilde{K}_{E_2} \cup {}^0[\tilde{K}]_c \not\subseteq Q$.

Доказательство теоремы 2. Докажем достаточность. Пусть выполнены условия (а) и (б). Покажем, что $\tilde{K}$ ϕ -полно. Из (а) следует, что в $\tilde{K}$ найдется такая пара (f, t) , что $f \in P_D$ и $f \notin \{0, 3\}$. Из (б) с учетом предложения 4 и леммы 1 получаем, что $[\tilde{K}]_c \supseteq \tilde{R}_t$ при некотором t , откуда по теореме 1 следует ϕ -полнота множества $\tilde{K}$.

Докажем необходимость. Пусть $\tilde{K}$ ϕ -полно. Тогда по теореме 1 $[\tilde{K}]_c \ni (f, T)$, где $f \in P_D \setminus \{0, 3\}$ и $[\tilde{K}]_c \supseteq \tilde{R}_t$, но $[\tilde{R}_t]_c^{(1)} = P_2$ и поэтому условия (а) и (б) теоремы 2 выполнены. Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3. Для конечных множеств $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ свойство $\{(0, 0) \in [\tilde{K}]_c\}$ алгоритмически разрешимо.

Доказательство. Рассмотрим два случая, $\tilde{K}^0 \subseteq \bar{P}_2$ и $\tilde{K}^0 \not\subseteq \bar{P}_2$. В первом случае, очевидно, включения $(0, 0) \in [\tilde{K}^0]_c$ и $0 \in [\tilde{K}^0]_c^{(1)}$ эквивалентны. Последнее включение, как известно (см. [4]) алгоритмически разрешимо.

Во втором случае пусть $\tilde{K}^0 = \tilde{K}_{E_2}^0 \cup \tilde{K}_D^0$, $\tilde{K}_D^0 = \{(f_1, 0), \dots, (f_s, 0)\}$ и n — наибольшее число переменных у функций из $(\tilde{K}_D^0)^{(1)}$. Проверка свойства $(0, 0) \in [\tilde{K}_{E_2}^0]_c$ рассмотрена в первом случае. Пусть $0 \notin [\tilde{K}_{E_2}^0]_c^{(1)}$. Заметим, что для любой пары $(f(x), 0)$, где $f(x) \in \{x, \bar{x}, 1\}$, включение $(f(x), 0) \in [\tilde{K}_{E_2}^0]_c$, как установлено в [4], алгоритмически разрешимо. Поэтому можно считать, что множество $[\tilde{K}_{E_2}^0]_c^{(1)} \cap \{x, \bar{x}, 1\}$ нам известно. Покажем, как алгоритмически определить вхождение $(0, 0) \in [\tilde{K}^0]_c$. С этой целью рассмотрим произвольную пару $f_i(g_{i_1}, \dots, g_{i_{n_i}}), 0)$, получающуюся из $(f_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}), 0) \in \tilde{K}_D^0$ подстановкой в нее пар $g_{ij}(x), 0) \in [\tilde{K}_{E_2}^0]_c$, где $j = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, s_i$. Таких формально различных пар не более, чем $s3^n$. При этом, если $(0, 0) \in [\tilde{K}^0]_c$, то среди указанных пар обязательно найдется совпадающая с парой $(0, 0)$. Таким образом, включение $(0, 0) \in [\tilde{K}^0]_c$ сводится к нахождению пары $(0, 0)$ среди построенных пар $(f_i(g_1, \dots, g_n), 0)$, что алгоритмически проверяемо. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ и $(0, 0) \in [\tilde{K}]_c$, то $\tilde{K}$ ϕ -полно тогда и только тогда, когда $\tilde{K}_D \not\subseteq \bar{\mathcal{M}}_E$ и $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq Q$ для любого

$$Q \in \{\bar{M}, \bar{L}, \bar{T}_0, \bar{E}_1\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{N}_0} \{W_r\}.$$

Доказательство. Необходимость условия $\tilde{K}_D \not\subseteq \bar{\mathcal{M}}_E$ очевидна. Необходимость остальных условий вытекает из того, что множества $\bar{M}$, $\bar{L}$, $\bar{T}_0$, $\bar{E}_1$ и $\bar{W}_r$ при любом r являются s -замкнутыми, не ϕ -полными и содержат все пары вида $(0, t)$, $t \geq 0$.

Установим достаточность. Пусть $\tilde{K}_{E_2} \cup \{(0, 0)\} \not\subseteq Q$ для всех Q . Так как $(0, 0) \notin Q'$ для всех $Q' \in \mathcal{L}$, то $\tilde{K}_{E_2} \cup \{(0, 0)\} \not\subseteq Q''$ для всех $Q'' \in \mathcal{L}$. Отсюда, замечая, что $\tilde{K}_D \not\subseteq \bar{\mathcal{M}}_E$, с учетом теоремы 2 получаем, что $\tilde{K}$ ϕ -полно. Лемма доказана.

Следствие 2. При $(0, 0) \in [\tilde{K}]_c$ свойство $\tilde{K}$ быть ϕ -полным алгоритмически разрешимо.

Типом $\tau(K)$ множества $K \subseteq P_2$ назовем множество всех типов функций из K , а основанием K множество всех одноместных функций из K . Если K замкнуто, то, очевидно, его тип совпадает с типом основания.

Лемма 5. Если $\tilde{K} \subseteq \tilde{P}_\Sigma$, $\tilde{K}$ конечно и $(0, 0) \notin [\tilde{K}]_c$, то свойство {существует такое $t \in \mathbb{N}$, что $(0, t) \in [\tilde{K}_{E_2}]_c$ } алгоритмически разрешимо.

Доказательство. Если $\tilde{K}_{E_2} \subseteq \tilde{P}_2^0$, то утверждение очевидно. Пусть $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \tilde{P}_2^0$. Это означает, что в $\tilde{K}_{E_2}$ имеется пара (f, t') такая, что $t' > 0$. Если $\tau(K_{E_2}) \ni \langle \gamma \rangle$, то в $[\tilde{K}_{E_2}]_c$ имеется, очевидно, пара $(0, t'')$. Подставляя в нее пару (f, t') , получим, что $(0, t' + t'') \in [\tilde{K}_{E_2}]_c$, где $t' + t'' > 0$. Если $\tau(K_{E_2}) \ni \langle \gamma \rangle$, то $\tau(K_{E_2}) \in \{\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle\}$, откуда очевидно, что $(0, t) \notin [\tilde{K}_{E_2}]_c$ при любом t . Заметим, что условия проверки вхождения типа $\langle \gamma \rangle$ в $\tau(K_{E_2})$ и получения $(0, t' + t'')$ алгоритмически проверяемы. Лемма доказана.

Как установлено в [1], имеет место следующее утверждение.

Предложение 5. Для любого $r \in \mathbb{N}_0$

$$\{(x, t), (\bar{x}, t)\} \not\subseteq \tilde{Z}_r.$$

Пусть f зависит от $x_1, \dots, x_n$. Обозначим через f^x функцию, задаваемую формулой $f(x, \dots, x)$.

Предложение 6. Если $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \tilde{Z}_r$ для любого $r \in \mathbb{N}_0$, то

$$[\tilde{K}_{E_2}]_c \supseteq \{(x, t), (\bar{x}, t)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим все пары (f, t) из $\tilde{K}_{E_2}$ такие, что $\tau(f) = \langle \delta \rangle$. Их множество $\tilde{K}'$ можно записать так:

$$\tilde{K}' = \{(f_i, (2t_i + 1)2^{r_i}) : f_i \in \Delta, i = 1, 2, \dots, l\},$$

где $r_i \in \mathbb{N}_0$ для всех i . Здесь либо все r_i равны между собой, либо это не так.

Во втором случае можно считать, что $r_1 < r_2$. Рассмотрим пары $(f_1^x, (2t_1 + 1)2^{r_1})$ и $(f_2^x, (2t_2 + 1)2^{r_2})$. Ясно, что $f_i^x = \bar{x}$ при $i = 1, 2$. Подставляя в себя первую пару $(2t_1 + 1)2^{r_2 - r_1}$ раз, а вторую в себя $(2t_1 + 1)$ раз, получим, соответственно, пары

$$(x, (2t_1 + 1)(2t_2 + 1)2^{r_2}), (\bar{x}, (2t_1 + 1)(2t_2 + 1)2^{r_2}).$$

В первом случае выделяем в $\tilde{K}_{E_2}$ множество $\tilde{K}''$ всех пар (g, t') , в которых $\tau(g) = \langle \alpha \rangle$. Их можно записать в виде

$$\{(g_j, (2t'_j + 1)2^{r_j}) : g_j \in A, j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Рассмотрим три подслучая.

1. Существует такое j_0 , что $r'_{j_0} = r_1$. Рассмотрим пары

$$(f_1^x, (2t_1 + 1)2^{r_1}), (g_{j_0}^x, (2t'_{j_0} + 1)2^{r_j}).$$

Ясно, что $f_1^x = \bar{x}$ и $g_{j_0}^x = x$. Подставляя первую пару в себя $(2t_{j_0} + 1)$, а вторую $(2t_1 + 1)$ раз, получаем, соответственно, пары

$$(\bar{x}, (2t_1 + 1)(2t_{j_0} + 1)2^{r_1}), (x, (2t_{j_0} + 1)(2t_1 + 1)2^{r_1}).$$

2. Существует такое j_0 , что $r'_{j_0} < r_1$. Рассмотрим пары

$$(f_1^x, (2t_1 + 1)2^{r_1}), (g_{j_0}^x, (2t'_{j_0} + 1)2^{r'_{j_0}}).$$

Ясно, что $f_1^x = \bar{x}$, $g_{j_0}^x = x$. Подставляя первую пару в себя $(2t_{j_0} + 1)$ раз, а вторую $(2t_1 + 1)2^{r_1 - r'_{j_0}}$ раз, получаем, соответственно, пары

$$(\bar{x}, (2t_1 + 1)(2t_{j_0} + 1)2^{r_1}), (x, (2t_1 + 1)(2t_{j_0} + 1)2^{r_1}).$$

3. Всегда $r'_j > r_1$. Тогда, очевидно, $\tilde{K}_{E_2} \subseteq Z_{r_1}$, что противоречит утверждению. Значит, этого случая быть не может. Утверждение доказано.

Лемма 6. Для конечных множеств $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_\Sigma$ таких, что $(0, 0) \notin [\tilde{K}]_c$ и $(0, t) \notin [\tilde{K}_{E_2}]_c$ при любых t , свойство {существует такое $t' > 0$, что $(0, t') \in [\tilde{K}]_c$ } алгоритмически разрешимо.

Доказательство. Если $\tilde{K} \subseteq \bar{P}_2$, то по условию $(0, 0) \notin [\tilde{K}]_c$ при любом t .

Пусть теперь $\tilde{K} \not\subseteq \bar{P}_2$, т. е. $\tilde{K} \neq \emptyset$. Возможны два случая, $\tilde{K}_{E_2} = \emptyset$ и $\tilde{K}_{E_2} \neq \emptyset$.

В первом случае включение $(0, t') \in [\tilde{K}]_c$ влечет включение $(f(x_1, \dots, x_m), t') \in \tilde{K}_D$, где $f^x = 0$. Если при этом всегда $t' = 0$, то $(0, t') \notin [\tilde{K}]_c$ при $t > 0$. Если найдется $t' > 0$, то, так как $(f^x, t') = (0, t')$, имеем $(0, t') \in [\tilde{K}]_c$ и $t' > 0$.

Оба свойства устанавливаются в силу конечности $\tilde{K}$ перебором.

Во втором случае будем иметь $\rho = \tau(K_{E_2}) \in \{\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \delta \rangle\}$ и без ограничения общности считаем, что $(x, 0) \in \tilde{K}_{E_2}$, поэтому для ρ значение $\langle \beta \rangle$ далее исключаем.

Если $(0, t) \in [\tilde{K}]_c$, то для некоторых пар $(h(x_1, \dots, x_m), t_1)$ из $\tilde{K}_D$ и $(g_1, t_2), \dots, (g_m, t_2)$ из $[\tilde{K}_{E_2}]_c$ справедливо равенство

$$(h(g_1, \dots, g_m), t_1 + t_2) = (0, t), \quad (1)$$

а, значит, $h(g_1^x, \dots, g_m^x) = 0$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $\rho = \langle \alpha \rangle$. Тогда, поскольку в этом случае $g_i^x = x$ для всех i , имеем $h(g_1^x, \dots, g_m^x) = h(x, \dots, x) = 0$. Если $t_1 = 0$, то при $\tilde{K}_{E_2} \subseteq \bar{P}_2^0$ и $t > 0$, очевидно, $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$; при $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \bar{P}_2^0$ найдется пара (g, t') , в которой $t' > 0$.

Поскольку $(g^x, t') = (x, t')$, то $(x, t') \in [\tilde{K}]_c$, а поэтому, делая с-подстановку пары (x, t') в $(h^x, t_1 + t')$, получаем, что $(h^x, t_1 + t') \in [\tilde{K}]_c$, где $t_1 + t' > 0$.

2. $\rho = \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда, поскольку $g_i^x \in \{1, x\}$ для всех i , можно считать, что $h(g_1^x, \dots, g_m^x) = h(1, \dots, 1, x, \dots, x) = 0$, а тем самым $h(1, \dots, 1) = 0$.

Если $t_1 > 0$, то, делая с-подстановку произвольной пары (g^x, t_g) из $\tilde{K}_{E_2}$ такой, что $\tau(g) = \langle \beta \rangle$, в (h^x, t_1) , получим, что $(h^x(g^x), t_1 + t_g) = (0, t_1 + t_g)$, а тем самым $(0, t_1 + t_g) \in [\tilde{K}]_c$ и $t_1 + t_g > 0$.

Если во всяком представлении (1) $t_1 = 0$, то при $\tilde{K}_{E_2} \subseteq \bar{P}_2^0$, заключаем, что $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$ при $t > 0$; при $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \bar{P}_2^0$, взяв в $\tilde{K}_{E_2}$ пары (g, t_g) , где $t_g > 0$, и (g', t_4) , где $\tau(g') = \langle \beta \rangle$, и, делая с-подстановку (g^x, t_g) в (g'^x, t_4) , получаем пару $(1, t_g + t_4)$. Сделав с-подстановку этой пары в (h^x, t_1) , получим $(0, t)$, где $t = t_1 + t_g + t_4 > 0$.

3. $\rho = \langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда, поскольку $g_i^x \in \{x, \bar{x}\}$ для всех i , можно считать, что $h(g_1^x, \dots, g_m^x) = h(x, \dots, x, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = 0$. Здесь или хотя бы одна из групп переменных x и $\bar{x}$ пустая, или это не так. В первом случае рассмотрим пару (h^x, t_1) . Ясно, что $(h^x, t_1) = (0, t_1)$, а, значит, при $t_1 > 0$ имеем $(0, t_1) \in [\tilde{K}]_c$. Если $t_1 = 0$ во всяком представлении (1), то заключаем, что при $\tilde{K}_{E_2} \subseteq \tilde{P}_2^0$ и $t > 0$ справедливо соотношение $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$; при $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \tilde{P}_2^0$ берем (g, t_g) из $\tilde{K}_{E_2}$ такую, что $t_g > 0$. Делаем с-подстановку (g^x, t_g) в (h^x, t_1) , получим пару $(0, t_1 + t_g)$, где $t_1 + t_g > 0$.

Во втором случае в предположении, что первый случай не реализуется при любом представлении (1), в силу предложения (6), можем установить, имеются ли в $[\tilde{K}_{E_2}]_c$ пары (x, t_2) и $(\bar{x}, t_2)$. Если таких пар нет, то $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$ при любом t . Если такие пары нашлись, то сделаем с-подстановку пары (x, t_2) в (h, t_1) вместо x_i , если в выражении $h(x, \dots, x, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ на i -м месте стоит x , и пары $(\bar{x}, t_2)$, если там стоит $\bar{x}$. В результате получим $(0, t_1 + t_2)$. Если $\tilde{K}_{E_2} \subseteq \tilde{P}_2^0$ и $t_1 = 0$ для всех пар (h_1, t_1) , то при $t > 0$ имеем $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$. В противном случае с учетом того, что при $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq \tilde{P}_2^0$ можно, очевидно, считать, что $t > 0$, либо за счет выбора t_1 или t_2 , заключаем, что $t_1 + t_2 > 0$ в паре $(0, t_1 + t_2)$.

Поскольку все используемые свойства в разобранных случаях устанавливаются перебором $\tilde{K}$, заключаем, что утверждение леммы справедливо.

Из теоремы 2 и теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 7. Если $(0, t) \in [\tilde{K}]_c$ при некотором $t > 0$, то $\tilde{K}$ ф-полно тогда и только тогда, когда $\tilde{K}_D \not\subseteq \tilde{M}_E$ и $\tilde{K}_{E_2} \not\subseteq Q$ для любого

$$Q \in \{\bar{L}, \bar{M}, \bar{T}_0, \bar{E}_0, \bar{H}\} \cup \bigcup_{r \in N_0} \{\bar{W}_r\},$$

В работе [2] установлено следующее предложение.

Теорема 6. Существует алгоритм, который для любого конечного $\tilde{K} \subseteq \tilde{P}_2$ устанавливает, верно ли свойство $\tilde{K} \not\subseteq Q$ при любом $Q \in \mathcal{L}$.

Доказательство теоремы 3. Опишем основные шаги алгоритма распознавания ф-полноты для конечного $\tilde{K} \subseteq \tilde{P}_2$.

Шаг 1. Проверка условия $(0, 0) \in [\tilde{K}]_c$. По лемме 3 это свойство алгоритмически разрешимо. Если $(0, 0) \in [\tilde{K}]_c$, то в силу следствия 2 заключаем, что имеется алгоритм проверки ф-полноты множества $\tilde{K}$. Если установлено, что $(0, 0) \notin [\tilde{K}]_c$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Проверяем, существует ли такое $t \in \mathbb{N}$, что $(0, t) \in [\tilde{K}]_c$. Сначала проверим включение $(0, t) \in [\tilde{K}_{E_2}]_c$. По лемме 5 это свойство проверяется алгоритмически. Если $(0, t) \notin [\tilde{K}_{E_2}]_c$, то с помощью леммы 6 устанавливается включение $(0, t) \in [\tilde{K}]_c$. Если указанное t нашлось, то с учетом леммы 7 и теоремы 6 заключаем, что имеется алгоритм, устанавливающий является ли $\tilde{K}$ ф-полным. Если такого t не нашлось, то с учетом шага 1 заключаем, что $(0, t) \notin [\tilde{K}]_c$ при любом t и, значит, $\tilde{K}$ не является ф-полным. Теорема 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 4

Обозначим произвольный класс из $\mathcal{L}$ через Q , а соответствующий ему класс из $\tilde{\mathcal{L}}$ через Q^* .

Лемма 8. *Классы $\bar{T}_0^*$, $\bar{M}^*$, $\bar{L}^*$, $\bar{E}_1^*$, $\bar{W}_r^*$ при $r = 0, 1, 2, \dots$, суть ϕ -предполные в $\bar{P}_\Sigma$.*

Доказательство. Пусть

$$Q^* \in \{\bar{T}_0^*, \bar{M}^*, \bar{L}^*, \bar{E}_1^*\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{N}_0} \{\bar{W}_r^*\}.$$

Покажем, что Q^* с-замкнуто, $Q^{*(1)}$ отлично от P_Σ и Q^* ϕ -полно при добавлении любой пары из $\bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$.

Докажем с-замкнутость. По определению $Q^* = Q \cup \bar{P}_D$, где $[Q]_c = Q$, $[\bar{P}_D]_c = \bar{P}_D$, и, поскольку $Q \cap \bar{P}_D = \bar{0}$, то $[Q^*]_c = [Q \cup \bar{P}_D]_c = [Q]_c \cup [\bar{P}_D]_c = Q \cup \bar{P}_D$, т. е. Q^* замкнуто.

Поскольку $Q^{(1)} \neq P_2$ (см. [1]), то $Q^{*(1)} \neq P_\Sigma$. Докажем, что $[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_\Sigma$ при $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$. Ясно, что $\bar{P}_\Sigma \setminus Q^* = \bar{P}_2 \setminus Q$. Поэтому $(f, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$. Поскольку Q ϕ -предполно в $\bar{P}_2$ (см. [1]), то $[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c \supseteq [Q \cup \{(f, t)\}]_c$, $[Q \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_2$, и так как $Q^{*(1)} \supseteq P_D$, то $[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} \supseteq (P_2 \cup P_D) = P_\Sigma$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Классы $\bar{T}_1^*$, $\bar{S}^*$, $\bar{Z}_r^*$ при $r = 0, 1, 2, \dots$, суть ϕ -предполные в $\bar{P}_\Sigma$.*

Доказательство. Пусть

$$Q^* \in \{\bar{T}_1^*, \bar{S}^*\} \cup \bigcup_{r \in \mathbb{N}_0} \{\bar{Z}_r^*\}.$$

Покажем, что Q^* с-замкнуто, $Q^{*(1)}$ отлично от P_Σ и Q^* ϕ -полно при добавлении любой пары из $\bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$.

Докажем с-замкнутость. По определению $Q^* = Q \cup \bar{P}_D \setminus R$, где $R = \bar{\Gamma}^*$ для $\bar{T}_1^*$ и $\bar{Z}_r^*$ при $r = 0, 1, 2, \dots$, и $R = \bar{P}_{D,S}$ для $\bar{S}^*$. Рассмотрим $[Q^*]_c = [Q \cup (\bar{P}_D \setminus R)]_c$. Поскольку $[Q]_c = Q$, $[\bar{P}_D \setminus R]_c = \bar{P}_D \setminus R$, с-подстановка пар из $\bar{P}_D \setminus R$ в Q невозможна (по определению с-подстановки), с-переименование переменных и с-подстановка из Q в $\bar{P}_D \setminus R$ не дает пар из $\bar{0}$, так как в $\bar{P}_D \setminus R$ нет пар вида (g, T) , где $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$. Таким образом,

$$[Q^*]_c = [Q \cup (\bar{P}_D \setminus R)]_c = [Q]_c \cup [\bar{P}_D \setminus R]_c = Q \cup (\bar{P}_D \setminus R) = Q^*.$$

Поскольку $(0, t) \notin Q^*$, то $Q^{*(1)} \neq P_\Sigma$.

Докажем теперь, что $[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_\Sigma$ при $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$. Пусть $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$, тогда либо $(f, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$, либо $(f, t) = (0, t)$. Однако, в силу строения Q имеем $(0, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$. Следовательно, $(f, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$, и в силу ϕ -предполноты Q в $\bar{P}_2$ (см. [1])

$$[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} \supseteq [Q \cup \{(f, t)\}]_c$$

и $[Q \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_2$. Таким образом,

$$[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = [Q \cup (\bar{P}_D \setminus R) \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} \supseteq (P_2 \cup P_D) = P_\Sigma.$$

Значит, Q^* ϕ -предполное. Лемма доказана.

Лемма 10. Классы $\tilde{C}^*$, $\tilde{E}_0^*$, $\tilde{H}^*$ суть ϕ -предполные.

Доказательство. Пусть $Q^* \in \{\tilde{C}^*, \tilde{E}_0^*, \tilde{H}^*\}$. Покажем, что Q^* с-замкнуто, $Q^{*(1)}$ отлично от P_Σ и Q^* ϕ -полно при добавлении любой пары из $\tilde{P}_\Sigma \setminus Q^*$.

Докажем с-замкнутость. По определению $Q^* = Q \cup \bar{P}_D \setminus R^0$, где $R^0 = \bar{\Gamma}^{*0}$ для $\tilde{C}^*$, $\tilde{E}_0^*$, и $R^0 = \bar{P}_{D,S}^0$ для $\tilde{H}^*$. Далее, $[Q]_c = Q$, $[\bar{P}_D \setminus R^0]_c = \bar{P}_D \setminus R^0$. Рассмотрим $[Q^*]_c^0$. Ясно, что $[Q^*]_c^0 = [Q^0 \cup (\bar{P}_D \setminus R^0)]_c^0$; с-подстановка пар из $(\bar{P}_D \setminus R^0)^0$ в Q^0 невозможна (по определению с-подстановки), с-переименование переменных и с-подстановка из Q^0 в $(\bar{P}_D \setminus R^0)^0$ не дает пары вида $(0, 0)$, поскольку в $(\bar{P}_D \setminus R^0)^0$ нет пар вида $(g, 0)$, где $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$. Таким образом, $[Q^*]_c^0 = [Q^0]_c \cup [(\bar{P}_D \setminus R^0)^0]_c$. Поскольку $(Q^* \setminus Q^{*0})_c^{(1)} \supseteq P_D$, то с-подстановка пар из Q в $(h, T) \in (\bar{P}_D \setminus R^0) \cap \bar{P}_D$, где $T > 0$ дает пару из $\bar{P}_D$ с задержкой, большей нуля. С-подстановка пар из множества $\{(h, T) : h \in P_D, T \in \mathbb{N}\}$ возможна в Q при условии, что $h(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, и дает пару $(0, T')$, где $T' > 0$. Однако, по определению Q , при некотором $T' > 0$, имеем $(0, T') \in Q$. Таким образом, $[Q^*]_c = Q^*$.

Поскольку $Q^{(1)} \neq P_2$, то $Q^{*(1)} \neq P_\Sigma$.

Докажем, что $[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_\Sigma$ при $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$. Поскольку справедливо включение $(f, t) \in \bar{P}_\Sigma \setminus Q^*$, то либо $(f, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$, либо $(f, t) = (0, 0)$. Однако, в силу строения Q имеем $(0, 0) \in \bar{P}_2 \setminus Q$. Следовательно, в силу ϕ -предполноты Q в $\bar{P}_2$ (см. [1])

$$[Q^* \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = [Q \cup \{(f, t)\} \cup (\bar{P}_D \setminus R^0)]_c^{(1)} \supseteq (P_2 \cup P_D) = P_\Sigma.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. Класс $\bar{\mathcal{M}}_E$ является ϕ -предполным в $\bar{P}_\Sigma$.

Доказательство. Покажем, что $\bar{\mathcal{M}}_E$ с-замкнуто, $\mathcal{M}_E$ отлично от P_Σ и $\bar{\mathcal{M}}_E$ ϕ -полно при добавлении любой пары из $\bar{P}_\Sigma \setminus \bar{\mathcal{M}}_E$.

С-замкнутость $\bar{\mathcal{M}}_E$ следует из того, что $[\bar{P}_2]_c = \bar{P}_2$ и

$$\{(3, t) : t \in \mathbb{N}_0\}_c = \{(3, t), t \in \mathbb{N}_0\}.$$

С-подстановка пар из $\bar{P}_2$ в $\{(3, t), t \in \mathbb{N}_0\}$ дает множество $\{(3, t) : t \in \mathbb{N}_0\}$, пары из которого, в свою очередь с-подставляя нельзя по определению с-суперпозиции.

Поскольку $(g, T) \in \bar{P}_\Sigma$, где $g \in P_D$ и $g \notin \{0, 3\}$, и пара $(g, T) \notin \bar{\mathcal{M}}_E$, имеем $\mathcal{M}_E \neq P_\Sigma$.

ϕ -полнота $\bar{\mathcal{M}}_E$ при добавлении любой пары $(f, T) \in \bar{P}_\Sigma \setminus \bar{\mathcal{M}}_E$ следует из теоремы 2.

Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\tilde{K}$ ϕ -полно. Следовательно, в силу ϕ -предполноты оно не является подмножеством ни одного из классов системы $\tilde{\mathcal{L}} \cup \{\bar{\mathcal{M}}_E\}$.

Пусть $\tilde{K}$ не лежит ни в одном из ϕ -предполных классов системы $\tilde{\mathcal{L}} \cup \{\bar{\mathcal{M}}_E\}$.

Пусть $Q^* \in \tilde{\mathcal{L}}$ и $(f_{Q^*}, t) \notin Q^*$. Рассмотрим множество F пар (f, t) таких, что $(f_{Q^*}, t) \notin Q^*$ для всех $Q^* \in \tilde{\mathcal{L}}$, которое в силу ϕ -предполноты классов Q^*

из $\tilde{\mathcal{L}}$ не пусто. В силу строения F для всякого $Q^* \in \tilde{\mathcal{L}}$ имеем $(f_{Q^*}, t) \in \bar{P}_2 \setminus Q$. Таким образом, F не является подмножеством ни одного из ϕ -предполных в $\bar{P}_2$ множеств системы $\mathcal{L}$, и, следовательно, по критерию ϕ -полноты в $\bar{P}_2$ [2], множество F является ϕ -полным в $\bar{P}_2$, а значит, $[F]_c \supseteq \tilde{R}_t$.

Рассмотрим пару $(f, t) \notin \overline{\mathcal{M}}_E$. Ясно, что для $Q' \in \tilde{\mathcal{L}} \cup \{\overline{\mathcal{M}}_E\}$ выполнено соотношение $F \cup \{(f, t)\} \notin Q'$, и, следовательно, по теореме 2 с учетом включения $[\tilde{R}_t \cup \{(f, t)\}]_c \supseteq [F \cup \{(f, t)\}]_c$ имеем

$$F \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} \subseteq [\tilde{R}_t \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_\Sigma,$$

причем $[F \cup \{(f, t)\}]_c^{(1)} = P_\Sigma$. Таким образом, $\tilde{K} = F \cup \{(f, t)\}$ ϕ -полно.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б. *Функциональные системы*. Изд-во МГУ, Москва, 1982.
2. Кудрявцев В. Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. *Проблемы кибернетики* (1962) 8, 91–115.
3. Волкова Е. Н., Ильченко Н. В. Критерий полноты для двух систем функций с задержками. В сб.: *Логико-алгебраические конструкции*. Тверь, 1992.
4. Яблонский С. В., Гаврилов П. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
5. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 28.01.93.