Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Основные отношения S -классификации функций многозначной логики, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 99–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:08:23

Основные отношения S -классификации функций многозначной логики

© 1996 г. С. С. Марченков

На множестве функций многозначной логики S -замыкание определяется как замыкание относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям. Для описания S -замкнутых классов, лежащих в S -предполном классе идемпотентных функций, определяются некоторые стандартные отношения, называемые основными. Доказывается, что всякий S -замкнутый класс идемпотентных функций, задаваемый произвольными двуместными отношениями, можно определить также подходящими основными отношениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 93-011-1525 и 95-01-01625а.

Пусть P_k обозначает множество всех функций k -значной логики [1, 2]. Известно, что число замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов в P_k счетно при $k = 2$ [3-5] и континуально при $k \geq 3$ [6]. Чтобы получить при $k \geq 3$ обозримую классификацию функций из P_k , представляется довольно естественным расширить оператор замыкания, основанный на суперпозиции, добавлением новых порождающих операций. Некоторые подходы, применявшиеся в этом направлении, изложены в работах [7-15].

В конце 70-х — начале 80-х годов была выполнена клоновая классификация конечных однородных алгебр [16-19] и конечных алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов [20]. Идеи и методы, применявшиеся в этой классификации, позволяли с большой уверенностью предполагать, что при $k \geq 3$ эффективную классификацию функций из P_k можно получить, если наряду с операцией суперпозиции использовать операции перехода к двойственным функциям, рассматривая двойственность относительно подстановок из достаточно широкой подгруппы симметрической группы $\mathfrak{S}_k$. Прежде всего, разумеется, следовало изучить случай всей группы $\mathfrak{S}_k$. Для соответствующих замкнутых классов и классификации было предложено несколько названий; мы называем их S -замкнутыми классами и S -классификацией.

Нгуен Ван Хоа [21] нашел все 52 S -замкнутых класса в P_3 , а в [22] доказал, что при $k \geq 5$ существует ровно два S -предполных класса в P_k : класс I_k идемпотентных функций (в [22] он имеет обозначение P_k^α) и класс SLP_k Слупецкого. При $k = 4$ к этим двум S -предполным классам добавляются еще два: класс QL_4 квазилинейных функций и класс K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна. Там же, в [22], доказана конечность числа всех S -замкнутых классов, лежащих в SLP_k , и получено их описание.

Используя приемы из [22] (либо разработанную ниже технику отношений), можно показать, что единственными S -предполными в K_4 классами являются классы $K_4 \cap I_4$ и $K_4 \cap QL_4$. Таким образом, для построения при $k \geq 4$ S -классификации функций из P_k достаточно описать все S -замкнутые классы, лежащие в I_k и (при $k = 4$) в QL_4 . Задача определения всех S -замкнутых классов из QL_4 представляется не слишком сложной. Как можно увидеть из дальнейшего, основные трудности S -классификации сосредоточены в классе I_k .

В отличие от работ [17, 19, 21, 22], где преобладает функциональный подход, в данной работе для определения S -замкнутых классов из P_k применяются чисто логические средства. Именно, теория Галуа для алгебр Поста [23] позволяет свести вопрос об описании всех замкнутых классов функций к вопросу об описании всех множеств отношений, замкнутых относительно некоторых логических операций. При этом S -замкнутым классам функций отвечают S -замкнутые классы отношений (соответствующие определения приведены ниже).

Класс I_k состоит из всех функций $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, удовлетворяющих тождеству $f(x, \dots, x) = x$. Его можно определить также как класс всех функций из P_k , сохраняющих отношения $x = 0, \dots, x = k-1$. Поэтому согласно [23] каждому S -замкнутому классу идемпотентных функций однозначным образом отвечает S -замкнутый класс отношений, содержащий отношение $x = 0$. Для всякого k мы определяем конечное множество стандартных отношений, которые называем основными. Как будет доказано, всякий S -замкнутый класс идемпотентных функций из P_k можно задать (в смысле функтора Pol [23]) подходящим набором основных отношений, содержащим отношения $x = 0, \dots, x = k-1$. Тем самым будет получено эффективное описание всех S -замкнутых классов функций из I_k ¹.

Цель настоящей работы — доказать сформулированное утверждение для базового случая, когда S -замкнутый класс идемпотентных функций определяется не более чем двуместными отношениями. Иными словами, в работе логическими средствами будет выполнена редукция произвольных, не более чем двуместных отношений к основным отношениям.

Напомним некоторые понятия. Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех конечноместных функций на E_k . Для любых $n, n \geq 1$, и $i, 1 \leq i \leq n$, функции

$$e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$$

называются селекторными. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и π — подстановка на E_k , то функция

$$f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$$

называется двойственной к f относительно подстановки π . На множестве P_k предполагается заданная операция суперпозиции [1,2]. Если $F \subseteq P_k$, то через $[F]$ обозначается замыкание множества F относительно операции суперпозиции. Множества вида $[F]$ называются замкнутыми классами. Замкнутый класс называем S -замкнутым, если вместе с любой функцией f ему принадлежат также все двойственные функции f^π .

Наряду с функциями на E_k рассматриваем также отношения на E_k . Совокупность всех отношений на E_k обозначим через P_k . Если $\rho(x_1, \dots, x_m), \sigma(x_1, \dots, x_n)$

¹После того, как настоящая статья была сдана в редакцию, появилась публикация Нгуен Ван Хоа [27], в которой в духе работ [17–20] приводится при $k \geq 4$ описание всех S -замкнутых классов в P_k , не содержащих констант.

— отношения из Π_k , то конъюнкцией отношений ρ, σ называем $(m+n)$ -местное отношение

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i называется $(m-1)$ -местное отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m).$$

Если $\rho \in \Pi_k$, π — подстановка на E_k , то отношение

$$\rho^\pi(x_1, \dots, x_m) \equiv \rho(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$$

называем двойственным к ρ относительно подстановки π . Диагоналями называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Если $R \subseteq \Pi_k$, то через $[R]_S$ обозначаем множество всех отношений из Π_k , которые можно получить из отношений R и диагоналей с помощью операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных, а также с помощью операции перехода к (любым) двойственным отношениям. Множества вида $[R]_S$ называем S -замкнутым. Если $[R]_S = [Q]_S$, то множества R, Q называем S -эквивалентными.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$, $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$. Говорят, что функция f сохраняет отношение ρ , если для любых n наборов

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn}),$$

удовлетворяющих отношению ρ , набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

также удовлетворяет отношению ρ . Множество всех функций из P_k , сохраняющих отношение ρ , обозначим через $\text{Pol } \rho$, а множество всех отношений из Π_k , которые сохраняет функция f , через $\text{Inv } f$. Нетрудно видеть, что для любых функций f и отношения ρ множество $\text{Pol } \rho$ является замкнутым классом функций, содержащим все селекторные функции, а множество $\text{Inv } f$ замкнутым классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространяются на все подмножества из Π_k и P_k : если $R \subseteq \Pi_k$ и $F \subseteq P_k$, то

$$\text{Pol } R = \bigcap_{\rho \in R} \text{Pol } \rho, \quad \text{Inv } F = \bigcap_{f \in F} \text{Inv } f.$$

Отображения Pol и Inv определяют соответствия Галуа [24, 25] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств из P_k и всех подмножеств из Π_k . При этом Галуа-замкнутыми множествами являются замкнутые классы функций из P_k , содержащие все селекторные функции, и замкнутые классы отношений из Π_k , содержащие все диагонали [23]. Нетрудно также видеть, что S -замкнутым классам функций будут отвечать S -замкнутые классы отношений и, наоборот, S -замкнутым классам отношений отвечают S -замкнутые классы функций.

Таблица 1.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Тождественно истинное отношение будем называть также полным отношением, а тождественно ложное пустым. Если π — подстановка, то отношение $\pi(x_1) = x_2$ называется графиком подстановки π . Через $|E|$ обозначаем число элементов множества E .

Следующие отношения называем основными:

- (1) $x \in E_i, 1 \leq i \leq k$.
- (2) $\mu_k^i(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& (x_2 \in E_2) \& (x_1 \neq x_2) \vee (x_1, x_2 \in \{2, 3, \dots, i-1\}) \& (x_1 = x_2), k \geq 3, 2 \leq i \leq k$.
- (3) $\nu_k^i(x_1, x_2) \equiv (x_1 = 0) \& (x_2 = 1) \vee (x_1, x_2 \in \{2, 3, \dots, i\}) \& (x_1 = x_2), k \geq 3, 2 \leq i \leq k-1$.
- (4) $\eta_k^i(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3) \& (x_1 + 1 = x_2) \vee (x_1, x_2 \in \{3, 4, \dots, i-1\}) \& (x_1 = x_2)$, где сложение рассматривается по модулю 3, $k \geq 3, 3 \leq i \leq k$.
- (5) $\theta_k(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& (x_1 + 1 = x_2) \vee (x_1, x_2 \in \{3, 4, \dots, k-1\}) \& (x_1 = x_2), k \geq 3$.
- (6) $\kappa_k(x_1, x_2) \equiv ((x_1 \in E_2) \& (x_2 \in E_2) \vee (x_1 \in \{2, 3\}) \& (x_2 \in \{2, 3\})) \& (x_1 \neq x_2), k \geq 4$.
- (7) $\zeta_{2k}(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2, \dots, 2k-2\}) \& (x_1 + 1 = x_2), k \geq 2$.
- (8) $\chi_k^i(x_1, x_2) \equiv (x_1 = 0) \& (x_2 \in E_i) \vee (x_1 = x_2 = i-1), k \geq 3, 2 \leq i \leq k$.
- (9) $\lambda_k(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \in E_2) \& (x_2 \in E_2) \& (x_3 \in E_2) \& (x_1 + x_2 + x_3 = 0)$, где сложение рассматривается по модулю 2, $k \geq 3$.
- (10) $\kappa_4^1(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_3) \& \kappa_4(x_1, x_2)$.
- (11) 11. $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, где $+$ обозначает сложение в поле $\text{GF}(4)$ и задается таблицей 1.

На рис. 1 отношения $\mu_k^i, \nu_k^i, \eta_k^i, \theta_k, \kappa_k, \zeta_{2k}, \chi_k^i, \kappa_4^1$ изображены в виде двудольных графов, ребра которых соответствуют наборам, удовлетворяющим данным отношениям.

В леммах 1–3 на языке отношений отражены следующие хорошо известные факты [26]: группа всех подстановок на E_k порождается всеми подстановками,

Рис. 1.

сопряженными с произвольной нечетной подстановкой; группа всех четных подстановок на E_k порождается всеми подстановками, сопряженными с произвольной четной подстановкой, не входящей (при $k = 4$) в четверную группу Клейна; четверная группа Клейна порождается всеми подстановками, сопряженными с произвольной неединичной подстановкой из этой группы.

Лемма 1. Пусть $k \geq 3$, $2 \leq i \leq k$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k , имеющее вид

$$(x_1 \in E) \& (\pi(x_1) = x_2), \quad (1)$$

где $|E| = i$, π — подстановка на E_k , $\pi(E) = E$ и ограничение π на множество E является нечетной подстановкой. Тогда множество $[\{\rho\}]_S$ содержит все отношения вида

$$(x_1 \in F) \& (\varphi(x_1) = x_2), \quad (2)$$

где $|F| = i$, φ — подстановка на E_k и $\varphi(F) = F$.

Лемма 2. Пусть $k \geq 3$, $3 \leq i \leq k$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (1), где $|E| = i$, π — подстановка на E_k , $\pi(E) = E$ и ограничение π на множество E является нетождественной четной подстановкой, не принадлежащей (при $k = 4$) четверной группе Клейна. Тогда множество $\{[\rho]\}_S$ содержит все отношения вида (2), где $|F| = i$, $\varphi(F) = F$ и ограничение φ на F является четной подстановкой.

Лемма 3. Пусть $k \geq 4$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (1), где $|E| = 4$, π — подстановка на E_k , $\pi(E) = E$ и ограничение π на множество E является нетождественной подстановкой из четверной группы Клейна. Тогда множество $\{[\rho]\}_S$ содержит все отношения вида (2), где $|F| = 4$, $\varphi(F) = F$ и ограничение φ на F принадлежит четверной группе Клейна.

Заметим, что условиям леммы 1 удовлетворяют отношения μ_k^i , условиям леммы 2 — отношения η_k^i , условиям леммы 3 — отношения κ_k .

Лемма 4. Множество $\{[\nu_k^i]\}_S$ содержит все отношения вида (1), где $|E| = i$ и π — подстановка на E_k .

Доказательство. Отношению ν_k^i , как нетрудно видеть, двойственны отношения $\sigma_1(x_1, x_2), \sigma_2(x_1, x_2)$ (см. рис. 2). Полагая

$$\sigma_3(x_1, x_2) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\nu_k^i(x_1, y_1) \& \sigma_1(y_1, y_2) \& \sigma_2(y_2, x_2)),$$

убеждаемся, что отношение σ_3 удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, если согласно лемме 1 взять в множестве $\{[\sigma_3]\}_S$ все отношения $\rho_1(x_1, x_2)$ вида (1), где $E = E_{i+1} \setminus \{1\}$ и $\pi(E) = E$, то с помощью формулы

$$\rho_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_1(x_1, y) \& \nu_k^i(y, x_2))$$

получим все отношения вида (2), где $F = E_{i+1} \setminus \{1\}$ и $\varphi(F) = E_{i+1} \setminus \{0\}$. Переход к двойственным отношениям дает все отношения вида (2), где $|F| = i$ и $\varphi(F)$ отличается от F ровно двумя элементами.

Продолжая по индукции, предположим, что уже построены все отношения вида (2), где $|F| = i$ и $\varphi(F)$ отличается от F ровно $2m$ элементами. И пусть отношение $\rho_3(x_1, x_2)$ имеет вид (2), где $|F| = i$ и множества $\varphi(F), F$ отличаются $2(m+1)$ элементами. Возьмем элементы a из $F \setminus \varphi(F)$, b из $\varphi(F) \setminus F$ и согласно индуктивному предположению построим такие отношения $\rho_4(x_1, x_2), \rho_5(x_1, x_2)$, что

$$\rho_4(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in F) \& (\varphi_1(x_1) = x_2),$$

$$\rho_5(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in (F \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \& (\varphi_2(x_1) = x_2),$$

где φ_1, φ_2 — подстановки на E_k ,

$$\varphi_1(F) = (F \setminus \{a\}) \cup \{b\}, \quad \varphi_2((F \setminus \{a\}) \cup \{b\}) = \varphi(F)$$

и на множестве F подстановки φ и $\varphi_2\varphi_1$ совпадают. Тогда

$$\rho_3(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_4(x_1, y) \& \rho_5(y, x_2)).$$

Лемма доказана.

Рис. 2.

Аналогично лемме 4 доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. Множество $\{\theta_k^i\}_S$ содержит все отношения вида (1), где $|E| = k - 1$ и π — четная подстановка на E_k .

Лемма 6. Пусть $k \geq 3$, $2 \leq i \leq k - 1$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (1), где $|E| = i$ и π — подстановка на E_k . Если $\pi(E) \neq E$ и выполняется одно из условий:

- (1) $E \cup \pi(E) \neq E_k$,
- (2) $1 \leq |E \cap \pi(E)| < k - 2$,
- (3) $|E \cap \pi(E)| = k - 2$ и π — нечетная подстановка на E_k ,

то $\nu_k^i \in \{\{\rho\}\}_S$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1 и $a \in \pi(E) \setminus E$, $b \notin E \cup \pi(E)$. Рассмотрим отношение $\rho_1(x_1, x_2)$, двойственное к ρ относительно транспозиции элементов a, b . Если $c = \pi^{-1}(a)$, то отношение ρ_1 отличается от отношения ρ только тем, что вместо набора (c, a) отношению ρ_1 удовлетворяет набор (c, b) . Следовательно, отношение

$$(\exists y)(\rho(y, x_1) \& \rho_1(y, x_2))$$

будет двойственно отношению ν_k^i .

Предположим, что $E \cup \pi(E) = E_k$ и выполняется условие 2. Так как $\pi(E) \neq E$, то $|E| < k - 1$. Пусть поэтому a, b — различные элементы из $E_k \setminus E$, а отношение $\rho_2(x_1, x_2)$ двойственно к ρ относительно транспозиции элементов a, b . Так как $E \cup \pi(E) = E_k$, то $\{a, b\} \subseteq \pi(E)$. Значит отношение

$$(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_2(x_2, y))$$

будет удовлетворять условиям леммы 1. Используя отношения ρ_3 , даваемые леммой 1, по формуле

$$(\exists y)(\rho_3(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$$

получаем все отношения вида (2), где $F = E$ и $\varphi(F) = \pi(E)$. Если теперь элементы $d \in E \setminus \pi(E)$, $e \in E \cap \pi(E)$, то двойственность относительно транспозиции элементов d, e дает из этих отношений все отношения вида (2), где $F = E$ и φ — подстановка на E_k , отображающая E на $(\pi(E) \setminus \{e\}) \cup \{d\}$. Выберем в последнем множестве такое отношение $\rho_4(x_1, x_2)$, чтобы для соответствующей ему подстановки φ равенство $\varphi(x_1) = \pi(x_1)$ выполнялось для всех x_1 из E , для которых $\pi(x_1) \neq e$. Тогда отношение

$$(\exists y)(\rho(y, x_1) \& \rho_4(y, x_2))$$

будет двойственно отношению ν_k^i .

Пусть для отношения ρ выполняется условие 3. Из соотношений

$$\pi(E) \neq E, \quad |E \cap \pi(E)| = k - 2$$

следует, что $|E| = k - 1$. Путем перехода к двойственному отношению добьемся того, что $E = E_{k-1}$ и $\pi(E_{k-1}) = \{1, 2, \dots, k - 1\}$ (подстановка π при переходе к двойственному отношению трансформируется в сопряженную и остается нечетной).

Рассмотрим разложение подстановки π на циклы и возьмем цикл $(0j_1 \dots j_m)$, содержащий элемент 0. Так как $0 \notin \pi(E_{k-1})$, то $m \geq 1$ и $j_m = k - 1$. Далее исследуем две возможности: $m = 1$ и $m \geq 2$.

Пусть $m = 1$. Тогда $\pi(0) = k - 1$ и $\pi(k - 1) = 0$. Обозначим через τ ограничение подстановки π на множество $\{1, 2, \dots, k - 2\}$. Если τ — тождественная подстановка, то отношение ρ двойственно отношению ν_k^{k-1} . Предполагая далее, что τ нетождественна, разберем сначала случай, когда τ^2 также не является тождественной подстановкой. Пусть тогда отношение $\rho_5(x_1, x_2)$ двойственно к ρ относительно транспозиции элементов 0, $k - 1$. Положим

$$\rho_6(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_5(y, x_2)).$$

Тогда отношение ρ_6 имеет вид (2), где $F = E_{k-1}$, $\varphi(F) = F$, $\varphi(0) = 0$ и ограничение φ на множество $\{1, 2, \dots, k - 2\}$ совпадает с подстановкой τ^2 . Очевидно, что подстановка τ^2 четна. Так как τ^2 отлична от тождественной подстановки, то (при $k = 6$) она не входит в четверную группу Клейна. Поэтому в силу леммы 2 из отношения ρ_6 можно получить отношение ρ_7 вида (2), где $F = E_{k-1}$, $\varphi(F) = F$, $\varphi(0) = 0$ и ограничение φ на множество $\{1, 2, \dots, k - 2\}$ совпадает с подстановкой τ^{-1} (подстановка τ^{-1} вместе с подстановкой τ четна, поскольку τ есть произведение τ и транспозиции элементов 0, $k - 1$). Теперь отношение

$$(\exists y)(\rho_7(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$$

будет двойственно отношению ν_k^{k-1} .

Пусть τ^2 есть тождественная подстановка. Тогда в разложении τ в произведение циклов помимо циклов длины 1 имеется еще четное число циклов длины 2. Для дальнейших построений достаточно выделить два цикла длины 2. Пусть,

Рис. 3.

Рис. 4.

например, это будут циклы (12) и (34). Определим отношения ρ_8, ρ_9 , двойственные к отношению ρ (см. рис. 3, где указаны лишь элементы множества $E_5 \cup \{k-1\}$, вне этого множества все три отношения совпадают). Положим

$$\rho_{10}(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_8(x_1, y) \& \rho_9(y, x_2)).$$

Если у подстановки τ имеется только два цикла длины 2, то отношение

$$\rho_{11}(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_{10}(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$$

двойственно отношению ν_k^{k-1} . В противном случае вместо отношения ρ следует взять отношение ρ_{11} и повторить описанную выше процедуру.

Пусть $m \geq 2$. Рассмотрим отношение ρ_{12} , двойственное к ρ относительно транспозиции элементов $0, j_1$, и положим

$$\rho_{13}(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(y, x_1) \& \rho_{12}(y, x_2)).$$

Тогда отношение ρ_{13} двойственно отношению θ_k . По лемме 5 через отношение θ_k определяем такое отношение ρ_{14} , чтобы оно имело вид (2), где $F = \{1, 2, \dots, k-1\}$, φ — четная подстановка на E_k и $\varphi\pi$ является транспозицией элементов $0, k-1$. Такое отношение

$$(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_{14}(y, x_2))$$

будет двойственно отношению ν_k^{k-1} . Лемма доказана.

Аналогично лемме 6 доказывается следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть $k \geq 3$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (1), где $|E| = k-1$, π — четная подстановка на E_k , не входящая при $k=4$ в четверную группу Клейна и $\pi(E) \neq E$. Тогда $\theta_k \in [\{\rho\}]_S$.

Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 8. Пусть $k \geq 2$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_{2k} вида (1), где $|E| = k$ и $\pi(E) \cap E = \emptyset$. Тогда отношение ρ двойственно отношению ζ_{2k} .

Лемма 9. Пусть $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_4 вида (1), где $|E| = 3$ и π — нетождественная подстановка из четверной группы Клейна. Тогда ρ двойственно отношению χ_4^1 .

Итог леммам 1–9 подводит следующее утверждение.

Лемма 10. Пусть $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (1). Тогда отношение ρ S -эквивалентно одному из основных отношений.

Лемма 11. Пусть отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_k имеет вид

$$(x_1 = a_2) \& (x_2 \in \{b_1, b_2\}) \vee (x_1 = a_2) \& (x_2 = b_2), \quad (3)$$

где $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$. Тогда $\chi_k^2 \in [\{\rho\}]_S$. Если $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$, то $\mu_k^2 \in [\{\rho\}]_S$; если $k=3$, $\{b_1, b_2\} \neq \{a_1, a_2\}$ и $b_1 = a_2$ или $b_2 = a_1$, то $\theta_3 \in [\{\rho\}]_S$; если $k=4$ и $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$, то $\zeta_4 \in [\{\rho\}]_S$. В остальных случаях, если $(b_1, b_2) \neq (a_1, a_2)$, то $\nu_k^2 \in [\{\rho\}]_S$.

Доказательство. Если $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$, то отношение ρ двойственно отношению χ_k^2 . Если $(b_1, b_2) = (a_2, a_1)$, то возьмем отношение ρ_1 , двойственное к ρ (см. рис. 5), и положим

$$\rho_2(x_1, x_2) \equiv \rho(x_1, x_2) \& \rho_1(x_1, x_2).$$

Отношение ρ_2 , очевидно, двойственно отношению μ_k^2 . Далее с помощью формулы

$$(\exists y)(\rho_2(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$$

приходим к отношению, двойственному к χ_k^2 .

Пусть $\{b_1, b_2\} \neq \{a_1, a_2\}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$.

Рис. 5.

Если $b_1 = a_1$ (и, следовательно, $b_2 \notin \{a_1, a_2\}$), то возьмем отношение ρ_3 , двойственное к $\rho(x_1, x_2)$, и положим

$$\rho_4(x_1, x_2) \equiv \rho(x_1, x_2) \& \rho_3(x_1, x_2).$$

Тогда отношение ρ_4 двойственно отношению ν_k^2 . Отношение, двойственное к χ_k^2 , получаем из отношений ρ и ρ_4 :

$$(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_4(x_2, y)).$$

Случай $b_2 = a_2$ сводится к предыдущему перестановкой переменных x_1, x_2 .

Пусть $b_1 = a_2$. Определим отношение ρ_5 , двойственное к отношению ρ . Далее образуем отношение

$$\rho_6(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_5(y, x_2)),$$

двойственное ему отношение ρ_7 и отношение

$$\rho_8(x_1, x_2) \equiv \rho(x_1, x_2) \& \rho_7(x_1, x_2).$$

Отношение $(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_8(x_2, y))$ будет двойственно отношению χ_k^2 . Кроме того, при $k \geq 4$ по лемме 6 получаем, что $\nu_k^2 \in [\{\rho_8\}]_S$, а при $k = 3$ по лемме 7 $\theta_3 \in [\{\rho_8\}]_S$.

Пусть $b_2 = a_1$. Если взять отношение ρ_9 , двойственное к отношению ρ , то отношение

$$(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_9(y, x_2))$$

будет двойственно отношению ρ в случае $b_1 = a_2$.

Предположим теперь, что $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$. Тогда $k \geq 4$. Рассмотрим отношение ρ_{10} , двойственное к ρ , и определим отношение

$$\rho_{11}(x_1, x_2) \equiv \rho(x_1, x_2) \& \rho_{10}(x_1, x_2).$$

Отношение $(\exists y)(\rho(x_1, y) \& \rho_{11}(x_2, y))$ будет двойственно отношению χ_k^2 . При $k \geq 5$ по лемме 6 из отношения ρ_{11} получаем отношение ν_k^2 . При $k = 4$ отношение ρ_{11} двойственно отношению ζ_4 . Лемма доказана.

На основе леммы 11 несложно доказывается следующее утверждение.

Лемма 12. Пусть $k \geq 3$, $\rho(x_1, x_2)$ — отношение на E_k вида (3), не двойственное отношению χ_k^2 . Тогда существует такое отношение σ из числа $\mu_k^2, \nu_k^2, \theta_3, \zeta_4$, что отношение ρ S -эквивалентно множеству $\{\sigma, \chi_k^2\}$.

Лемма 13. Пусть отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_k имеет вид

$$(x_1 \in E) \& (x_2 \in F) \& (x_1 = a \vee x_2 = b), \quad (4)$$

где $E \subseteq E_k, F \subseteq E_k, a \in E, b \in F$. Если

$$i = \min(|E|, |F|) \geq 2, \quad j = \max(|E|, |F|),$$

то при $3 \leq j < k$ отношение ρ S -эквивалентно отношению χ_k^i , а при $j = k$ — множеству $\{x \in E_i, \chi_k^k\}$.

Доказательство. Будем считать для определенности, что $i = |E|, j = |F|$. Предположим сначала, что $3 \leq j < k$. Так как $2 \leq i \leq j < k$ и

$$(x_1 \in E) \equiv (\exists x_2) \rho(x_1, x_2),$$

нетрудно видеть, что $(x \in E_2) \in \{\{\rho\}\}_S$. В силу неравенства $3 \leq j < k$ можно выбрать такие элементы $c \in E$ и $d \in F$, что в соответствии с леммой 11 множество $\{\{\rho_1\}\}_S$, где

$$\rho_1(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{a, c\}) \& (x_2 \in \{b, d\}) \& \rho(x_1, x_2),$$

будет содержать отношение ν_k^2 . Взяв в множестве $\{\{\nu_k^2\}\}_S$ отношение

$$\rho_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 = d) \& (x_2 = a) \vee (x_1 = b) \& (x_2 = c),$$

получим отношение $(\exists y)(\rho_2(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$, двойственное отношению χ_k^i .

Построим теперь из отношения χ_k^2 отношение ρ . Если отношение $\rho_3(x_1, x_2)$ двойственно χ_k^j относительно транспозиции элементов 0, 1, то в силу неравенства $j \geq 3$ отношение $\chi_k^j(x_1, x_2) \& \rho_3(x_2, x_1)$ будет двойственно отношению ν_k^2 .

Так как $|E| \leq |F|$ и $j < k$, то в множестве $\{\{\chi_k^j\}\}_S$ есть отношение $x \in E_i$ и, следовательно, отношение

$$(x_2 \in \{0, 1, \dots, i-2, j-1\}) \& \chi_k^j(x_1, x_2),$$

которое двойственно отношению χ_k^i . Пусть $c \in E, c \neq a, d \in F, d \neq b$. Возьмем отношение ρ_4 , двойственное χ_k^i , отношение ρ_5 , двойственное χ_k^j , и отношение ρ_2 из множества $\{\{\nu_k^2\}\}_S$ (см. рис. 6). Тогда

$$(\exists y_1)(\exists y_2)(\rho_4(y_1, x_1) \& \rho_2(y_2, y_1) \& \rho_5(y_2, x_2)) \equiv \rho(x_1, x_2).$$

Предположим далее, что $j = k$, т. е. $F = E_k$. Анализ случая $j < k$ показывает, что для доказательства леммы достаточно получить лишь отношение $x \in E_2$.

Рис. 6.

При $E \neq E_k$ это сделано выше. Пусть $E = E_k$. Если $a \neq b$, то возьмем отношение ρ_6 , двойственное ρ относительно транспозиции (a, b) . Тогда

$$\rho(x_1, x_2) \& \rho_6(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2 \in \{a, b\}) \& (x_1 = x_2).$$

Из этого отношения очевидным образом получаем отношение $x \in E_2$. Если же $a = b$, то пусть $c \neq a$ и ρ_7 двойственно ρ относительно транспозиции (ac) . Тогда

$$\rho(x_1, x_2) \& \rho_7(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2 \in \{a, c\}) \& (x_1 \neq x_2).$$

Лемма доказана.

Из лемм 12, 13 вытекает следующее утверждение.

Лемма 14. Пусть отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_k имеет вид (4). Тогда ρ S-эквивалентно одному или двум основным отношениям.

Лемма 15. Пусть отношение на E_k имеет вид

$$(x_1 = a_1) \& (x_2 \in \{b_1, b_2\}) \vee (x_1 = a_2) \& (x_2 = b_3),$$

где элементы каждого из множеств $\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2, b_3\}$ попарно различны. Тогда $\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{\rho\}]_S$.

Доказательство. Множеству $[\{\rho\}]_S$, очевидно, принадлежит отношение $x \in E_2$. Положим

$$\rho_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(y, x_1) \& \rho(y, x_2)).$$

В силу соображений двойственности можно считать, что $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$. Из отношения ρ_1 образуем двойственное отношение ρ_2 и отношение

$$\rho_3(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_1(x_1, y) \& \rho_2(y, x_2)).$$

Замечаем, что отношение $\rho_3(x_1, x_2)$ отличается от отношения $(x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3)$ только набором $(2, 0)$, который не удовлетворяет отношению ρ_3 . Путем перехода к двойственному отношению из отношения ρ_3 можно получить любое аналогичное отношение, которое отличается от отношения $(x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3)$ одним

набором (a, b) , где $a \neq b$. Конъюнкция таких отношений позволяет удалить из отношения $(x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3)$ любое число наборов вида (a, b) , где $a \neq b$. В частности, таким образом получаем отношение ρ_4 и отношение ρ_5 . Отношение ρ_4 приводит к отношению χ_k^3 :

$$\chi_k^3(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2\}) \& \rho_4(x_1, x_2).$$

Из отношения ρ_5 аналогичным образом получаем отношение ρ_6 . Отношение $\rho_7(x_1, x_2)$ двойственно отношению

$$(x_2 \in \{1, 2\}) \& \rho_6(x_1, x_2).$$

Положим далее

$$\begin{aligned}\rho_8(x_1, x_2) &\equiv (\exists y)(\rho_7(x_1, y) \& \rho_6(y, x_2)), \\ \rho_{10}(x_1, x_2) &\equiv (\exists y)(\rho_8(y, x_1) \& \rho_9(y, x_2)),\end{aligned}$$

где отношение ρ_9 двойственно отношению ρ_6 . Возьмем отношение ρ_{11} , двойственное отношению ρ_2 , и образуем отношение ρ_{12} :

$$\rho_{12}(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_{11}(x_1, y) \& \rho_{10}(y, x_2)).$$

Как видно, отношение ρ_{12} отличается от отношения $(x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3)$ только набором $(1, 1)$, который не удовлетворяет отношению ρ_{12} . Следовательно, из отношения ρ_{12} переходом к двойственному отношению можно получить два других отношения, которые в этом смысле отвечают наборам $(0, 0)$ и $(2, 2)$.

Учитывая свойство отношения ρ_3 , приходим к выводу, что $[\{\rho\}]_S$ содержит все 9 отношений, которые отличаются от отношения $(x_1 \in E_3) \& (x_2 \in E_3)$ только одним набором. Значит, так же, как были получены отношения ρ_4, ρ_5 , получаем отношения ρ_{13} и ρ_{14} . Добавим к ним еще отношение ρ_{15} , которое двойственно отношению ρ_6 . Полагая теперь

$$\rho_{16}(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\rho_{13}(x_1, y) \& \rho_{14}(x_2, y) \& \rho_{15}(x_3, y)),$$

убеждаемся в том, что отношению ρ_{16} удовлетворяют лишь наборы $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$. Поэтому

$$\lambda_k(x_1, x_2, x_3) \equiv \rho_{16}(x_1, x_2, x_3) \& \rho_{16}(x_1, x_3, x_2) \& \rho_{16}(x_2, x_3, x_1).$$

Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_k не имеет вида (1), (4) или

$$(x_1 \in E) \& (x_2 \in F), \quad (5)$$

где E, F — подмножества множества E_k . Тогда $\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{x \in E_3, \rho\}]_S$ при $k \geq 4$ и $\{\lambda_3, \chi_3^3\} \subset [\{x \in E_2, \rho\}]_S$ при $k = 3$.

Рис. 7.

Доказательство. Положим $E = \{a: \rho(a, x_2) \text{ непусто}\}$, $F = \{b: \rho(x_1, b) \text{ непусто}\}$. Отношение ρ удобно рассматривать как график подходящей частичной многозначной функции π с областью определения E и областью значений F . По условию леммы функция π отлична от (однозначной) инъективной функции. Отсюда следует, что для некоторого $a \in E_k$ хотя бы одно из множеств $\pi(a), \pi^{-1}(a)$ содержит более одного элемента. Для определенности будем считать, что это множество $\pi(0)$. Предположим еще, что величина $|\pi(0)|$ максимальна среди величин $|\pi(i)|$, где $i \in E$. Множество $\pi(0)$ обозначим через F_0 .

Согласно выбору множества F_0 возможны следующие три случая.

- (1) Существует такое $i \in E$, что $\pi(i) \cap F_0 = \emptyset$.
- (2) Существует такое $i \in E$, что каждое из множеств $F_0 \setminus \pi(i)$, $F_0 \cap \pi(i)$, $\pi(i) \setminus F_0$ непусто.
- (3) Для любого $i \in E$ выполняется включение $\pi(i) \subseteq F_0$.

В случае 1 пусть j, l — различные элементы из F_0 и $m \in \pi(i)$. Тогда отноше-

Рис. 8.

ние

$$(x_1 \in \{0, i\}) \& (x_2 \in \{j, l, m\}) \& \rho(x_1, x_2) \quad (6)$$

принадлежит при $k \geq 4$ множеству $[\{x \in E_3, \rho\}]_S$, при $k = 3$ — множеству $[\{x \in E_2, \rho\}]_S$ и удовлетворяет условиям леммы 15.

В случае 2 в каждом из указанных трех непустых множеств выберем по элементу и обозначим их соответственно через j, l, m . Определим отношение $\rho_1(x_1, x_2)$ по формуле (6) и положим

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1, x_2) &\equiv (\exists y)(\rho_1(y, x_1) \& \rho_1(y, x_2)), \\ \rho_3(x_1, x_2) &\equiv (x_1 \in \{j, l\}) \& \rho_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Отношение ρ_3 удовлетворяет условию пункта 3 (если считать, что $l = 0$). Поэтому дальнейшее доказательство леммы будет состоять в исследовании отношений ρ , подчиненных условию пункта 3. Заметим, что тогда $F = F_0$.

Из условий леммы следует, что в $E \setminus \{0\}$ либо найдется такой элемент i , что $1 < |\pi(i)| < |F|$, либо два элемента i, j , для которых $|\pi(i)| \neq |\pi(j)|$, либо два элемента i, j с условием, что $|\pi(i)| = |\pi(j)| = 1$ и $\pi(i) \neq \pi(j)$. Последовательно разберем эти три возможности.

Пусть имеется такое i , что $1 < |\pi(i)| < |F|$. Возьмем различные элементы j, l из множества $\pi(i)$, элемент m из $F \setminus \pi(i)$ и определим отношение ρ_4 по формуле (6). С помощью транспозиции элементов $0, i$ получим из отношения ρ_4 двойственное ему отношение ρ_5 . Положим

$$\rho_6(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_4(y, x_1) \& \rho_5(y, x_2)).$$

Как видно, отношение ρ_6 отличается от отношения

$$(x_1 \in \{j, l, m\}) \& (x_2 \in \{p, q, r\})$$

только набором (m, r) , который не удовлетворяет отношению ρ_6 . Мы хотим далее рассматривать лишь такое отношение ρ_6 , у которого $\{j, l, m\} = \{p, q, r\}$. Очевидно, что это будет заведомо выполняться, если $\{0, i\} \subset \{j, l, m\}$ или $\{0, i\} \cap \{j, l, m\} = \emptyset$.

Исследуем случай, когда одно из чисел $0, i$ принадлежит множеству $\{j, l, m\}$, а другое нет. Заметим, что тогда $k \geq 4$ и множеству $\{p, q, r\}$ принадлежит другое из чисел $0, i$. Следовательно, можно выбрать элемент a из $\{j, l\}$, элемент b из $\{p, q\}$ так, что $(\{a, m\} \cap \{b, r\}) = 1$. Если положить

$$\rho_7(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{a, m\}) \& (x_2 \in \{b, r\}) \& \rho_6(x_1, x_2),$$

то согласно леммам 11, 4 (напомним, что $k \geq 4$) множеству $[\{\rho_7\}]_S$ будет принадлежать отношение ρ_8 , двойственное отношению μ_k^2 . Теперь при построении отношения ρ_6 вместо отношения ρ_5 можно взять отношение

$$(\exists y)(\rho_8(x_1, y) \& \rho_4(y, x_2))$$

и получить для отношения ρ_6 искомое равенство $\{j, l, m\} = \{p, q, r\}$.

Если для отношения ρ_6 имеем $m \neq r$, то путем перехода к двойственному отношению из отношения ρ_6 можно получить любое отношение, которое отличается от отношения $(x_1, x_2 \in \{j, l, m\})$ одним набором (a, b) , где $a \neq b$. Пусть отношения $\rho_9, \dots, \rho_{13}$ отвечают в этом смысле наборам $(j, m), (l, j), (l, m), (m, j), (m, l)$ и

$$\rho_{14}(x_1, x_2) \equiv \rho_9(x_1, x_2) \& \dots \& \rho_{13}(x_1, x_2).$$

Тогда отношение $(x_1 \in \{j, m\}) \& \rho_{14}(x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям леммы 15.

Предположим, что $m = r$. Обозначим через ρ_{15}, ρ_{16} двойственные к ρ_6 отношения, которые отличаются от отношения $(x_1, x_2 \in \{j, l, m\})$ наборами (j, j) и (l, l) . Пусть

$$\rho_{17}(x_1, x_2) \equiv \rho_6(x_1, x_2) \& \rho_{15}(x_1, x_2) \& \rho_{16}(x_1, x_2),$$

$$\rho_{18}(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{j, m\}) \& \rho_{17}(x_1, x_2).$$

Тогда

$$\rho_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_{18}(y, x_1) \& \rho_{18}(y, x_2)).$$

Переходом к двойственному отношению получаем из отношения ρ_2 отношение ρ_{19} . Тогда отношение

$$(x_1 \in \{j, m\}) \& \rho_2(x_1, x_2) \& \rho_{19}(x_1, x_2)$$

будет удовлетворять условиям леммы 15.

Продолжая доказательство леммы, предположим, что для любого $i \in E$ выполняется одно из равенств $|\pi(i)| = 1$ или $|\pi(i)| = |F|$. По условию леммы равенство $\pi(i) = F$ не может выполняться для всех $i \in E$. Поэтому выберем такое $i \in E$, для которого $|\pi(i)| = 1$. Рассмотрим сначала случай, когда для некоторого элемента j из множества $E \setminus \{0\}$ имеем $\pi(j) = F$. Если $\pi(i) = l$ и $m \in F \setminus \{l\}$, то положим

$$\rho_{20}(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, i, j\}) \& (x_2 \in \{l, m\}) \& \rho(x_1, x_2). \quad (7)$$

Тогда отношение $\rho_{20}(x_2, x_1)$ имеет вид отношения $\rho_4(x_1, x_2)$.

Пусть, наконец, для любого i из $E \setminus \{0\}$ множество $\pi(i)$ одноэлементно. Согласно условиям леммы в этом случае в $E \setminus \{0\}$ непременно найдутся такие два числа i, j , что $\pi(i) \neq \pi(j)$. Пусть $\pi(i) = l$, $\pi(j) = m$ и отношение ρ_{21} определяется из отношения ρ по формуле (7). Положим

$$\rho_{22}(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_{21}(x_1, y) \& \rho_{21}(x_2, y)).$$

Тогда отношение ρ_{22} двойственно отношению ρ_2 (или ρ_{19}). Поэтому далее приходим к лемме 15 так же, как при рассмотрении отношений ρ_2, ρ_{19} . Лемма доказана.

Лемма 17. Если отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_4 имеет вид

$$(x_1 \in G_1) \& (x_2 \in H_1) \vee (x_1 \in G_2) \& (x_2 \in H_2), \quad (8)$$

где $|G_1| = |G_2|$, $|H_1| = |H_2|$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ и хотя бы одно из множеств $C_1 \cup G_2$, $H_1 \cup H_2$ совпадает с E_4 , то

$$\{\mu_4^A, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\} \subset [\{x \in E_1, \rho\}]_S.$$

Если отношение $\rho(x_1, x_2)$ на E_k не имеет вида (1), (4), (5), или (при $k = 4$) вида (8), то

$$\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{x \in E_1, \rho\}]_S.$$

Доказательство. Пусть сначала отношение ρ на E_4 имеет вид (8). Предположим для определенности, что $H_1 \cup H_2 = E_4$. Тогда $|H_1| = |H_2| = 2$ и

$$\varepsilon_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(y, x_1) \& \rho(y, x_2))$$

представляет собой отношение эквивалентности на E_4 с двумя классами эквивалентности H_1 и H_2 . Обозначим через $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ два других отношения эквивалентности на E_4 , двойственные к отношению ε_1 . Будем предполагать, например, что отношение ε_1 соответствует множествам $H_1 = \{0, 1\}$ и $H_2 = \{2, 3\}$. Тогда

$$(x_1 \in E_1) \equiv (\exists x_2)((x_2 = 0) \& \varepsilon_1(x_1, x_2)).$$

Положим

$$\sigma_1(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& (\exists y)((y \in \{0, 3\}) \& \varepsilon_1(y, x_2) \& \varepsilon_2(x_1, y)),$$

$$\sigma_2(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& \varepsilon_2(x_1, x_2),$$

$$\sigma_3(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& \varepsilon_3(x_1, x_2).$$

Рис. 9.

Тогда

$$\lambda_4(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\sigma_1(x_1, y) \& \sigma_2(x_2, y) \& \sigma_3(x_3, y)).$$

Полагая

$$\sigma_4(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\lambda_4(x_1, x_2, x_3) \& \sigma_1(y_1, x_1) \& \sigma_1(y_2, x_2) \& \sigma_1(y_3, x_3)),$$

убеждаемся в том, что область истинности отношения $\sigma_4(x_1, x_2, x_3)$ можно представить в форме

$$\{0, 1\}^3 \cup \{0, 1\} \times \{2, 3\}^2 \cup \{2, 3\} \times \{0, 1\} \times \{2, 3\} \cup \{2, 3\}^2 \times \{0, 1\}.$$

Для отношения $\sigma_5(x_1, x_2, x_3)$, двойственного отношению σ_4 относительно транспозиции элементов 1, 2, область истинности представима в форме

$$\{0, 2\}^3 \cup \{0, 2\} \times \{1, 3\}^2 \cup \{1, 3\} \times \{0, 2\} \times \{1, 3\} \cup \{1, 3\}^2 \times \{0, 2\}.$$

Замечаем теперь, что

$$\begin{aligned} \sigma_4(x_1, x_2, x_3) \& \sigma_5(x_1, x_2, x_3) &\equiv (x_1 + x_2 + x_3 = 0), \\ (x_1 + x_2 = x_3 + x_4) &\equiv (\exists y)((x_1 + x_2 + y = 0) \& (x_3 + x_4 + y = 0)). \end{aligned}$$

Положим

$$\sigma_6(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\sigma_1(y, x_1) \& \sigma_2(y, x_2)).$$

Тогда

$$\sigma_6(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in E_2) \& (x_2 \in \{0, 2\}) \vee (x_1 \in \{2, 3\}) \& (x_2 \in \{1, 3\})$$

и отношение $\sigma_6(x_1, x_2) \& \varepsilon_3(x_1, x_2)$ двойственно отношению μ_4^4 .

Перейдем теперь к общему случаю, когда отношение ρ не имеет вида (8). В силу леммы 16 для доказательства леммы 17 достаточно установить, что множеству $\{[x \in E_1, \rho]\}_S$ при $k \geq 4$ принадлежит отношение $x \in E_3$, а при $k = 3$

Рис. 10.

отношение $x \in E_2$. Если использовать обозначения E, F, π из предыдущей леммы, то для выполнения этих включений достаточно, чтобы при $k \geq 4$ какое-либо из множеств $E, F, \pi(a), \pi^{-1}(a)$, где $a \in E_k$, содержало более двух, но менее k элементов, а при $k = 3$ ровно два элемента.

В связи с этим далее можно предполагать, что каждое из множеств $E, F, \pi(a), \pi^{-1}(a)$ при $k \geq 4$ либо совпадает с E_k , либо содержит не более двух элементов, а при $k = 3$ либо совпадает с E_3 , либо не более чем одноэлементно. Из условий леммы легко вытекает также, что ни одно из множеств E, F не может быть одноэлементным и по крайней мере одно из них содержит более двух элементов. Следовательно, при $k \geq 4$ в силу симметрии нам достаточно исследовать, например, возможности $|E| = 2, F = E_k$ и $E = F = E_k$, а при $k = 3$ только $E = F = E_3$.

Пусть $k \geq 4$ и $|E| = 2, F = E_k$. В силу соображений двойственности можно считать, что $E = E_2$. Из условий, которым подчиняется отношение ρ следует, что либо $|\pi(0)| = |\pi(1)| = 2$, либо одно из множеств $\pi(0), \pi(1)$ двухэлементно, а другое совпадает с множеством E_k .

Если $|\pi(0)| = |\pi(1)| = 2$, то ввиду неравенства $k \geq 4$ получаем, что $k = 4$ и $\pi(0) \cap \pi(1) = \emptyset$, т. е. приходим к отношению (8).

Предположим далее, что $\pi(0) = E_k$ и $\pi(1) = \{i, j\}$, где $i \neq j$. Если $\{i, j\} = \{0, 1\}$, то возьмем отношение $\rho_1(x_1, x_2)$, двойственное ρ относительно транспозиции элементов 0, 1, и положим

$$\rho_2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho_1(y, x_1) \& \rho(y, x_2)).$$

Из отношения ρ_2 транспозициями $(1\ 2)$ и $(0\ 2)$ получаем двойственные отношения

ρ_3 и ρ_4 . Отношение

$$\rho_5(x_1, x_2) \equiv \rho_2(x_1, x_2) \& \rho_3(x_1, x_2) \& \rho_4(x_1, x_2)$$

позволяет очевидным образом получить отношение $x \in E_3$.

Предположим, что $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$. Если $0 \notin \{i, j\}$, то пусть, например, $i \neq 1$. Положив

$$\rho_6(x_1, x_2) \equiv (x_2 \in \{0, i\}) \& \rho(x_1, x_2),$$

закключаем по лемме 11, что $\nu_k^2 \in [\{\rho_6\}]_S$. Значит, согласно лемме 4 в $[\{\rho_6\}]_S$ будет входить отношение ρ_7 (см. рис. 10). Тогда отношение $(\exists y)(\rho_7(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$ возвращает нас к случаю $\{i, j\} = \{0, 1\}$.

Если $0 \in \{i, j\}$, то пусть $l \notin \{i, j, 1\}$. Полагая

$$\rho_8(x_1, x_2) \equiv (x_2 \in \{0, l\}) \& \rho(x_1, x_2),$$

по лемме 11 из отношения ρ_8 получаем отношение ν_k^2 и далее по лемме 4 отношение μ_k^2 . Теперь отношение

$$(\exists y)(\mu_k^2(x_1, y) \& \rho(y, x_2))$$

приводит нас к рассмотренному случаю $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$, $0 \notin \{i, j\}$.

Предположим, что для отношения ρ выполняются равенства $E = F = E_k$. Покажем, во-первых, что для некоторого i одно из множеств $\pi(i), \pi^{-1}(i)$ состоит из двух элементов. Предположим, что это не так. Все множества $\pi(0), \dots, \pi(k-1)$ не могут быть одноэлементными, поскольку тогда либо $F \neq E_k$, либо отношение ρ имеет вид (1). Будем предполагать поэтому, что, например, $\pi(0) = E_k$. Если среди множеств $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$ еще хотя бы два множества совпадают с E_k , то для любого l из E_k множество $\pi^{-1}(l)$ содержит не менее трех элементов и по предположению также должно совпадать с E_k . Следовательно, отношение ρ оказывается полным.

Пусть только одно из множеств $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$, например $\pi(1)$, совпадает с E_k . Если найдутся такие i, j из $\{2, 3, \dots, k-1\}$, что $\pi(i) \neq \pi(j)$, то каждое из множеств $\pi^{-1}(\pi(i)), \pi^{-1}(\pi(j))$ будет содержать более двух, но менее k элементов, что невозможно по предположению. Если же имеется такое l , что при любом i , $i \notin \{0, 1\}$, справедливо равенство $\pi(i) = l$, то для $m \neq l$ множество $\pi^{-1}(m)$ состоит из двух элементов 0, 1.

Предположим, что все множества $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$ одноэлементны. Если существуют такие i, j из $E_k \setminus \{0\}$, что $\pi(i) \neq \pi(j)$, то $j \notin \pi^{-1}(\pi(i))$ и потому $\pi^{-1}(\pi(i)) = \{0, i\}$. Случай, когда все множества $\pi(1), \dots, \pi(k-1)$ совпадают, невозможен, так как отношение ρ не имеет вида (4).

Итак, для некоторого i одно из множеств $\pi(i), \pi^{-1}(i)$ состоит из двух элементов. Тогда, разумеется, множеству $\{x \in E_1, \rho\}_S$ принадлежит отношение $x \in E_2$. Тем самым, в частности, можно считать завершенным рассмотрение случая $k = 3$. Далее предполагаем, что $k \geq 4$.

Если для некоторых элементов i, j отношению

$$(\exists x_1)((x_1 \in \{i, j\}) \& \rho(x_1, x_2)) \quad (9)$$

удовлетворяет более двух, но менее k элементов, то лемма доказана. В связи с этим считаем, что любое отношение вида (9) и аналогичное отношение, полученное перестановкой переменных x_1, x_2 , либо полно, либо ему удовлетворяет не более двух элементов.

Допустим, что не существует таких i , для которых $\pi(i) = E_k$. Как мы убедились выше, все множества $\pi(0), \dots, \pi(k-1)$ не могут быть одноэлементными. Выберем поэтому такое i , что $\pi(i) = \{m, l\}$, где $m \neq l$. Если для некоторого j множество $\pi(j)$ одноэлементно, то в силу предположения об отношениях (9) будет справедливо включение $\pi(j) \in \{m, l\}$. Так как $k \geq 4$, то, следовательно, должно существовать такое j , что $|\pi(j)| = 2$ и $\pi(j) \cap \{m, l\} = \emptyset$ (случай $|\pi(j) \cup \{m, l\}| = 3$ мы исключили из рассмотрения). При $k \geq 5$ получаем противоречие с предположением об отношении (9). Если же $k = 4$, то для любого a , $a \in E_4 \setminus \{i, j\}$, должно выполняться одно из включений $\pi(a) \subseteq \pi(i)$ или $\pi(a) \subseteq \pi(j)$. Если множество $\pi(a)$, где $a \notin \{i, j\}$, одноэлементно, то по предположению $\pi(a) \in \pi(i)$ и потому получаем противоречие с допущением об отношении (9), если вместо i взять элемент a . Пусть для любого a , $a \notin \{i, j\}$, имеем $|\pi(a)| = 2$. Если функция π отображает три элемента множества E_4 в одно из множеств $\pi(i), \pi(j)$, например $\pi(i)$, то вновь получаем противоречие, рассматривая отношение

$$(\exists x_2)((x_2 \in \{m, l\}) \& \rho(x_1, x_2)).$$

Случай, когда функция π отображает два элемента из E_4 в множество $\pi(i)$ и два элемента в множество $\pi(j)$, приводят к отношению (8).

Предположим теперь, что для некоторого a выполняется равенство $\pi(a) = E_k$. Симметричным образом можно считать, что для некоторого i также справедливо равенство $\pi^{-1}(i) = E_k$. Допустим, что имеется такое b , $b \neq a$, для которого $|\pi(b)| = 2$. Тогда отношение $(x_1 \in \{a, b\}) \& \rho(x_1, x_2)$ возвращает нас к рассмотренному случаю $|E| = 2$, $\pi(a) = E_k$, $|\pi(b)| = 2$. Аналогичным образом рассуждаем, когда существует такое j , $j \neq i$, что $|\pi^{-1}(j)| = 2$.

Если для любого b , $b \neq a$, и любого j , $j \neq i$, выполняются равенства $|\pi(b)| = |\pi^{-1}(j)| = 1$, то отношение ρ имеет вид (4), что невозможно по условиям леммы. Пусть для некоторого b , $b \neq a$, имеет место равенство $\pi(b) = E_k$. Тогда для любого j множество $\pi^{-1}(j)$ содержит элементы a, b . Так как для всех j множество $\pi^{-1}(j)$ не может совпадать с E_k , то найдется такое j , для которого $\pi^{-1}(j) = \{a, b\}$, т. е. получаем рассмотренный выше случай.

Аналогичным образом проводим доказательство, когда существует такое j , $j \neq i$, что $\pi^{-1}(j) = E_k$. Лемма доказана.

Лемма 18. Множество $\{[\lambda_k, \chi_k^i]\}_S$ содержит все отношения вида

$$(x_1, \dots, x_m \in E_i) \& \sigma(x_1, \dots, x_m), \quad (10)$$

где σ — произвольное отношение на E_k .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $i = 2$. Замечаем, что

$$\begin{aligned} \chi_k^2(x_1, x_2) &\equiv (x_1, x_2 \in E_2) \& (x_1 \leq x_2), \\ (\exists y)((y = 1) \& \lambda_k(x_1, x_2, y)) &\equiv \mu_k^2(x_1, x_2), \\ (\exists y)(\mu_k^2(x_1, y) \& \chi_k^2(y, x_2)) &\equiv (x_1, x_2 \in E_2) \& (\bar{x}_1 \leq x_2), \end{aligned}$$

где $\bar{x}_1$ — булево отрицание переменной x_1 . Из отношений $x = 1, \lambda_k$ нетрудно получить все отношения вида

$$\sigma_1(x_1, \dots, x_m) \equiv (x_1, \dots, x_m \in E_2) \& (x_1 + \dots + x_m = a),$$

Рис. 11.

где $a \in E_2$ и $+$ обозначает сложение по модулю 2.

Пусть t нечетно и отношение $\sigma_1(x_1, \dots, x_m)$ соответствует значению $a = 0$. Возьмем произвольный набор $(a_1, \dots, a_m)$ из E_2^m и положим

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \equiv (\exists y_1) \dots (\exists y_m) ((x_1, \dots, x_m \in E_2) \& (x_1^{a_1} \leq y_1) \& \dots \& (x_m^{a_m} \leq y_m) \& \sigma_1(y_1, \dots, y_m)),$$

где $x_j^0 = \bar{x}_j$ и $x_j^1 = x_j$. Нетрудно убедиться в том, что отношение $\rho(x_1, \dots, x_m)$ отличается от отношения $(x_1, \dots, x_m \in E_2)$ только на наборе $(a_1, \dots, a_m)$. Следовательно, если отношению $\sigma(x_1, \dots, x_m)$ не удовлетворяет ровно s наборов из E_2^m ($s > 0$) и отношения $\rho_1, \dots, \rho_s$ суть отношения ρ , построенные для этих s наборов, то

$$(x_1, \dots, x_m \in E_2) \& \sigma(x_1, \dots, x_m) \equiv \rho_1(x_1, \dots, x_m) \& \dots \& \rho_s(x_1, \dots, x_m).$$

Случай четного числа t рассматривается аналогичным образом.

Пусть теперь $i \geq 3$. Очевидно, что в множество $[\{\chi_k^i\}]_S$ входит отношение χ_k^2 . Тогда по доказанному множество $[\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_S$ будет содержать все отношения вида (10) для случая E_2 .

Если определить $\tau(x_1, x_2)$, полагая

$$\tau(x_1, x_2) \equiv (x_2 \in \{1, i-1\}) \& \chi_k^i(x_1, x_2),$$

то на основании леммы 11 из отношения τ можно получить отношение ν_k^2 . Используя теперь отношение χ_k^i , двойственное к χ_k^i отношение χ и отношения из множества $[\{\nu_k^2\}]_S$, получаем отношения $\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}$ (на рис. 11 опущены вершины $i, \dots, k-1$). Заметим, что при подстановке в отношение

$$\varphi_0(x_1, y) \& \varphi_1(x_2, y) \& \dots \& \varphi_{i-1}(x_i, y) \quad (11)$$

вместо переменных $x_1, \dots, x_i$ наборов значений

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \quad (12)$$

полученному одноместному отношению будет удовлетворять соответственно только один элемент $0, 1, \dots, i - 1$. Это позволяет кодировать значения из E_i с помощью отношения (11). Именно, для произвольного отношения σ на E_k согласно первой части доказательства леммы следующим образом определим отношение $\sigma_2(x_1^1, \dots, x_i^1, \dots, x_1^m, \dots, x_i^m)$. Если для некоторого t , $1 \leq t \leq m$, набор $(a_1^t, \dots, a_i^t)$ из E_2^i отличен от наборов (12), то полагаем отношение $\sigma_2(x_1^1, \dots, x_i^1, \dots, a_1^t, \dots, a_i^t, \dots, x_1^m, \dots, x_i^m)$ ложным. Пусть $(a_1^1, \dots, a_i^1), \dots, (a_1^m, \dots, a_i^m)$ — наборы из множества (12). Положим тогда $\sigma_2(a_1^1, \dots, a_i^1, \dots, a_1^m, \dots, a_i^m)$ истинным в том и только том случае, когда истинно значение $\sigma(b_1, \dots, b_m)$, где значения $b_1, \dots, b_m$ определяются из соответствия

$$(1, 0, \dots, 0) - 0, (0, 1, 0, \dots, 0) - 1, \dots, (0, \dots, 0, 1) - (i - 1).$$

Нетрудно теперь видеть, что отношение (10) будет совпадать с отношением

$$(\exists y_1^1) \dots (\exists y_i^m)(\varphi_0(y_1^1, x_1) \& \dots \& \varphi_{i-1}(y_i^1, x_1) \& \dots \\ \& \varphi_0(y_1^m, x_m) \& \dots \& \varphi_{i-1}(y_i^m, x_m) \& \sigma_2(y_1^1, \dots, y_i^1, \dots, y_1^m, \dots, y_i^m)).$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть ρ — произвольное двуместное отношение на E_k . Тогда множество $\{x \in E_1, \rho\}$ S -эквивалентно некоторому набору основных отношений.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $k = 4$ и ρ имеет вид (8). По лемме 17

$$\{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\} \subset \{x \in E_1, \rho\}_S.$$

Покажем, что справедливо включение

$$\rho \in [\{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_S.$$

Так как $\mu_4^4(x, x) \equiv (x \in \{2, 3\})$, множеству $[\{\mu_4^4\}]_S$ принадлежит отношение $x \in E_1$. Замечаем, что отношение

$$\sigma_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)((x_1 + x_2 = y_1 + y_2) \& (y_1 \in E_1) \& \mu_4^4(x_1, y_2))$$

совпадает с отношением

$$(x_1 \in E_2) \& (x_2 = 1) \vee (x_1 \in \{2, 3\}) \& (x_2 = 0).$$

Поэтому (см. рис. 9)

$$(\exists y)(\sigma_1(x_1, y) \& \sigma_1(x_2, y)) \equiv \varepsilon_1(x_1, x_2).$$

Если в представлении (8) для отношения ρ все множества G_1, G_2, H_1, H_2 двухэлементны, то в соответствии с леммой 1 выбираем в множестве $[\{\mu_4^4\}]_S$ такие отношения

$$\sigma_2(x_1, x_2) \equiv (\pi_1(x_1) = x_2), \quad \sigma_3(x_1, x_2) \equiv (\pi_2(x_1) = x_2),$$

что π_1, π_2 — подстановки на E_4 и $\pi_1(G_1) = E_2$, $\pi_2(E_2) = H_1$, и получаем, что

$$\rho(x_1, x_2) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\sigma_2(x_1, y_1) \& \varepsilon(y_1, y_2) \& \sigma_3(y_2, x_2)).$$

Анализ, в случае, когда какая-либо пара G_1, G_2 или H_1, H_2 состоит из одноэлементных множеств, легко сводится к рассмотренному, поскольку множество $\{\{\mu_4^4\}\}_S$ содержит все отношения вида $x \in E$, где $|E| = 2$.

Если отношение ρ имеет вид (1), то применяем лемму 10, а если вид (4), то лемму 14. Пусть отношение ρ имеет вид (5). Тогда, очевидно, в качестве основных отношений достаточно взять отношения $x \in E_1$, $x \in E_i$, $x \in E_j$, где $i = |E|$, $j = |F|$.

Допустим теперь, что отношение ρ не имеет вида (1), (4), (5) или (8). Тогда по леммам 17, 18 множеству $\{x \in E_1, \rho\}_S$ принадлежат все отношения вида (10), где $i = 3$, в частности, отношения ν_k^2 и χ_k^3 . Пусть $E = \{a: \rho(a, x_2) \text{ непусто}\}$, $F = \{b: \rho(x_1, b) \text{ непусто}\}$, и пусть для определенности $|E| \leq |F|$. Если $j = |F|$ и $j \leq 3$, то множество $\{x \in E_1, \rho\}$, очевидно, S -эквивалентно множеству $\{\lambda_k, \chi_k^3\}$. Допустим, что $j > 3$. Теорема будет доказана, если мы установим, что множеству $\{x \in E_1, \rho\}_S$ принадлежит отношение χ_k^j . Так как $\chi_k^3 \in \{x \in E_1, \rho\}_S$, проводя индукцию, предположим, что множеству $\{x \in E_1, \rho\}_S$ принадлежит отношение χ_k^l , где $3 \leq l < j$.

Так как $|E| \leq |F|$ и отношение ρ не имеет вида (1), то для некоторого a из E отношению $\rho(a, x_2)$ удовлетворяет не менее двух элементов. Выберем в множестве E различные элементы $a_1, \dots, a_s$, $s \leq l$, таким образом, что отношению $\rho(a_1, x_2)$ удовлетворяет максимально возможное число элементов, отношению

$$\rho(a_1, x_2) \vee \rho(a_2, x_2) \vee \dots \vee \rho(a_s, x_2) \quad (13)$$

удовлетворяет m элементов, где $m > l$, и отношение $\rho(a_s, x_2)$ отлично от отношения $\rho(a_1, x_2)$. Пусть отношение $\sigma_1(x_1, x_2)$ двойственно χ_k^s относительно подстановки, переводящей $a_1, \dots, a_s$ соответственно в $0, \dots, s-1$. Положим

$$\rho_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\sigma_1(x_1, y) \& \rho(y, x_2)).$$

Тогда отношение $\rho_1(a_1, x_2)$ совпадает с отношением (13), а отношение $\rho_1(a_s, x_2)$ с отношением $\rho(a_s, x_2)$. Если отношению $\rho(a_s, x_2)$ удовлетворяет только один элемент, то по лемме 13 множеству $\{\{\rho_1\}\}_S$ принадлежит отношение χ_k^m . Далее предполагаем, что отношению $\rho(a_s, x_2)$ удовлетворяет более одного элемента.

Так как $\nu_k^2 \in \{\{\rho\}\}_S$, можно считать, что a_1, a_s удовлетворяют отношению $\rho_1(a_1, x_2)$, $\rho_1(a_s, a_s)$ истинно и $\rho_1(a_s, a_1)$ ложно. Если отношение $\rho_1(a_s, x_2)$ отличается от отношения $\rho_1(a_1, x_2)$ более чем одним элементом, то пусть $\pi_1, \dots, \pi_t$ — все подстановки на E_k , которые сохраняют каждый из элементов a_1, a_s и отношение $\rho_1(a_1, x_2)$. Тогда отношение

$$\rho_1^{\pi_1}(x_1, x_2) \& \dots \& \rho_1^{\pi_t}(x_1, x_2)$$

возвращает нас к случаю одноэлементного отношения $\rho_1(a_s, x_2)$.

Предположим, что отношение $\rho_1(a_s, x_2)$ отличается от отношения $\rho_1(a_1, x_2)$ только одним элементом a_1 . Пусть отношение ρ_2 двойственно ρ_1 относительно транспозиции $(a_1 a_2)$ и

$$\rho_3(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\sigma_2(x_1, y) \& \rho_2(y, x_2)),$$

Рис. 12.

где отношение σ_2 двойственно ν_k^2 . Тогда отношение $\rho_1(x_1, x_2) \& \rho_3(x_1, x_2)$ приводит к случаю, когда отношение $\rho_1(a_1, x_2)$ отличается от $\rho_1(a_s, x_2)$ более чем одним элементом. Теорема доказана.

В заключение докажем лемму о порождении трехместного отношения λ_k .

Лемма 19. Пусть $k \geq 3$, $\{a, b, c, d\} \subseteq E_k$, $a \neq b$, $c \neq d$ и $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — такое отношение на E_k , что $\rho(0, x_2, x_3), \rho(1, x_2, x_3)$ суть различные отношения вида

$$(x_2 \in \{a, b\}) \& (\pi(x_2) = x_3), \quad (14)$$

$$(x_2 \in \{a, b\}) \& (x_3 \in \{c, d\}), \quad (15)$$

$$(x_2 \in \{a, b\}) \& (x_3 \in \{c, d\}) \& (x_2 = e \vee x_3 = f), \quad (16)$$

где π — подстановка на E_k , отображающая $\{a, b\}$ на $\{c, d\}$, и $e \in \{a, b\}$, $f \in \{c, d\}$. Тогда $\lambda_k \in [\{x \in E_1, \rho\}]_S$.

Доказательство. Так как

$$(x_2 \in \{a, b\}) \equiv (\exists x_1)(\exists x_3)((x \in E_1) \& \rho(x_1, x_2, x_3)),$$

множеству $[\{x \in E_1, \rho\}]_S$ принадлежит отношение $x \in E_2$. В дальнейшем нам не потребуются отношения вида $\rho(g, x_2, x_3)$, где $g \notin \{0, 1\}$. Поэтому можно считать, что

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 \in E_2) \& \rho(x_1, x_2, x_3).$$

Отношения $\rho(0, x_2, x_3), \rho(1, x_2, x_3)$ будем обозначать соответственно через $\rho_0(x_2, x_3), \rho_1(x_2, x_3)$. Рассмотрим возможные случаи для отношений ρ_0, ρ_1 .

1. Оба отношения ρ_0, ρ_1 имеют вид (14). Тогда одному из отношений ρ_0, ρ_1 удовлетворяют два набора $(a, c), (b, d)$, а другому два набора $(a, d), (b, c)$. Полагая поэтому

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, x_2, y) \& \rho_0(x_3, y)),$$

находим, что

$$\sigma(0, x_2, x_3) \equiv (x_2, x_3 \in \{a, b\}) \& (x_2 = x_3),$$

$$\sigma(1, x_2, x_3) \equiv (x_2, x_3 \in \{a, b\}) \& (x_2 \neq x_3).$$

Следовательно,

$$(\exists y)(\sigma(y, x_1, x_2) \& \sigma(y, x_3, x_4)) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{a, b\}) \& ((x_1 = x_2) \& (x_3 = x_4) \vee (x_1 \neq x_2) \& (x_3 \neq x_4)).$$

Рис. 13.

Таким образом, мы получили отношение, двойственное отношению

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4 \in E_2) \& (x_1 + x_2 = x_3 + x_4),$$

где сложение рассматривается по модулю 2. Далее имеем

$$\lambda_k(x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv (\exists x_4)((x_4 \in E_1) \& \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)).$$

2. Отношение ρ_0 имеет вид (14), а отношение ρ_1 вид (15).

Можно считать, что $\pi(a) = c$ и $\pi(b) = d$. Положим (см. рис. 13)

$$\sigma_1(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, a, y) \& \rho(x_2, b, y)).$$

Если отношение σ_2 двойственно σ_1 относительно транспозиции элементов 0, 1, то

$$\sigma_1(x_1, x_2) \& \sigma_2(x_1, x_2) \equiv \mu_k^2(x_1, x_2).$$

Пусть отношение $\sigma_3(x_1, x_2)$ двойственно отношению μ_k^2 . Положим,

$$\sigma_4(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\mu_k^2(x_1, y_1) \& \rho(y_1, x_2, y_2) \& \sigma_3(y_2, x_3)),$$

$$\sigma_5(x_1, x_2, x_3) \equiv \rho(x_1, x_2, x_3) \& \sigma_4(x_1, x_2, x_3)).$$

Тогда отношение $\sigma_5(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет условию п. 1.

3. Отношение ρ_0 имеет вид (14), а отношение ρ_1 вид (16).

Положим

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) \equiv (\exists y)(\rho(x_1, x_2, y) \& \rho(x_1, x_3, y)),$$

Тогда

$$\sigma(0, x_2, x_3) \equiv (x_2, x_3 \in \{a, b\}) \& (x_2 = x_3),$$

$$\sigma(1, x_2, x_3) \equiv (x_2 \in \{a, b\}) \& (x_3 \in \{a, b\}),$$

и мы приходим к п. 2.

4. Отношение ρ_0 имеет вид (15), а отношение ρ_1 вид (16), где для определенности $e = a$ и $f = c$.

Рассмотрим отношения $\rho_1(x_2, x_3)$, $\rho(x_1, b, x_3)$, $\rho(x_1, x_2, d)$. Покажем, что отношение μ_k^2 принадлежит одному из множеств $[\{\rho_1\}]_S$, $[\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_S$, $[\{\rho(x_1, x_2, d)\}]_S$. Если $(d, c) = (b, a) = (0, 1)$, то в соответствии с леммой 11 отношение μ_k^2 входит в множество $[\{\rho_1\}]_S$.

Пусть $(d, c) \neq (0, 1)$. Тогда лемма приводит к соотношению $\mu_k^2 \in [\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_S$ за исключением двух случаев: когда $k = 4$ и $\{0, 1\} \cap \{d, c\} = \emptyset$, либо $k = 3$, $\{0, 1\} \neq \{d, c\}$ и справедливо одно из равенств $d = 1$ или $c = 0$.

Рис. 14.

В случае $k = 4$ по лемме 11 $\zeta_4 \in [\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_S$. Отношение $\sigma_1(x_1, x_2)$ двойственно отношению ζ_4 (см. рис. 14). Тогда отношение

$$(\exists y)(\zeta_4(x_1, y) \& \sigma_1(x_2, y))$$

будет двойственно отношению μ_4^2 .

Если $k = 3$, то, рассматривая аналогично отношению $\rho(x_1, b, x_3)$ отношение $\rho(x_1, x_2, d)$, можно также предполагать, что $\{0, 1\} \neq \{b, a\}$ и выполняется одно из равенств $b = 1$ или $a = 0$. Тогда комбинация возможностей $a = 0, b = 2$ или $a = 2, b = 1$ с возможностями $c = 0, d = 2$ или $c = 2, d = 1$ приводит согласно лемме 11 к соотношению $\mu_k^2 \in [\{\rho_1\}]_S$.

Если $(b, a) \neq (0, 1)$, то проводим аналогичные построения с отношением $\rho(x_1, x_2, d)$.

Пусть отношения $\sigma_2(x_1, x_2), \sigma_3(x_1, x_2)$ двойственны отношению μ_k^2 (см. рис. 14). Полагая

$$\begin{aligned}\sigma_4(x_1, x_2, x_3) &\equiv (\exists y_1)(\exists y_2)(\sigma_2(x_2, y_1) \& \rho(x_1, y_1, y_2) \& \sigma_3(y_2, x_3)), \\ \sigma_5(x_1, x_2, x_3) &\equiv \rho(x_1, x_2, x_3) \& \sigma_4(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

убеждаемся в том, что отношение σ_5 удовлетворяет условиям п. 2 (с перестановкой значений 0 и 1).

5. Отношения ρ_0, ρ_1 имеют вид (16).

Предположим, что для отношения ρ_0 справедливы равенства $e = a, f = c$. Для отношения ρ_1 возможны три случая: $e = a, f = d$; $e = b, f = c$ или $e = b, f = d$.

Если $e = a$ и $f = d$, то, рассматривая отношения $\rho(x_1, a, x_3), \rho(x_1, b, x_3)$, приходим к п. 2. В случае $e = b, f = c$ к аналогичному результату приводит рассмотрение отношений $\rho(x_1, x_2, c), \rho(x_1, x_2, d)$. Пусть для отношения ρ_1 выполняются равенства $e = b$ и $f = d$. Положим

$$\sigma_1(x_1, x_2) \equiv \rho_0(x_1, x_2) \& \rho_1(x_1, x_2).$$

Ввиду возможности перехода от отношения ρ к отношению

$$(\exists y)(\rho(x_1, x_2, y) \& \sigma_1(x_3, y))$$

можно считать, что $d = a$ и $c = b$. Аналогичным образом, рассматривая отношения $\rho(x_1, x_2, c), \rho(x_1, x_2, d)$, можно предполагать, что $a = d = 0, b = c = 1$. Итак, отношению ρ удовлетворяют ровно шесть наборов $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)$,

$(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Тогда отношению $\sigma_2(x_1, x_2, x_3) \equiv \rho(x_1, x_2, x_3) \& \rho_0(x_1, x_2)$ удовлетворяют пять наборов $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Поэтому, рассматривая отношения $\sigma_2(x_1, x_2, 0)$, $\sigma_2(x_1, x_2, 1)$, приходим к п. 3. Лемма доказана.

Список литературы

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова* (1958) **51**, 5–142.
2. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k -значной логики. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики* (1974) **1**, 9–66.
3. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. *Amer. J. Math.* (1921) **43**, 163–185.
4. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Ann. Math. Studies* (1941) **5**.
5. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
6. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
7. Бурле Г. А. Классы k -значной логики, содержащие все функции одной переменной. *Дискретный анализ* (1967) **10**, 3–7.
8. Голунков Ю. В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k -значной логики. *Вероятностные методы и кибернетика* (1980) **17**, 23–34.
9. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики. *Алгебра и логика* (1977) **16**, №4, 397–416.
10. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости. В кн.: *Логический вывод*. Наука, Москва, 1979, с.5–33.
11. Тайманов В. А. О функциональных системах k -значной логики с операциями замыкания программного типа. *Докл. АН СССР* (1983) **268**, №6, 1307–1310.
12. Нгуен Ван Хоа. Об L -эквивалентности систем функций в многозначных логиках. *Алгебра и логика* (1988) **27**, №1, 37–47.
13. Нгуен Ван Хоа. К описанию семейства G -полных замкнутых классов в k -значной логике. *Кибернетика* (1990) **5**, 9–12.
14. Нгуен Ван Хоа. О G -полных замкнутых классах k -значной логики. *Elektron. Informationsverarb. Kybernetik* (1990) **26**, №56, 301–313.
15. Нгуен Ван Хоа. Некоторые типы аппроксимационной полноты в k -значной логике, связанные с группами преобразований переменных. *Докл. АН БССР* (1934) **34**, №11, 970–973.
16. Csakany B., Gavalcova T. Finite homogeneous algebras. *J. Acta Sci. Math.* (1980) **42**, 57–65.
17. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. *Проблемы кибернетики* (1979) **36**, 5–22.
18. Марченков С. С. Об однородных алгебрах. *Докл. АН СССР* (1981) **256**, №4, 787–790.
19. Марченков С. С. Однородные алгебры. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 85–106.

20. Марченко С. С. О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, №3, 533–536.
21. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
22. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 87–108.
23. Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I, II. *Кибернетика* (1969) **3**, 1–10, 5, 1–9.
24. Оре О. *Теория графов*. Наука, Москва, 1968.
25. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа. *Киберн. сб.* (1963) **7**, 129–185.
26. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1972.
27. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k -значной логики. *Доклады АН Белоруссии* (1994) **38**, №3, 16–19.

Статья поступила 07.07.93.

Переработанный вариант поступил 14.12.95.