Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Ван Хоа, О замкнутых классах k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 129–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:18:19

О замкнутых классах k -значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп

© 1996 г. Нгуен Ван Хоа

Доказано, что при $m \geq [k/2] + 1$ структура замкнутых классов k -значной логики, самодвойственных относительно m -транзитивных подгрупп симметрических групп, конечна и состоит из замкнутых классов, имеющих конечный базис.

1. Введение

Известно, что решетка замкнутых классов (з.к.) k -значной логики счетна и имеет эффективное описание при $k = 2$ [1]. Однако при $k \geq 3$ она континуальна [2]. По этой причине естественный интерес представляет исследование структур з.к. k -значной логики при отождествлении похожих в определенном смысле функций. Похожесть функций может играть роль многозначного оператора над функциями, который вместе с операцией суперпозиции образует новый более сильный оператор замыкания.

В данной работе похожесть функций определяется с помощью понятия двойственности функции. Пусть S_k — симметрическая группа степени k , G — подгруппа группы S_k . Пусть G^* есть такое бинарное отношение на P_k , что fG^*g тогда и только тогда, когда $s^{-1}f(s(x_1), \dots, s(x_n)) = g(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $s \in G$. Очевидно, что G^* является отношением эквивалентности на P_k .

G^* -замыкание $[\Sigma]_{G^*}$ для любой системы функций $\Sigma \subseteq P_k$ индуктивно определяется следующими правилами:

- (1) всякая функция из Σ принадлежит $[\Sigma]_{G^*}$;
- (2) если $f \in [\Sigma]_{G^*}$ и fG^*g , то $g \in [\Sigma]_{G^*}$;
- (3) если $M \subseteq [\Sigma]_{G^*}$, то $[M] \subseteq [\Sigma]_{G^*}$.

Функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных. Множество M функций из P_k называется G^* -замкнутым классом, если $[M]_{G^*} = M$. Множество функций $\Sigma \subset M \subset P_k$ называется G^* -полным в M , если $[\Sigma]_{G^*} = M$. Естественным образом вводятся понятия G^* -критериальной системы, G^* -предполного класса, G^* -базиса, G^* -порядка.

Очевидно, что G^* -з.к. является одновременно з.к. в обычном смысле. Поэтому можно считать структуру $L_{G^*}(P_k)$ всех G^* -з.к. некоторой подструктурой первоначальной структуры з.к., которая состоит из всех з.к. типа G^* . Такую подструктуру будем называть G^* -подструктурой структуры $L(P_k)$ з.к. k -значной логики. При единичной подгруппе ($G^* = e_k$) имеем $L_{e_k}(P_k) = L(P_k)$. Описание структуры $L_{G^*}(P_k)$ имеется в работах [6, 10, 14]. В данной работе будет доказано, что $L_{G^*}(P_k)$ конечна и состоит из з.к., имеющих конечный базис, если группа G m -транзитивна, где $m \geq [k/2] + 1$ ($[a]$ обозначает наибольшее целое число, не большее a).

2. Основные понятия и обозначения

Пусть $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$, $P_k^n = \{f^n \mid f^n: E_k^n \rightarrow E_k\}$, $n = 1, 2, \dots$,

$$P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n.$$

Через $S(E_k)$, $A(E_k)$ ($S_k(M)$, $A_k(M)$, где $M \subset E_k$, $|M| < k$) обозначим соответственно симметрическую, знакопеременную группы, действующие на E_k (на M), а через $V(E_4)$ ($V_k(M)$, $|M| = 4 < k$) четвертую группу Клейна на E^4 (на M). Как з.к. функций из P_k (P_4) множества $S(E_k)$, $A(E_k)$ ($V(E_4)$) имеют соответственно еще обозначения PS_k , PA_k (PV_4). Единичная перестановка из $S(E_k)$ составляет единичную подгруппу P_{e_k} . Для любого $t \leq k-1$ пусть

$$s_t = \binom{k}{t+1},$$

а I_i^{t+1} , $i = 1, \dots, s_t$, есть все $(t+1)$ -элементные подмножества множества E_k , где $I_1^{t+1} = \{0, 1, \dots, t\}$. Пусть

$$B_{I_i^t}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_k^n \mid \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I_i^t\},$$

$$T_{k,t}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_k^n \mid \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = t\}.$$

$B_{I_i^t}^n f$, $B_i f$, $\vec{B}_i^f$ — ограничения функции f на $B_{I_i^t}^n$, $B_i^n = B_{I_i^1}^n$ и на множество

$$\vec{B}_i^n = \bigcup_{s=1}^{s_i-1} B_{I_i^s}^n$$

соответственно, где $t = 2, \dots, k$, $i = 1, \dots, s_{t-1}$. Для любого множества функций M из P_k пусть

$$B_i M = \bigcup_{f \in M} \{B_i f\}, \quad \vec{B}_i M = \bigcup_{f \in M} \{\vec{B}_i f\}, \quad 2 \leq i \leq k-1,$$

$$G^*(M) = \{f \in P_k \mid f G^* g \text{ для некоторого } g \in M\}.$$

Пусть $\tilde{a}_j^1 = (j, j+1, j+2, 3)$, $\tilde{a}_j^2 = (j+1, j, j+2, 3)$, $j = 0, 1, 2$ (сложение здесь рассматривается по модулю 3). Пусть

$$V_j^i = \bigcup_{\pi \in V(E_4)} \{\pi(\tilde{a}_j^i)\}, \quad j = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2.$$

При $k \geq 3$ пусть

$$\begin{aligned} d(x, y, z) &= \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ s(x, y, z) &= \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ y, & \text{если } x = z, \\ x & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ l_n(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} x_1, & \text{если } |\{x_1, \dots, x_n\}| = n, \\ x_n & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ f^{\bar{0}}(x, y) &= \begin{cases} x & \text{на } \{0, 1\}^2, \\ y & \text{на остальных наборах.} \end{cases} \end{aligned}$$

При $k = 4$ пусть

$$\begin{aligned} f^{\bar{0}}(x, y) &= \begin{cases} x & \text{на } \{0, 1\}^2 \cup \{2, 3\}^2, \\ y & \text{на остальных наборах;} \end{cases} \\ f_0(x, y, z) &= x \dot{+} y \dot{+} z, \quad \gamma_4(x, y) = 3x \dot{+} 2y \end{aligned}$$

(сложение $\dot{+}$ рассматривается в поле Галуа $GF(4)$).

Для любой перестановки $\pi \in S(E_k)$ и любой функции $f \in P_k^n$ пусть

$$f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \langle \pi \rangle(f(x_1, \dots, x_n)) = \pi^{-1}f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)),$$

а для любого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ пусть $\pi(\tilde{a}) = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$, $M_{\tilde{a}} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Для данного G^* -з.к. K через $\text{BAS}(K)$, $\text{ORD}(K)$, $\text{CR}(K)$, $\text{BAS}_{G^*}(K)$, $\text{ORD}_{G^*}(K)$, $\text{CR}_{G^*}(K)$ обозначим базис, порядок, критериальную систему, G^* -базис, G^* -порядок, G^* -критериальную систему класса K соответственно.

Определения з.к. булевых функций Поста, з.к. четных (в том числе однородных) функций имеются в работах [1], [11] соответственно. Определения з.к. P_k^α , SLP_k , LQ_k , LQ_k^+ , SLQ_k^+ , CE_k , V_4 , QL_4 , VQL_4 , $V_4^4L_4$, LL_4 , LL_4^1 , NL_4 имеются в работе [6]. Там V_4 , VQL_4 , $V_4^4L_4$ имеют обозначения K_4 , QL_4^V , KL_4 соответственно.

Определения з.к. A_3^0 , J_3 , L^3 имеются в работе [10] (там A_3^0 , J_3 имеют обозначения S , S_1 соответственно). Пусть $V_4^\alpha = P_4^\alpha \cap V_4$, $QL_4^\alpha = P_4^\alpha \cap QL_4$, $VQL_4^\alpha = P_4^\alpha \cap VQL_4$,

$$\begin{aligned} V_4^4L_4^0 &= \{f \in P_k \mid f(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1} \dot{+} \dots \dot{+} x_{i_q} \dot{+} c, \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, n\}, \\ &\quad |\{i_1, \dots, i_q\}| = q, q \text{ нечетно}, c \in E_4\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} P_k^2\tilde{C}_4 &= \{f \in P_k \mid f \text{ сохраняет любое 2-элементное} \\ &\quad \text{подмножество множества } E_k\}, \\ P_k^2\tilde{O}_1 &= \{f \in P_k^2\tilde{C}_4 \mid B_{I_i^2}f \in B_{I_i^2}O_1, i = 1, \dots, s_1\}, \\ P_4^2\tilde{O}_1 &= \{f \in P_4^2\tilde{O}_1 \mid B_2f \in V_4\}, \\ P_k^iO_1 &= \{f \in P_k \mid B_if \in B_iO_1, i = 2, \dots, k-1\}, \\ V_4^2\tilde{D}_1 &= \{f \in V_4 \mid B_{I_i^2}f \in B_{I_i^2}S_4, i = 1, \dots, s_1\}. \end{aligned}$$

3. Основные результаты

Предложение А. Для любого множества $M \subseteq P_k$ и любой подгруппы $G^* \subset S(E_k)$, $k \geq 2$, имеет место равенство $[G^*(M)] = [M]_{G^*}$.

Доказательство. Воспользуемся формульным способом задания оператора замыкания $[\cdot]$ (см. [1]). Каждая формула U над $G^*(M)$ реализует некоторую функцию $f_U(x_1, \dots, x_n)$. Покажем, что для любой перестановки π из G^* и для любой формулы U над $G^*(M)$ всегда имеет место включение $f_U^\pi \in [G^*(M)]$. Естественным образом вводится понятие глубины $l(U)$ формулы U над множеством $G^*(M)$. Если U имеет глубину 1, т.е. $U = f_U(x_1, \dots, x_n) \in G^*(M)$, то очевидно, что $f_U^\pi \in G^*(M)$. Предположим, что наше утверждение верно для всех формул U глубины l , $1 \leq l \leq r$. Рассмотрим произвольную формулу U глубины $r+1$ над $G^*(M)$. Формула U тогда имеет вид $f(H_1, \dots, H_m)$, где $f \in G^*(M)$, а $H_1, \dots, H_m$ — формулы над $G^*(M)$ и $\max(l(H_1), \dots, l(H_m)) \leq r$. Очевидно, что $f_U = f(f_{H_1}, \dots, f_{H_m})$ и $f_U^\pi = f((f_{H_1})^\pi, \dots, (f_{H_m})^\pi)$. Но $f^\pi \in G^*(M)$, а $f_{H_1}^\pi, \dots, f_{H_m}^\pi \in [G^*(M)]$ по предположению индукции. Поэтому $f_U^\pi \in G^*(M)$, т.е. утверждение верно для любой U с любой глубиной.

По определению G^* -замыкания очевидно, что $[G^*(M)] \subset [M]_{G^*}$. Пусть $M_0 = M$, а

$$M_{i+1} = \{f \mid f \in [M_i] \text{ или найдется } g \text{ из } M_i \text{ такая, что } gG^*f\}.$$

Легко видеть, что

$$[M]_{G^*} = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i.$$

Очевидно, что $M_0 \subset [G^*(M)]$. Предположим, что $M_i \subset [G^*(M)]$. Рассмотрим произвольную функцию h из M_{i+1} . Если $h \in [M_i]$, то $h \in [G^*(M)]$. Остается случай, когда существует $g \in M_i$ такая, что gG^*h , т.е. $h = g^\sigma$ для некоторого $\sigma \in S(E_k)$. По предположению индукции $g \in [G^*(M)]$. Из доказанного выше утверждения следует, что $h \in [G^*(M)]$. Тем самым доказано, что $M_i \in [G^*(M)]$, $i = 1, 2, \dots$, т.е.

$$[M]_{G^*} = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i \subset [G^*(M)].$$

Предложение доказано.

Следствие А. Для любой подгруппы $G^* \subset S(E_k)$ и для любого G^* -з.к. K из P_k , $k \geq 2$, имеет место равенство $\text{ORD}_{G^*}(K) = \text{ORD}(K)$.

Лемма 1. Для любого $k \geq 5$ пусть $f(x)$ — произвольная нетривиальная подстановка из PS_k , G — m -транзитивная подгруппа группы PS_k , где $m \geq [k/2] + 1$. Тогда подгруппа $\{f(x)\}_{G^*}$ 4-транзитивна при $k = 2^n$, $n > 2$; 3-транзитивна при $k = p^n$, где p — простое число, $p \geq 3$, $n \geq 1$; 2-транзитивна при $k \neq p^n$, где p — простое число, $n \geq 1$.

Доказательство. При $5 \leq k \leq 6$, поскольку $G = A_k$, аналогично теореме Галуа [4, стр. 115] имеем $\{f\}_{G^*} \in \{PA_k, PS_k\}$.

Рассмотрим всевозможные случаи, когда $k \geq 7$.

Пусть в разложении на независимые циклы (РНЦ) подстановки $f(x)$ имеется цикл $(a_1 a_2 a_3 \dots a_t)$ длины, не меньшей 4. В подгруппе G найдется $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(a_2) = a_1$, $\varphi(a_3) = a_3$, $\varphi(a_t) = a_t$. Нетрудно видеть, что РНЦ подстановки $f_1(x) = f^{-1}(f^\varphi(x))$ содержит цикл $(a_1 a_2 a_3)$. Отсюда легко видеть, что в $\{f(x)\}_{G^*}$ всегда найдется нетривиальная $g(x)$, РНЦ которой, кроме цикла длины 1, содержит либо только циклы длины 3, либо только циклы длины 2.

При $k \geq 11$ имеем $m \geq 6$ и с помощью упомянутой выше теоремы Галуа легко убедиться в том, что ограничение подгруппы $\{g(x)\}_{G^*}$ на некоторое 6-элементное подмножество множества E_k изоморфно PS_6 . Поэтому для любых трех пар (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) из E_k^2 найдутся пары (d_1, d_2) , (e_1, e_2) , (u_1, u_2) из E_k^2 и $\psi(x)$ из G такие, что

$$g(d_1) = d_2, \quad g(e_1) = e_2, \quad g(u_1) = u_2, \quad \psi(a_i) = d_i, \quad \psi(b_i) = e_i, \quad \psi(c_i) = u_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$g^\psi(a_1) = a_2, \quad g^\psi(b_1) = b_2, \quad g^\psi(c_1) = c_2,$$

т. е. подгруппа $\{g\}_{G^*}$ 3-транзитивна.

Аналогичным образом доказывается l -транзитивность подгруппы $\{g\}_{G^*}$, где $l = 4$ при $k = 2^n > 11$, $l = 3$ при $k = p^n > 11$, где p — простое число, $n \geq 1$.

При $k = 7$, если РНЦ подстановки $g(x)$ содержит циклы длины 3, то она содержит и циклы длины 1. Отсюда следует, что ограничение подгруппы $\{g\}_{G^*}$ на некоторое 4-элементное подмножество множества E_7 изоморфно PS_4 . Поэтому можно предполагать, без ограничения общности, что $\{g\}_{G^*}$ содержит

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (a_1 a_2)(a_3)(a_4) \dots (\dots) \dots (\dots), \\ g_2(x) &= (a_1 a_2)(a_3 a_4)(\dots) \dots (\dots). \end{aligned}$$

Если $g_1(x)$ или $g_2(x)$ содержит циклы длины 3, то легко видеть, что либо $g_1(g_1(x))$ либо $g_2(g_2(x))$ принадлежит $\{(a_5 a_6 a_7), (a_5 a_7 a_6)\}$. Нетрудно проверить, что $\{[(a_5 a_6 a_7)]\}_{G^*} = \{[(a_5 a_7 a_6)]\}_{G^*} = A_7$. Последняя подгруппа 3-транзитивна.

Если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ содержит циклы длины, не превосходящей 2, то нетрудно проверить, что

$$g_1(g_2(x)) \in \{(a_3 a_4), (a_3 a_4)(a_5 a_6 a_7), (a_3 a_4)(a_5 a_7 a_6)\}.$$

Отсюда следует, что $(a_3 a_4) \in \{g_1(g_2(x))\}_{G^*}$. Но легко видеть, что $\{(a_3 a_4)\}_{G^*} = PS_7$, т. е. $\{g(x)\}_{G^*}$ 2-транзитивна.

При $k = 9$ пусть $g(x) = (a_1 a_2 a_3)(a_4 a_5 a_6)(a_7 a_8 a_9)$. Поскольку G 5-транзитивна, найдется $\theta(x) = (a_7)(a_8)(a_9)(a_4 a_5)(\dots) \dots (\dots)$ из G такая, что

$$g^1(x) = \langle \theta(x) \rangle (g(x)) = (i_1 i_2 i_3)(a_4 a_5 a_6)(a_7 a_8 a_9).$$

Тогда

$$g^1((x)) = (a_4)(a_7 a_8 a_9)(\dots) \dots (\dots).$$

Отсюда следует, что ограничение подгруппы $\{g^1(g(x))\}_{G^*}$ на некоторое 5-элементное подмножество множества E_9 изоморфно PS_5 . Легко проверить, что

другие виды подстановки $g(x)$ также приводят к этому утверждению. Поэтому можно предполагать, без ограничения общности, что $\{[g(x)]\}_{G^*}$ содержит

$$g^2(x) = (a_1 a_2)(a_3 a_4 a_5)(\dots)(\dots)$$

и из $g^2(x)$ суперпозицией можно получить либо $(a_1 a_2)$, либо $(a_3 a_4 a_5)$. Следовательно, $\{[g^2(x)]\}_{G^*} \in \{PA_9, PS_9\}$, т.е. $\{[g(x)]\}_{G^*}$ 3-транзитивна.

При $k = 8$ пусть $g(x) = (a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5 a_6)(a_7 a_8)$. В G найдется такая $\sigma(x)$, что

$$g^3(x) = g^\sigma(x) = (a_1)(a_2)(a_4 a_5)(\dots)(\dots).$$

Тогда

$$g^4(x) = g^3(g(x)) = (a_1)(a_2)(a_3 a_5 \dots) \dots (\dots).$$

Если РНЦ $g^4(x)$ содержит цикл длины, не меньшей 5, то, как уже доказано выше, в $\{[g^4(x)]\}_{G^*}$ найдется $g^5(x)$, РНЦ которой содержит только циклы длин 3 и 1. Легко проверить, что другие варианты подстановки $g(x)$ также приводят к этой ситуации. Но тогда ограничение $\{[g(x)]\}_{G^*}$ на некоторое 5-элементное подмножество множества E_8 изоморфно PS_5 . Отсюда можно предполагать, без ограничения общности, что $\{[g(x)]\}_{G^*}$ содержит

$$g^6(x) = (a_1 a_2)(a_3 a_4 a_5)(\dots)(\dots).$$

Легко видеть, что $\{[g^6(x)]\}_{G^*}$ содержит либо $(a_1 a_2)$, либо $(a_3 a_4 a_5)$. Следовательно, либо $\{[g(x)]\}_{G^*} = PA_8$, либо $\{[g(x)]\}_{G^*} = PS_8$, $\{[g(x)]\}_{G^*}$ 4-транзитивна. Лемма доказана.

Предложение 1. Для любого $k \geq 3$ пусть G — $([k/2] + 1)$ -транзитивная подгруппа группы PS_k . Тогда для любых $a_1, \dots, a_q$ из E_k , где

$$2 \leq |\{a_1, \dots, a_q\}| = |\{b_1, \dots, b_q\}| = q \leq k,$$

в G всегда найдется такая подстановка π , что

$$\pi(a_1) = b_1, \quad \pi(a_2) = b_2, \quad \{\pi(a_3), \dots, \pi(a_q)\} = \{b_3, \dots, b_q\}.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Для любого $k \geq 4$ пусть $f(x)$ — произвольная функция из $P_k^{1(k-1)}$, $|\text{Im } P| \geq 2$, $G = A_k$, при $k = 4, 5, 6$ и G — m -транзитивная подгруппа группы PS_k , $m \geq [k/2] + 1$ при $k \geq 7$. Тогда подполугруппа $\{[f(x)]\}_{G^*}$ 2-транзитивна.

Доказательство. Сначала покажем, что можно получить $f_1(x)$ из $\{[f(x)]\}_{G^*}$ такую, что $|\text{Im } f_1| \geq 2$, $f_1(a) = a$ для каждого $a \in \text{Im } f_1(x)$. Если существует хотя бы одно r -элементное подмножество $M \subset E_k$ такое, что $r \geq 2$, f сохраняет M и ограничение f на M принимает ровно r различных значений, то легко убедиться в том, что k -кратная итерация $f(f(\dots(f(x))\dots))$ является искомой f_1 . В противном случае $f(x)$ должна быть такой, что $f(i_1) = i_2, f(i_2) = i_3, \dots, f(i_{k-1}) = i_k, f(i_k) = i_k$, где $\{i_1, \dots, i_k\} = E_k$. Пусть $f^1(x) = f(f(\dots(f(x))\dots))$ — $(k-2)$ -кратная итерация f . Тогда $f^1(i_1) = i_{k-1}, f^1(i_2) = \dots = f^1(i_k) = i_k$. В G найдется

такая $\varphi(x)$, что $\varphi(i_1) = i_{k-1}$, $\varphi(i_{k-1}) = i_1$. Пусть $\varphi^{-1}(i_k) = i_p$. Очевидно, что $i_p \notin \{i_1, i_{k-1}\}$. Пусть $f^2(x) = \langle \varphi \rangle(f^1(x))$. Легко проверить, что $f^2(i_{k-1}) = i_1$, $f^2(i_1) = \dots = f^2(i_{k-2}) = f^2(i_k) = i_p$ и для $f^3(x) = f^1(f^2(x))$ имеем $f^2(i_{k-1}) = i_{k-1}$, $f^3(i_k) = i_k$. Возвращаемся к знакомой ситуации. Пусть

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_l \\ a_1 & a_2 & \dots & a_l \end{pmatrix},$$

где $M_1 \cup \dots \cup M_l = E_k$, $\{a_1, \dots, a_l\}$ — l -элементное подмножество множества E_k , $2 \leq l \leq k-1$, $f(a_i) = a_i$, $i = 1, \dots, l$. Пусть $\rho(f_1)$ — ранг [5] подстановки f_1 . Пусть $\rho(f_1) = l \geq 3$. Без ограничения общности можно предполагать, что $|M_2| \geq 2$ и M_2 содержит $b_2 \neq a_2$. При $k = 4$ легко видеть, что $G = A_4$ и в G найдется такая $\psi(x)$, что $\psi(x) = (a_1 a_2)(b_2 a_3)$. Пусть $f_1^1(x) = f_1^\psi(x)$. Нетрудно проверить, что для $f_2(x) = f_1^1(f_1(x))$ имеем $\rho(f_2) = 2$. При $k \geq 5$ в G найдется такая $\psi(x)$, что $\psi(a_1) = a_1$, $\psi(a_2) = a_2$, $\psi(a_3) = b_2$. Пусть $f_2(x) = f_1^1(f_1(x))$. Легко видеть, что $2 \leq \rho(f_2) \leq \rho(f_1) - 1$. Эти соображения позволяют убедиться в том, что в $[\{f\}]_{G^*}$ всегда найдется такая функция $f_3(x)$, что $\rho(f_3) = 2$ и f_3 неподвижна на $\text{Im } f_3$. Предположим, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix},$$

где $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, $k_1 = |M_1| \geq k_2 = |M_2| \geq 1$, $k_1 + k_2 = k$. Как в [6], пусть $\lambda^{f_3} = (k_1, k_2)$. Покажем, что $[\{f\}]_{G^*}$ содержит

$$H_{f_3}^0 = \{g(x) \in P_k^{1[2]} \mid \lambda^g = (k_1, k_2) \text{ и } g \text{ неподвижна на } \text{Im } g = \text{Im } f_3\}.$$

При $k = 4$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ без ограничения общности можно предполагать, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $H_{f_3}^0 = \{f_3, g_3\}$, где

$$g_3(x) = \begin{pmatrix} a_2 & b_1 & b_2 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что $g = f_3^{\pi_1}$, где $\pi_1(x) = (b_1 b_2)(a_1 a_2)$.

При $k = 4$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ будем предполагать, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $H_{f_3}^0 = \{f_3, g_4\}$, где

$$g_4(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & a_2 & b_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\pi_2(x) = (a_1 b_2 a_2)(b_1)$, $g_4^1 = f_3^{\pi_2}(x)$, $g_4^2 = g_4^1(f_3(x))$, $\pi_3(x) = (b_2 a_1 b_1)(a_2)$, $g_4^3(x) = \langle \pi_3(x) \rangle(g_4^2(x))$. Тогда $g_4(x) = f_3(g_4^3(x))$.

При $k \geq 5$ без ограничения общности можно предполагать, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & \dots & b_p & a_2 & c_1 & \dots & c_q \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \end{pmatrix},$$

где $k_1 = p + 1$, $k_2 = q + 1$. Чтобы доказать, что $[\{f_3\}]_{G^*} \supseteq H_{f_3}^0$, достаточно доказать, что $[\{f_3\}]_{G^*}$ содержит

$$g_5(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_{i_1} & \dots & b_{i_p} & a_2 & c_{i_1} & \dots & c_{i_q} \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \end{pmatrix},$$

$$g_6(x) = \begin{pmatrix} a_2 & b_{j_1} & \dots & b_{j_p} & a_1 & c_{j_1} & \dots & c_{j_q} \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

для произвольных $b_{i_1}, \dots, b_{i_p}, c_{i_1}, \dots, c_{i_q}, b_{j_1}, \dots, b_{j_p}, c_{j_1}, \dots, c_{j_q}$ из $E_k \setminus \{a_1, a_2\}$. Так как $t \geq [k/2] + 1$, в группе G всегда найдутся $\pi_5(x), \pi_6(x)$ такие, что

$$\pi_5(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & c_{i_1} & \dots & c_{i_q} & * & \dots & * \\ a_1 & a_2 & c_1 & \dots & c_q & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

$$\pi_6(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & c_{i_1} & \dots & c_{i_q} & * & \dots & * \\ a_2 & a_1 & c_1 & \dots & c_q & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

(Знак $*$ означает, что значение числа на месте этого знака не определено.) Нетрудно проверить, что $(f_3^{\pi_5}(x)) = g_5(x)$, $(f_3^{\pi_6}(x)) = g_6(x)$. Для произвольных различных a_{i_1}, a_{i_2} из E_k пусть

$$\pi_7(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_{i_2} & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots \end{pmatrix} \in G,$$

для $g_7 = (f_3^{\pi_7}(x))$ имеем $\text{Im } g_7(x) = \{a_{i_1}, a_{i_2}\}$, $g_7(a_{i_1}) = a_{i_1}$, $g_7(a_{i_2}) = a_{i_2}$. Тем самым доказано, что для любых k_1, k_2 , где $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $k_1 + k_2 = 1$, $[\{f_3\}]_{G^*}$ содержит

$$H^0(k_1, k_2) = \{g \in P_k^{1[2]} \mid \lambda^g = (k_1, k_2), g \text{ неподвижна на } \text{Im } g\}.$$

Теперь докажем, что

$$[\{f_3\}]_{G^*} \supseteq H(k_1, k_2) = \{h(x) \in P_k^{1[2]} \mid \lambda^h = (k_1, k_2)\}.$$

Рассмотрим сначала случай $k_1 = k - 1$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам достаточно показать, что для любого i , $1 < i \leq k - 1$, $[\{f_3\}]_{G^*}$ содержит

$$f_3^1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3^2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3^3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k-1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3^4(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В G найдутся $\sigma_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$, такие, что если $k \geq 5$, то $\sigma_1(0) = \sigma_4(0) = 1$, $\sigma_1(1) = \sigma_4(1) = 0$, $\sigma_1(i) = \sigma_4(i) = i$, $\sigma_2(0) = i$, $\sigma_2(i) = 0$, $\sigma_2(1) = 1$, $\sigma_3(1) = i$,

$\sigma_3(i) = 1$, а если $k = 4$ (тогда $G = A_4$), то $\sigma_1(x) = (01)(23)$, $\sigma_2(x) = (1)(i0t)$, $\sigma_3(x) = (1i)(0t)$, $\sigma_4(x) = (i)(01t)$, где $t \in \{2, 3\} \setminus \{i\}$. Легко проверить, что

$$h_1(x) = f_3^{\sigma_1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_2(x) = h_1^{\sigma_2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ i & 0 & i & \dots & i \end{pmatrix},$$

$$h_3(x) = h_2^{\sigma_3}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k-1 \\ 1 & 1 & \dots & i & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_4(x) = h_3^{\sigma_4}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3^4(x) = f_3(h_4(x)), \quad f_3^2(x) = f_3^4(h_2(x)), \quad f_3^3(x) = f_3^2(f_3^4(x)), \quad f_3^1(x) = f_3^2(f_3(x)).$$

Рассмотрим случаи, когда $k_1 \geq k_2 \geq 2$. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{k_1-1} & 1 & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу включения $[\{f_3\}]_{G^*} \supseteq H^0(k_1, k_2)$ нам достаточно доказать, что для любого $a_s \in \{a_1, \dots, a_{k_1-1}\}$ множество $[\{f_3\}]_{G^*}$ содержит функции

$$f_{3,1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_{k_1-1} & 1 & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{3,2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{s-1} & a_{s+1} & \dots & a_{k_1-1} & a_s & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_{3,3}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{s-1} & a_{s+1} & \dots & a_{k_1-1} & a_s & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В G найдется

$$\sigma^1(x) = \begin{pmatrix} \dots & a_1 & b_1 & 1 & b_2 & \dots & b_{k_2-2} & b_{k_2-1} \\ \dots & 0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{k_2-1} & b_1 \end{pmatrix}$$

такая, что

$$h^1(x) = f_3^{\sigma^1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k_1-1} & 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k_2-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \end{pmatrix}.$$

Справедливо включение

$$[\{f_3\}]_{G^*} \supseteq H^0(k_1, k_2) \ni h_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & b_1 & * & \dots & * \\ 1 & 1 & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f_{3,1}(x) = h^2(h^1(x)).$$

При $k = 4$ для $\sigma^2(x) = (1)(a_1 0 b_1) \in G$

$$h^{3,1}(x) = f_3^{\sigma^2}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & b_1 \\ a_1 & a_1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$h^{3,2}(x) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 & 0 \\ a_1 & a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H^0(k_1, k_2).$$

Пусть

$$h^3(x) = h^{3,2}(h^{3,1}(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & b_1 \\ a_1 & a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $k \geq 5$ G содержит

$$\sigma^3(x) = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 & a_s & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ * & \dots & * & 0 & 1 & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда пусть

$$\begin{aligned} h^3(x) &= f_{3,1}^{\sigma^3}(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{s-1} & a_{s+1} & \dots & a_{k_1-1} & a_s & b_1 & \dots & b_{k_2-1} \\ a_s & a_s & a_s & \dots & \dots & \dots & \dots & a_s & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $k = 4$ для $\sigma^4(x) = (0)(a_1 1 b_1)$

$$h^{4,1}(x) = f_{3,1}^{\sigma^4}(x) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$h^{4,2}(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in H^0(k_1, k_2).$$

Пусть

$$h^4(x) = h^{4,2}(h^{4,1}(x)) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & * & * \\ 1 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

При $k \geq 5$ подгруппа G содержит

$$\sigma^5(x) = \begin{pmatrix} * & \dots & * & a_s & 0 & 1 & b_2 & \dots & b_{k_2-1} \\ * & \dots & * & b_1 & 0 & 1 & b_2 & \dots & b_{k_2-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда пусть

$$h^4(x) = f_{3,1}^{\sigma^5}(x) \begin{pmatrix} 0 & a_s & * & \dots & * \\ 1 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при $k \geq 4$ легко проверить, что

$$h^4(h^3(x)) = f_{3,2}(x), \quad f_{3,1}(x)(f_{3,2}(x)) = f_{3,3}(x).$$

Итак, доказано, что $H(k_1, k_2) \subseteq [\{f_3\}]_{G^*}$. Отсюда следует, что $[\{f_3\}]_{G^*}$ 2-транзитивна. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 2 нетрудно извлечь следующую лемму.

Лемма 3. Для любого $k \geq 4$ пусть $f(x)$ — произвольная функция из $P_k^{1(k-1)}$, G — m -транзитивная подгруппа из PS_k , $m \geq [k/2] + 1$. Тогда $QE_k \subseteq [\{f\}]_{G^*}$.

Следующая лемма является очевидной модификацией леммы 5 из [6].

Лемма 4. Для любых $k, l, k \geq 5, k \geq l \geq 3$, пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная существенная функция из P_k , принимающая l значений, G — произвольная m -транзитивная подгруппа группы PS_k , $m \geq [k/2] + 1$. Тогда $\{\{f\} \cup CF_k\}_{G^*}$ содержит 2-транзитивную подполугруппу полугруппы $P_k^{1(2)}$ или s -транзитивную подгруппу $\hat{G}$ группы PS_k , где $s \geq 4$ при $k = 2^u, u > 2$; $s \geq 3$ при $k = p^u, p$ — простое число, $p \geq 3, u \geq 1$; $s \geq 2$ при $k \neq p^u, p$ — простое число, $u \geq 1$.

Теорема 1. Пусть $k \geq 5, G$ — произвольная m -транзитивная подгруппа группы PS_k , $m \geq [k/2] + 1$. Система функций Σ из P_k G^* -полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из двух G^* -з.к. P_k^* и SLP_k .

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность: Пусть Σ целиком не содержится ни в одном из классов P_k^* и SLP_k . Тогда Σ содержит функции $f(x_1, \dots, x_{n_1}), f(x_1, \dots, x_{n_2})$, не принадлежащие P_k^*, SLP_k . Так как $h_1(x) = f_1(x, \dots, x) \neq x$, то возможно только два случая. 1. $\text{Im } h_1(x) = E_k$. Тогда $h_1(x)$ — нетривиальная подстановка группы PS_k . По лемме 4 подгруппа $\{\{h_1(x)\}\}_{G^*}$

(α) 4-транзитивна при $k = 2^u, u > 2$;

(β) 3-транзитивна при $k = p^u, p$ — простое число, $p \geq 3, u \geq 1$;

(γ) 2-транзитивна при $k \neq p^u, p$ — простое число, $u \geq 1$.

По теореме 3.1.2 работы [7] подгруппа $\{\{h_1(x)\}\}_{G^*}$ базисна. Поэтому

$$[\{h_1(x)\}, f_2(x_1, \dots, x_{n_2})]_{G^*} = P_k.$$

2. $|\text{Im } h_1(x)| < k$. Тогда в силу леммы 3 справедливо включение $CE_k \subseteq \{\{h_1(x)\}\}_{G^*}$. По лемме 4 $\{\{f_2\} \cup CE_k\}_{G^*}$ содержит либо подгруппу $\hat{G}$, удовлетворяющую условиям α, β, γ , либо 2-транзитивную подполугруппу F полугруппы $P_k^{1(2)}$. Ясно, что в первом варианте имеем $\{\{f_2\} \cup \hat{G}\}_{G^*} = P_k$ согласно теореме 3.1.2 работы [7]. Во втором варианте согласно работе [8] $P_2^{(k)} \subseteq \{\{f_2\} \cup F\}_{G^*}$. Поскольку $m \geq [k/2] + 1$, то для любых двух l -элементных подмножеств $A = \{a_1, \dots, a_l\}, B = \{b_1, \dots, b_l\}$ множества E_k существует подстановка φ из G такая, что $B = \{\varphi^{-1}(a_1), \dots, \varphi^{-1}(a_l)\}$, т.е., если функция f_2 принимает на $\Theta = C_1 \times \dots \times C_{n_2}, C_i \subset E_k, |C_i| = l - 1, i = 1, \dots, n_2, l$ заданных значений $a_1, \dots, a_l$, то функция $\langle \varphi \rangle(f)$ тоже существенна и на $\Theta' = C'_1 \times \dots \times C'_{n_2}, C'_i = \varphi^{-1}(C_i), i = 1, \dots, n_2$, принимает l -значений $b_1, \dots, b_l$. Согласно работе [3] это приводит к соотношению $P_k^{(l)} \subset [P_k^{(l-1)} \cup f_2]_{G^*}$. Продолжая такое рассуждение, получим равенство $P_k = [P_k^{(2)} \cup \{f_2\}]_{G^*} = [F \cup \{f_2\}]_{G^*}$. Теорема доказана.

Предложение 2. Пусть $k \geq 3, i \geq 2, f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из $P_k^i O_1$. Тогда $\text{ORD}(\{\{f, l_{i+1}\}\}) \leq k$.

Доказательство. Следуя работе [9], для любого $n \geq 1$ через Δ_n обозначим множество всех отношений эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. При $1 \leq m \leq n$ через Δ_n^m обозначим подмножество Δ_n , состоящее из всех эквивалентностей, которые имеют ровно m классов эквивалентности. Пусть $\delta \in \Delta_n^m$, а функция $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ по каждому числу j , $1 \leq j \leq n$, дает наименьшее число из класса эквивалентности, содержащего j . Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и любой эквивалентности $\delta \in \Delta_n^m$ через f^δ обозначим функцию $f(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)})$, существенно зависящую, очевидно, не более чем от m переменных. Для любого $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ положим

$$\text{Ker}(a) = \{(i, j): a_i = a_j\}.$$

Очевидно, что $\text{Ker}(a) \in \Delta_n$. Пусть

$$\bigcup_{m=i+1}^k \Delta_n^m = \{\delta_1, \dots, \delta_t\}.$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 1 работы [9], заключаем, что всегда найдется $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t)$ из $S_k^i O_1^* = [\{l_{i+1}\}]$ такая, что

$$\vec{B}_i g(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) = \vec{B}_i g(x_1, \dots, x_n) = x_u \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

и если набор $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ содержит более i различных элементов, а $\text{Ker}(a) = \delta_p$, то

$$g(a_1, \dots, a_n, y_1, \dots, y_p, \dots, y_t) = y_p.$$

Легко проверить, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, f^{\delta_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f^{\delta_t}(x_1, \dots, x_n)).$$

Отсюда следует, что $\text{ORD}(\{[f, l_{i+1}]\}) \leq k$. Предложение доказано.

Теорема 2. Для любого $k \geq 3$ и для любой t -транзитивной подгруппы G группы PS_k , где $t \geq [k/2] + 1$ семейство $LG_*(P_k)$ всех G^* -классов k -значной логики конечно и каждый G^* -класс имеет конечный базис.

Доказательство. Нам достаточно доказать, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящей от всех n переменных, $n \geq k^3$, G^* -порядок класса $\{[f]\}_{G^*}$ не больше k^3 .

Если $|\text{Im } f(x, \dots, x)| \leq k - 1$, то $CE_k \subset \{[f]\}_{G^*}$ согласно лемме 3. Если $|\text{Im } f(x_1, \dots, x_n)| = l \geq 3$, то так же, как в доказательстве теоремы 1, находим, что $\{[f]\}_{G^*} \equiv P_k^{(l)}$. Отсюда легко следует, что $\text{ORD}(\{[f]\}_{G^*}) = 2$.

Предположим, что $|\text{Im } f(x_1, \dots, x_n)| = 2$. Если f не квазилинейна, то так же, как в доказательстве предложения 9 работы [6], находим, что $\{[f]\}_{G^*} = P_k^{(2)}$. Отсюда легко следует, что $\text{ORD}(\{[f]\}_{G^*}) = 2$. Если f квазилинейна и $f \notin LQ_k^+$ при четном k то так же, как в доказательствах предложений 7, 8 работы [6], находим, что $\{[f]\}_{G^*} \equiv LQ_k$. Отсюда легко следует, что $\text{ORD}(\{[f]\}_{G^*}) = 2$. Если $f \in LQ_k^+$, то аналогично предложению 8 работы [6] находим, что $\{[f]\}_{G^*} \equiv LQ_k^+$. Отсюда легко следует, что $\text{ORD}(\{[f]\}_{G^*}) = 2$.

Предположим, что $f(x, \dots, x) = x$ и рассмотрим всевозможные случаи относительно этого предположения.

Случай I. $\vec{B}_u f(x_1, \dots, x_n) = x_v$, $k - 1 \geq u \geq 2$, $v \in \{1, \dots, n\}$, $I_{k,u+1} f(x_1, \dots, x_n) \neq x_v$. Подходящей подстановкой переменных из $f(x_1, \dots, x_n)$ можно получить такую $g(x_1, \dots, x_{u+1})$, что

$$\vec{B}_u g(x_1, \dots, x_{u+1}) = x_1, \quad g(a_1, \dots, a_{u+1}) = a_t \neq a_1$$

для некоторого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_{u+1}) \in I_{k,u+1}^{u+1}$.

1. Пусть $g(\tilde{b}) \in M_{\tilde{b}}$ для любого набора $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_{u+1}) \in I_{k,u+1}^{u+1}$. Действие группы G разбивает $I_{k,u+1}^{u+1}$ на непересекающиеся орбиты $O_1^*, \dots, O_\mu^*$. Можно предполагать, без ограничения общности, что $a_t \in \{a_2, \dots, a_{u+1}\}$, $(a_1, \dots, a_{u+1}) \in O_1^*$. Пусть

$$g_1(x_1, \dots, x_{u+1}) = g(x_1, \dots, x_{t-1}, g(x_1, \dots, x_t), x_{t+1}, \dots, x_{u+1}).$$

Очевидно, что

$$g_1(a_1, \dots, a_{u+1}) = a_t, \quad g_1(b_1, \dots, b_{u+1}) \in \{b_1, b_t\}$$

для любого набора $\tilde{b}_1 = (b_1, \dots, b_{u+1}) \in I_{k,u+1}^{u+1}$. Пусть для некоторого $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_{u+1}) \in O_1^* \setminus \{\tilde{a}\}$ справедливо равенство $g_1(\tilde{c}) = c_1$, тогда в $G^*(g_1)$ найдется такая $g_2(x_1, \dots, x_{u+1})$, что $\vec{B}_u g_2 = x_1$, $g_2(c_1, \dots, c_{u+1}) = c_t$. Пусть

$$g_3(x_1, \dots, x_{u+1}) = g_2(g_1(x_1, \dots, x_{u+1}), x_2, \dots, x_{u+1}).$$

Легко видеть, что $\vec{B}_u g_3 = x_1$, $g_3(b_1, \dots, b_{u+1}) = b_t$ для любого $\tilde{b} \in I_{k,u+1}^{u+1}$ такого, что $g_1(\tilde{b}) = b_t$. Кроме того $g_3(\tilde{c}) = c_t$. Продолжая такую процедуру из g_1 G^* -замыканием можно получить $g_{\tau_1}(x_1, \dots, x_{u+1})$ такую, что $\vec{B}_u g_{\tau_1} = x_1$, $g_{\tau_1}(x_1, \dots, x_{u+1}) \equiv x_t$ на O_1^* , $g_{\tau_1}(b_1, \dots, b_{u+1}) \in \{b_1, b_t\}$ для любого $\tilde{b} \in O_2^* \cup \dots \cup O_\mu^*$. Если $u + 1 \leq [k/2] + 1$, то $\mu = 1$ и перестановкой переменных можно получить l_{u+1} из g_{τ_1} . Предположим, что $u + 1 > [k/2] + 1$, $\mu \geq 2$ и в $\{g_1\}_{G^*}$ найдется $g_{\tau_\gamma}(x_1, \dots, x_{u+1})$ такая, что $\vec{B}_u g_{\tau_\gamma} = x_1$, $g_{\tau_\gamma} = x_t$ на $O_1^* \cup \dots \cup O_\gamma^*$, $1 \leq \gamma \leq \mu$. Если $g_{\tau_\gamma}(b_1^1, \dots, b_{u+1}^1) = b_t^1$ для некоторого набора $\tilde{b}^1 = (b_1^1, \dots, b_{u+1}^1) \in O_{\gamma+1}^*$, то аналогично предыдущему рассуждению в $\{g_{\tau_\gamma}\}_{G^*}$ найдется $g_{\tau_{\gamma+1}}(x_1, \dots, x_{u+1})$ такая, что $\vec{B}_u g_{\tau_{\gamma+1}} = x_1$, $g_{\tau_{\gamma+1}} = x_t$ на $O_1^* \cup \dots \cup O_{\gamma+1}^*$. В противном случае $g_{\tau_\gamma} \equiv x_1$ на $O_{\gamma+1}^*$. Поскольку степень транзитивности группы $G \geq [k/2] + 1$, согласно предположению 1 в $O_{\gamma+1}^*$ всегда найдется вектор $\tilde{a}^1 = (a_1^1, \dots, a_{u+1}^1)$ такой, что $a_1^1 = a_1$, $a_t^1 = a_t$, $M_{\tilde{a}^1} = M_{\tilde{a}}$. Пусть

$$g_{\tau_{\gamma+1}}(x_1, \dots, x_{u+1}) = g_{\tau_\gamma}(x_1, x_{\delta(2)}, \dots, x_{\delta(t-1)}, x_t, x_{\delta(t+1)}, \dots, x_{u+1}),$$

где перестановка

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{t-1} & x_t & x_{t+1} & \dots & x_{u+1} \\ x_1 & x_{\delta(2)} & \dots & x_{\delta(t-1)} & x_t & x_{\delta(t+1)} & \dots & x_{\delta(u+1)} \end{pmatrix}$$

такова, что

$$(a_1^1, a_{\delta(2)}^1, \dots, a_{\delta(t-1)}^1, a_t^1, a_{\delta(t+1)}^1, \dots, a_{\delta(u+1)}^1) = (a_1, a_2, \dots, a_{u+1}).$$

Пусть

$$g_{\tau_\gamma+2}(x_1, \dots, x_{u+1}) = g_{\tau_\gamma+1}(g_{\tau_\gamma}(x_1, \dots, x_{u+1}), x_2, \dots, x_{u+1}).$$

Тогда $\vec{B}_u g_{\tau_\gamma+2} = x_1$, $g_{\tau_\gamma+2}(b_1, \dots, b_{u+1}) = b_t$ для любого $\tilde{b} \in I_{k,u+1}^{u+1}$ такого, что $g_{\tau_\gamma}(\tilde{b}) = b_t$. Кроме того, $g_{\tau_\gamma+2}(a_1^1, \dots, a_{u+1}^1) = a_t^1$. Возвращаемся к рассмотренной ситуации. Тем самым доказано, что $\{\{g\}\}_{G^*}$ содержит $g_{\tau_\mu}(x_1, \dots, x_{u+1})$ такую, что $\vec{B}_u g_{\tau_\mu} = x_1$, $I_{k,u+1} g_{\tau_\mu} = x_t$, т.е. $\{\{g\}\}_{G^*} \ni l_{u+1}$.

2. Пусть $g(e_1, \dots, e_{u+1}) = e_{u+2} \in E_k \setminus M_{\tilde{e}}$ для некоторого $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_{u+1}) \in I_{k,u+1}^{u+1}$. Без ограничения общности можно предположить, что $\tilde{e} = \tilde{a}$, $e_{u+2} = a_{u+2}$, $\{a_1, \dots, a_k\} = E_k$. Построим последовательность формул $u^0, u^1, u^2, \dots, u^k$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} u^0 &= u^0[g] = g(x_1, \dots, x_{u+1}), \\ u^1 &= u^1[g, g_1^1, g_2^1] = g(x_1, \dots, x_{u+1}, g_1^1(x_1, x_{i_2^{1,1}}, \dots, x_{i_{u+1}^{1,1}}), g_2^1(x_1, x_{i_2^{1,2}}, \dots, x_{i_{u+1}^{1,2}}), \\ &\dots \\ u^r &= u^r[g, g_1^1, g_2^1, \dots, g_1^r, \dots, g_{2^r}^r], \quad k \geq r \geq 1, \end{aligned}$$

получена из формулы $u^{r-1}[g, g_1^1, g_2^1, \dots, g_1^{r-1}, \dots, g_{2^{r-1}}^{r-1}]$ подстановкой функции $g_{\kappa}^r(x, x_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, x_{i_{u+1}^{r,\kappa}})$ из $\{\{g\}\}_{G^*}$, $\kappa = 1, \dots, 2^r$, вместо аргументов $x_{i_u^{r-1,1}}, x_{i_{u+1}^{r-1,1}}, \dots, x_{i_u^{r-1,2^{r-1}}}, x_{i_{u+1}^{r-1,2^{r-1}}}$ функций $g_1^{r-1}, \dots, g_{2^{r-1}}^{r-1}$ соответственно, где $\{x_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, x_{i_{u+1}^{r,\kappa}}\}$ — u -элементные подмножества множества $X_k = \{x_1, \dots, x_k\}$, $\vec{B}_u g_{\kappa}^r = x_1$,

$$g_{\kappa}^r(a_1, a_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, a_{i_{u+1}^{r,\kappa}}) = a_{i_{u+1}^{r-1,(\kappa+1)/2}} \in E_k \setminus \{a_1, a_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, a_{i_{u+1}^{r,\kappa}}\}$$

при нечетном κ ,

$$\vec{B}_u g_{\kappa}^r = x_1, \quad g_{\kappa}^r(a_1, a_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, a_{i_{u+1}^{r,\kappa}}) = a_{i_{u+1}^{r-1,\kappa/2}} \in E_k \setminus \{a_1, a_{i_2^{r,\kappa}}, \dots, a_{i_{u+1}^{r,\kappa}}\}$$

при четном κ , $\kappa = 1, \dots, 2^r$ (такое построение возможно, согласно предложению 1). С помощью формулы u^k построим формулы $u_0^*, u_1^*, \dots, u_q^*$, $q = \binom{k-1}{2}$ следующим индуктивным образом. Пусть $\{(i_1, j_2), \dots, (i_q, j_q)\}$ — множество всех пар различных чисел из $\{2, \dots, k\} \times \{2, \dots, k\}$. Пусть $u_0^* = u^k$. Предположим, что $u_0^*, \dots, u_d^*$, $0 \leq d < q$, построены. Опишем способ построения u_{d+1}^* . Если $\{x_{i_{d+1}}, x_{j_{d+1}}\} \subset X_{g_{d+1}^k}$ (X_g — список переменных функции g), то $u_{d+1}^* = u_d^*$. В противном случае существует $x_t \in X_{g_{d+1}^k} \setminus \{x_{i_{d+1}}, x_{j_{d+1}}, x_1\}$. Найдется $g_{d+1}^{k+1}(x_1, x_{i_2^{k+1,d+1}}, \dots, x_{i_{u+1}^{k+1,d+1}}) \in G^*(g)$ такая, что $\vec{B}_u g_{d+1}^{k+1} = x_1$,

$$\begin{aligned} g_{d+1}^{k+1}(a_1, a_{i_2^{k+1,d+1}}, \dots, a_{i_{u+1}^{k+1,d+1}}) &= a_t \in E_k \setminus \{a_1, a_{i_2^{k+1,d+1}}, \dots, a_{i_{u+1}^{k+1,d+1}}\}, \\ \{i_{d+1}, j_{d+1}\} &\subset \{i_2^{k+1,d+1}, \dots, i_{u+1}^{k+1,d+1}\}. \end{aligned}$$

Тогда формула u_{d+1}^* получена из формулы u_d^* подстановкой функции $g_{d+1}^{k+1}(x_1, x_{i_2^{k+1,d+1}}, \dots, x_{i_{u+1}^{k+1,d+1}})$ вместо аргумента x_t функции g_{d+1}^r формулы u_d^* . Не трудно видеть, что u_q^* реализует функцию $g^*(x_1, \dots, x_k)$ такую, что $\vec{B}_{k-1} g^* = x_1$, $g^*(a_1, \dots, a_k) \neq a_1$. Рассуждая аналогично подслучаю 1, находим, что $l_k \in$

$\{\{g^*\}\}_{G^*}$. Для любого r , $3 \leq r \leq k - u$, согласно предложению 1 найдется φ_r из G такая, что $\varphi_r(a_1) = a_1$, $\varphi_r(a_{u+r}) = a_{u+2}$, $\{\varphi_r^{-1}(a_2), \dots, \varphi_r^{-1}(a_{u+1})\} = \{a_2, \dots, a_{u+1}\}$. Тогда $\langle \varphi_r \rangle(g(\varphi_r^{-1}(a_1), \dots, \varphi_r^{-1}(a_{u+1}))) = a_{u+r}$. Легко видеть, что

$$(\varphi_r^{-1}(a_1), \dots, \varphi_r^{-1}(a_{u+1})) = (a_1, a_{\delta_r(2)}, \dots, a_{\delta_r(u+1)}),$$

где δ_r — некоторая перестановка, действующая на $\{2, \dots, u+1\}$. Пусть

$$g_{u+r}^*(x_1, \dots, x_u) = \langle \varphi_r \rangle(g(a_1, a_{\delta_r(2)}, \dots, a_{\delta_r(u+1)})).$$

Ясно, что $\tilde{B}_u g_{u+r}^* = x_1$, $g_{u+r}^*(a_1, \dots, a_{u+1}) = a_{u+r}$. Пусть

$$g_0^*(x_1, \dots, x_{u+1}) = l_k(x_1, \dots, x_u, g(x_1, \dots, x_{u+1})),$$

$$g_{u+3}^*(x_1, \dots, x_{u+1}), \dots, g_k^*(x_1, \dots, x_{u+1}, x_{u+1}).$$

Тогда $\tilde{B}_u g_0^* = x_1$, $g_0^*(b_1, \dots, b_{u+1}) \in \{b_1, b_{u+1}\}$ для любого $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_{u+1}) \in I_{k, u+1}^{u+1}$. Кроме того, $g_0^*(a_1, \dots, a_{u+1}) = a_{u+1}$. Возвращаемся к рассмотренному подслучаю 1, т.е. можно получить l_{u+1} из $\{\{f\}\}_{G^*}$. Тогда согласно предложению 2 $\text{ORD}[\{\{f\}\}_{G^*}] \leq k$.

Случай II. $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^2 \tilde{C}_4 \setminus P_k^2 O_1$.

1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in M_k$, где $M(k) = P_k^2 \tilde{O}_1 \setminus P_k^2 O_1$ при $k \geq 3$, $k \neq 4$ и $M(4) = P_4^2 \tilde{O}_1 \setminus P_4^2 \tilde{O}_1$. Подстановкой переменных x, y из функции f можно получить $f_1(x, y) \in M(k)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $B_{\{0,1\}} f_1(x, y) = x$ и $f_1(a_1, b_1) = b_1$ для некоторой пары $(a_1, b_1) \in E_k^2$. Предположим, что $f_1(a_1, b_i) = b_i$, $f_1(a_1, b_j) = a_1$, где $i = 1, \dots, q$, $j = q+1, \dots, k-1$. Если $k \geq 5$, то в G найдется

$$\pi_1 = (b_{q+1} b_q \dots)(01)(a_1)(\dots) \dots (\dots).$$

Пусть $f_1^1(x, y) = f_1(f_1^{\pi_1}(x, y), y)$. Легко видеть, что $B_{\{0,1\}} f_1^1(x, y) = x$, $f_1^1(a, b) = b$ на таких наборах (a, b) , что $f_1(a, b) = b$. Кроме того $f_1^1(a_1, b_{q+1}) = b_{q+1}$. Таким образом, из $\{\{f_1\}\}_{G^*}$ можно получить $f_{1,1}$ такую, что $B_{\{0,1\}} f_{1,1}(x, y) = x$, $f_{1,1}(a_1, b) = b$ для любого $b \in E_k$. Предположим, что $f_{1,1}(a_2, b_t) = a_2$ для некоторого $b_t \in E_k$. В G найдется

$$\pi_2 = (01)(b_t)(a_2 a_1 \dots)(\dots) \dots (\dots).$$

Пусть $f_{1,2}(x, y) = f_{1,1}(f_{1,1}^{\pi_2}(x, y), y)$. Ясно, что $B_{\{0,1\}} f_{1,2}(x, y) = x$, $f_{1,2}(a, b) = b$ на таких наборах (a, b) , что $f_{1,1}(a, b) = b$. Кроме того, $f_{1,2}(a_2, b_t) = b_t$. Продолжая эту процедуру, из f_1 G^* -замыканием можно получить $f^{\tilde{0}}(x, y)$.

Очевидной модификацией этой схемы можно получить аналогичный результат при $k = 3, 4$. Пусть $f_2(x, y, z) = f^{\tilde{0}}(f^{\tilde{0}}(x, y), f^{\tilde{0}}(z, x))$. Легко проверить, что $\tilde{B}_2 f_2(x, y, z) = x$, $f_2(0, 2, 1) = 1$. Из случая I следует, что $\{\{f_1\}\}_{G^*} \supseteq \{\{f_2\}\}_{G^*} \ni l_3$.

2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_4^2 \tilde{O}_1 \setminus P_4^2 O_1$ при $k = 4$. Аналогично подслучаю 1, легко доказать, что $f^{\tilde{0}}(x, y) \in \{\{f\}\}_{G^*}$. Пусть $\tilde{f}_1(x, y, z) = f^{\tilde{0}}(f^{\tilde{0}}(f^{\tilde{0}}(x, y), f^{\tilde{0}}(z, x)), z)$. Легко проверить, что $f_1(x) = x$ на $\{0, 1\}^3 \cup \{2, 3\}^3$ и $f_1 = z$ на остальных наборах. Пусть $\delta_1 = (0231)$, $\tilde{f}_2 = \langle \delta_1 \rangle(f_1)$, $\tilde{f}_3(x, y, z) = f^{\tilde{0}}(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, $\delta_2 = (0123)$, $\tilde{f}_4 = \langle \delta_2 \rangle(f_3)$. Тогда нетрудно проверить, что $l_3(x, y, z) = f^5(z, y, x)$, где $f^5(x, y, z) = f^{\tilde{0}}(\tilde{f}_3(x, y, z), \tilde{f}_4(x, y, z))$.

3. Пусть $f \in P_k^2 \bar{C}_4 \setminus P_k^2 \bar{O}_1$. Без ограничения общности можно предполагать, что $B_{\{0,1\}} f \in C_4 \setminus O_1$. Согласно предложению Р [10] $B_{\{0,1\}}[\{f\}]_{G^*}$ либо содержит класс D_2 , либо совпадает с классом L_4 .

(а) Если $D_2 \subseteq B_{\{0,1\}}[\{f\}]_{G^*}$, то в $[\{f\}]_{G^*}$ найдется $f_3(x, y, z)$ такая, что $B_{\{0,1\}} f_3(x, y, z) = B_{\{0,1\}} d(x, y, z)$. Если $\bar{B}_2 f_3 = \bar{B}_2 d$, то f_3 — мажоритарная функция. Согласно доказательству леммы 4 работы [9] $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq k^3$. Если $f_3(a, a, b) = b$ для некоторых различных $a, b \in E_k$, то подстановкой переменных из f_3 можно получить $f_3^1(x, y)$ такую, что $B_{\{0,1\}} f_3^1(x, y) = x$, $f_3^1(a, b) = b$. Очевидной модификацией схемы, изложенной в пункте 1, можно получить $f_3^2(x, y) \in [\{f_3^1\}]_{G^*}$ такую, что $f_3^2(x, y) \in P_k^2 \bar{O}_1 \setminus P_k^2 O_1$. Согласно пунктам 1, 2 $[\{f_3^2\}]_{G^*}$ содержит либо $\{f^{\bar{0}}, l_3\}$ для любого $k \geq 3$, либо $\{f^{\bar{0}}, l_3\}$ для $k = 4$.

(б) Если $L_4 = B_{\{0,1\}}[\{f\}]_{G^*}$, то в $[\{f\}]_{G^*}$ найдется $f_4(x, y, z)$ такая, что $B_{\{0,1\}} f_4(x, y, z) = x \oplus y \oplus z = B_{\{0,1\}} s(x, y, z)$.

(α) Если $\bar{B}_2[\{f\}]_{G^*} = \bar{B}_2 S_k L_k^*$, то $\bar{B}_2 f_4 = \bar{B}_2 s$.

Если $f_4(x, y, z) = s(x, y, z)$ с точностью до перестановки переменных, то $[\{f_4\}]_{G^*} = S_k L_k^* \ni l_3(x, y, z)$. Легко видеть, что $\bar{B}_2[\{f_4\}]_{G^*} = \bar{B}_2[\{f\}]_{G^*}$. Отсюда и из доказательства леммы 2 работы [9] следует, что из функций f_4, l_3 и всех таких функций $f^\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$, $\varepsilon = \Delta_n^3 \cup \dots \cup \Delta_n^k$, которые существенно зависят не более, чем от k переменных, суперпозициями можно построить f , т.е. $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq k$.

Пусть $f_4(a_1, a_2, a_3) = a_i$, $f_4(b_1, b_2, b_3) = b_j$ для некоторых 3-элементных наборов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, где $\bar{a} \neq \bar{b}$, $i \neq j$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Если $j \in \{1, 2, 3\}$, то без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = 3$. Пусть $f_{4,1}(x, y, z) = f_4(f_4(x, y, z), y, z)$. Тогда $\bar{B}_2 f_{4,1} = x$, $f_{4,1}(b_1, b_2, b_3) = b_2$. Согласно рассмотренному случаю 1 справедливо включение $l_3 \in [\{f_{4,1}\}]_{G^*}$. Возвращаемся к предыдущей ситуации. Если $j = 4$ и $b_4 \notin \{b_1, b_2, b_3\}$, то в $[\{f_4\}]_{G^*}$ найдется $f_{4,2}(x, y, z)$ такая, что $\bar{B}_2 f_{4,2} = \bar{B}_2 s$, $f_{4,2}(b_4, b_2, b_3) = b_2$. Пусть $f_{4,3}(x, y, z) = f_{4,2}(f_4(x, y, z), y, z)$. Тогда $\bar{B}_2 f_{4,3} \equiv x$, $f_{4,3}(b_1, b_2, b_3) = b_2$. Приходим к предыдущей ситуации.

Пусть $f_4(a_1, a_2, a_3) = a_4 \notin \{a_1, a_2, a_3\}$ для произвольного 3-элементного набора (a_1, a_2, a_3) . Если $k \geq 5$, то в $[\{f_4\}]_{G^*}$ найдется $f_{4,4}(x, y, z)$ такая, что $\bar{B}_2 f_{4,4} = \bar{B}_2 s$, $f_{4,4}(a_4, a_2, a_3) = a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Пусть $f_{4,5}(x, y, z) = f_{4,4}(f_4(x, y, z), y, z)$. Тогда $\bar{B}_2 f_{4,5} = x$, $f_{4,5}(a_1, a_2, a_3) = a_5$. Приходим к рассмотренной ситуации. При $k = 4$ имеем $f_4(x, y, z) = f_0(x, y, z)$. Если $[\{f_0\}]_{G^*} = [\{f\}]_{G^*}$, то $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 3$. В противном случае, согласно определению з.к. $S_4^4 L_4$ (см. [11]), подстановкой переменных и функции f_0 из функции f можно получить $f_{4,6}(x, y, z) \notin S_4^4 L_4$. Легко видеть, что $f_{4,6}$ удовлетворяет условиям рассмотренных ситуаций.

(β) Если $\bar{B}_2[\{f\}]_{G^*} \neq \bar{B}_2 S_k L_k^*$, то из f подстановкой переменных x, y некоторой модификацией схемы из пункта 1 можно получить $f_5(x, y) \in P_k^2 \bar{O}_1 \setminus P_k^2 O_1$. Возвращаемся к рассмотренной ситуации.

Итак в случае II нами доказано, что либо $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq k^3$, либо $[\{f\}]_{G^*}$ содержит $\{f^{\bar{0}}, l_3\}$, либо $[\{f\}]_{G^*}$ содержит $\{f^{\bar{0}}, l_3\}$ при $k = 4$.

Предположим, что $[\{f\}]_{G^*} \supset \{f^{\bar{0}}, l_3\}$. Согласно предложению Р [10] и результатам работы [1] всегда существуют $f^1(x, y, z), \dots, f^{s_1}(x, y, z)$ ($s_1 = k(k-1)/2$) из $[\{f\}]_{G^*}$ такие, что $B_{l_t^2} \bar{f}^t(x_1, \dots, x_n) = B_{l_t^2} f(x_1, \dots, x_n)$, $t = 1, \dots, s_1$. Используем индукцию и предположим, что $[\{f^{\bar{0}}, \bar{f}^1, \dots, \bar{f}^q\}]_{G^*}$ содержит $h^q(x_1, \dots, x_n)$ такую, что $B_{l_t^2} h^q \equiv B_{l_t^2} f$, $t = 1, \dots, q$, $1 \leq q < s_1$. В $[\{f^{\bar{0}}\}]_{G^*}$ найдется $f_{q+1}^{\bar{0}}(x, y)$ такая,

что $f_{q+1}^{\bar{0}}(x, y) = y$ на $B_{I_{q+1}^2}$ и $f_{q+1}^{\bar{0}}(x, y) = x$ на остальных наборах. Пусть

$$h^{q+1}(x_1, \dots, x_n) = f_{q+1}^{\bar{0}}(h^q(x_1, \dots, x_n), \tilde{f}^{q+1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Очевидно, что $B_{I_t^2} h^{q+1} = B_{I_t^2} f$, $t = 1, \dots, q+1$. Тем самым доказано, что $[\{f^{\bar{0}}, \tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^{s_1}\}]_{G^*}$ содержит $h^{s_1}(x_1, \dots, x_n)$ такую, что $\vec{B}_2 h^{s_1} = \vec{B}_2 f$. По аналогичной схеме такой же результат получается при $[\{f\}]_{G^*} \supset \{f^{\bar{0}}, l_3\}$ ($k = 4$). Из h^{s_1}, l_3 и всех таких $f^\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$, $\varepsilon = \Delta_n^3 \cup \dots \cup \Delta_n^q$, которые зависят существенно не более, чем от k переменных, суперпозициями можно получить функцию f , т.е. $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq k$.

Случай III. $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k^\alpha \setminus P_k^2 \vec{C}_4$. Рассмотрим следующие всевозможные подслучаи, где $k = 4$ в подслучаях 1–3 и $k = 3$ в подслучае 4 и $k \geq 3$ в подслучае 5.

1. $f \in A_4^4 L_4$. Согласно работе [11], $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 4$.

2. $f \in VQL_4^4 \setminus A_4^4 L_4$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n,$$

где $a_i \neq 0$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, $a_1 + \dots + a_n = 0$, $b_1 + \dots + b_n = 1$. Покажем, что $q^V(x, y) = x^2 + y^2 + x \in [\{f\}]_{G^*}$. Подстановкой переменных из f можно получить

$$g(x_1, x_2) = ax_1^2 + ax_2^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

где $a \neq 0$, $c_1 + c_2 = 1$. Пусть $\sigma_1 = 2x$, $\sigma_2 = 3x$. Если $a = 2$, $a = 3$, то соответственно

$$g_1(x_1, x_2) = g^{\sigma_2}(x_1, x_2) = g^{\sigma_1}(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Если $(c_1, c_2) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, то перестановкой переменных из g_1 можно получить $g^v(x_1, x_2)$. Из оставшихся случаев, когда $(c_1, c_2) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$ достаточно рассмотреть случаи, когда $(c_1, c_2) \in (2, 3)$. Тогда

$$g_2(x_1, x_2) = g_1^{\sigma_1}(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 3x_2,$$

$$g_3(x_1, x_2) = g_1^{\sigma_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 3x_2,$$

$$g_4(x_1, x_2) = g_1(g_3(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = 3x_1^2 + 2x_2^2 = \gamma(x_1, x_2),$$

$$g_5(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \in [\{\gamma_4\}]_{G^*} = A_4^4 L_4,$$

$$g_6(x_1, x_2) = g_5(g_1(x_1, x_2), g_4(x_1, x_2), x_2) = q^v(x_1, x_2).$$

Покажем, что $[\{q^v\}]_{G^*} \ni f$. Пусть

$$q_1^v(x, y) = \langle \sigma_1 \rangle (q^v(x, y)) = 2x^2 + 2y^2 + x.$$

Тогда

$$q^v(q^v(x, y), q_1^v(y, x)) = 3x + 2y = \gamma_4(x, y).$$

Согласно работе [11]

$$[\{\gamma_4\}]_{G^*} \equiv A_4^4 L_4 \ni f_0(x, y, z) = x + y + z.$$

Отсюда следует, что

$$q_2^v(x, y, z) = f_0(q^v(x, y), x, z) = x^2 + y^2 + z.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \rangle (q_2^v(x, y, z)) &= 2x^2 + 2y^2 + z, \\ \langle \sigma_2 \rangle (q_2^v(x, y, z)) &= 3x^2 + 3y^2 + z, \\ q_2(x, y, 3y^2 + 3z^2 + u) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + u. \end{aligned}$$

Легко проверить, что из функций

$$3x + 2y, \quad x^2 + y^2 + z, \quad 2x^2 + 2y^2 + z, \quad 3x^2 + 3y^2 + z, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + u$$

суперпозициями можно построить все трехместные функции из VQL_4^α . Пусть $n > 3$. Предположим, что среди коэффициентов $b_1, \dots, b_n$ есть два одинаковых, например, $b_1 = b_2$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_2x_1^2 + a_2x_2 + b_1x_1 + b_1x_2 + f(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n).$$

Пусть все три числа b_1, b_2, b_3 различны. Так как в поле $GF(4)$ $1 + 2 + 3 = 0$, из равенства

$$b_1 + \dots + b_n = 1,$$

следует, что среди коэффициентов $b_1, \dots, b_n$ есть хотя бы один ненулевой. Тогда этот коэффициент совпадает с одним из коэффициентов b_1, b_2, b_3 и мы вновь можем выбрать тройку ненулевых коэффициентов, среди которых имеются два одинаковых. Итак, этой индуктивной схемой доказано, что $f \in \{[q^v]\}_{G^*}$, т.е. $ORD[\{f\}]_{G^*} = 2$.

3. $f \in V_4^\alpha$. Если $f \in V_4^2O_1$, то возвращаемся к случаю I. Если $f \in V_4^2\tilde{D}_1 \setminus V_4^2O_1$, то аналогично подслучаям 2, 3 случая II находим, что $ORD[\{f\}]_{G^*} \leq 4^3$.

Если $f \in V_4^\alpha \setminus (V_4^2\tilde{D}_1 \cup VQL_4^\alpha)$, то подстановкой переменных из f можно получить $g_1(x, y) \in V_4^\alpha \setminus V_4^2\tilde{D}_1$. Покажем, что $A_4^4L_4 \subseteq \{[g_1]\}_{G^*}$. Рассмотрим всевозможные ситуации.

(а) Пусть

$$g_1(x, y) = \begin{cases} v, v \in \{z, u\}, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_i^1, i = 1, 2, 3, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Тогда g_1 с точностью до перестановки переменных совпадает с γ_4 .

(б) Для некоторых i, j, t , $\{i, j, t\} = \{1, 2, 3\}$ пусть

$$g_1(x, y) = \begin{cases} v, v \in \{z, u\}, & \text{если } \{x, y, z, u\} \in V_i^1 \cup V_j^1, \\ v', v' \in \{z, u\} \setminus \{v\}, & \text{если } \{x, y, z, u\} \in V_t, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Благодаря отношению G^* и перестановке переменных достаточно рассмотреть ситуацию, когда $i = 1, j = 2, t = 3, v = u, v' = z$. Пусть $\varphi_1 = (032)(1)$, $\varphi_2 = (023)(1)$. Легко проверить, что

$$h^1(x, y) = g^{\varphi_1}(g^{\varphi_2}(x, y), g_1(x, y)) = x^2 + y^2 + 3x + 2y.$$

Согласно предыдущему подслучаю 2 имеем $\gamma_4 \in VQL_4^\alpha = \{[h_1^1]\}_{G^*}$.

(с) Для некоторых i, j, t , $\{i, j, t\} = \{1, 2, 3\}$ пусть

$$g_1(x, y) = \begin{cases} v, v \in \{z, u\}, & \text{если } \{x, y, z, u\} \in V_i^1 \cup V_j^1, \\ v', v' \in \{x, y\}, & \text{если } \{x, y, z, u\} \in V_t^1, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Пусть $i = 1, j = 2, t = 3$. Если $v = u, v' = x$, то

$$h_1^2(x, y) = g^{\varphi_1}(g_1(x, y), y) = \begin{cases} v, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_2^1 \cup V_3^1, \\ z, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_1^1, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Возвращаемся к ситуации (b). Если $v = u, v' = y$, то

$$h_1^3(x, y) = g^{\varphi_1}(x, g_1(x, y)) = \begin{cases} z, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_1^1 \cup V_2^1, \\ u, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_3^1, \\ x, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Снова возвращаемся к ситуации (b). Остальные варианты этого случая сводятся к рассмотренным благодаря G^* и перестановке переменных.

(d) Для некоторого i , $1 \leq i \leq 3$ пусть

$$g_1(x, y) = \begin{cases} v, v \in \{z, u\}, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_i^1, \\ v', v' \in \{x, y\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть варианты, когда $v = u, v' \in \{x, y\}$. При $v' = x$

$$h_1^2(x, y) = \begin{cases} u, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_1^1 \cup V_2^1, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $v' = y$

$$h_1^4(x, y) = g_1^{\varphi_2}(x, g_1(x, y)) = \begin{cases} u, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_1^1 \cup V_3^1, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В обоих вариантах приходим к ситуации (с).

(е) Для некоторых i, j, t , $\{i, j, t\} = \{1, 2, 3\}$,

$$g_1(x, y) = \begin{cases} u, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_i^1, \\ z, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_j^1, \\ v, v \in \{x, y\}, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_t^1. \end{cases}$$

При $v = y, (i, j, t) = (1, 2, 3)$ ($(i, j, t) = (3, 1, 2), (i, j, t) = (2, 3, 1)$) имеем

$$g_1(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + x \quad (g_1(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x, \quad g_1(x, y) = x^2 + y^2 + x).$$

Согласно подслучаю 2 $\gamma_4 \in \{[g_1]\}_{G^*} = VQL_4^\alpha$. При $v = y, (i, j, t) = (2, 1, 3)$

$$h_1^5(x, y) = g_1(g^{\varphi_1}(x, y), y) = \begin{cases} z, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_3^1, \\ y & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Возвращаемся к ситуации (d). Остальные варианты сводятся к рассмотренным благодаря G^* и перестановке переменных.

(g) Для некоторых i, j , $1 \leq i \neq j \leq 3$,

$$g_1(x, y) = \begin{cases} v, v \in \{u, z\}, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_i^1, \\ x, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_j^1, \\ y & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $v = u$, $(i, j) = (1, 3)$, $((i, j) = (3, 2), (i, j) = (2, 1))$ соответственно

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2 + 3x + 2y, \quad g_1(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 3x + 2y, \quad g_1(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 3x + 2y.$$

При $v = u$, $(i, j) = (1, 2)$

$$h_1^2(x, y) = \begin{cases} u, & \text{если } (x, y, z, u) \in V_1^1 \cup V_2^1, \\ y & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Приходим к ситуации (c). Остальные варианты сводятся к рассмотренным благодаря G^* и перестановке переменных.

Итак, доказано, что $\{\{g_1\}\}_{G^*} \supset \{\{\gamma_4\}\}_{G^*} = A_4^4 L_4$.

Обычным образом определим $U(R)$ — класс всех k -значных функций, сохраняющих отношение R .

Рассуждая аналогично доказательству леммы 29 работы [11], находим, что $VQL_4^\alpha = U(R)$, где столбцы отношения R , согласно рассуждению подслучая 2, можно рассматривать как столбцы значений селекторных функций $e_1^3(x, y, z)$, $e_2^3(x, y, z)$, $e_3^3(x, y, z)$ и некоторых трехместных функций $r(x, y, z)$ из VQL_4^α . Так как $f \notin U(R)$, можно выбрать $r_1(x, y, z), \dots, r_n(x, y, z) \in VQL_4^\alpha$ такие, что $h(x, y, z) = f_2(r_1(x, y, z), \dots, r_n(x, y, z))$ не сохраняет отношения R . Если $\bar{B}_2 h = \bar{B}_2 r$ для некоторой $r \in VQL_4^\alpha$, то $g(x, y, z) = f_0(r(x, y, z), h(x, y, z), f_0(x, y, z)) \neq f_0(x, y, z)$, $\bar{B}_2 g = \bar{B}_2 f_0$. Из g подстановкой переменных можно получить $g'(x, y) \in P_4^2 O_1 \setminus O_1$. Согласно случаю I имеем $l_3 \in \{\{g'\}\}_{G^*}$. В силу работы [11] $\{\{l_3, \gamma_4\}\} = A_4 \ni d$. Это означает, что $\text{ORD}[\{f\}] \leq 4^3$. Если $\bar{B}_2 h \neq \bar{B}_2 r$ для любой $r \in VQL_4^\alpha$, то опять, рассуждая, как в доказательстве леммы 29 работы [11], можно получить, что $h'(x, y, z) \in V_4^2 \bar{D}_1 \setminus V_4^2 \bar{L}_4$, где $h'(x, y, z) = \gamma_4(h(x, y, z), x)$, или $h'(x, y, z) = \gamma_4(h(x, y, z), f_0(x, y, z))$. Возвращаемся к случаю II.

4. $f \in J_3$. Тогда согласно работе [12] $\text{ORD}[\{f\}] \leq 3$.

5. $f \in M(k)$, где $M(3) = P_3^\alpha \setminus (P_3^2 \bar{C}_4 \cup J_3)$, $M(4) = P_4^\alpha \setminus (P_4^2 \bar{C}_4 \cup V_4^\alpha)$, $M(k) = P_k^\alpha \setminus P_k^2 \bar{C}_4$ при $k \geq 5$. Подстановкой переменных из f можно получить $g_1(x, y) \in M(k)$. Если при $k = 3$ $g_1(x, y) \in J_3$, то нетрудно видеть, что $g_1(a_1, a_2) = a_3$ при любом трехэлементном наборе (a_1, a_2, a_3) . Подстановкой переменных из f можно получить $g_2'(x, y, z) \in P_3^\alpha \setminus J_3$. Нетрудно проверить, что $g_2(x, y) = g_2'(x, y, g_1(x, y)) \in P_3^\alpha \setminus J_3$. Если при $k = 4$ $g_1 \in V_4^\alpha$, т.е. $g_1 \in V_4^\alpha \setminus V_4^2 \bar{D}_1$, то согласно подслучаю 3

$$\{\{g_1\}\}_{G^*} \supseteq \{\{\gamma_4\}\}_{G^*} = A_4^4 L_4.$$

Подстановкой переменных из f можно получить $g_2''(x, y, z, u) \in P_4^\alpha \setminus V_4^\alpha$. Аналогично случаю $k = 3$ нетрудно проверить, что в $\{\{g_2''\} \cup A_4^4 L_4\}_{G^*}$ найдется

$g_2(x, y) \in P_4^\alpha \setminus V_4^\alpha$. Итак, из $\{[f]\}_{G^*}$ всегда можно получить $g_1(x, y), g_2(x, y)$ такие, что $g_1 \in P_4^\alpha \setminus P_k^2 \vec{C}_4$, а $g_2 \in P_3^\alpha \setminus J_3$ при $k = 3$ и $g_2 \in P_4^\alpha \setminus V_4^\alpha$ при $k = 4$. Покажем, что $\{[g_1, g_2]\}_{G^*}$ содержит $h(x, y)$ такую, что $h(0, a) = b \in E_k \setminus \{0\}$ при любом $a \in E_k \setminus \{0\}$. Рассмотрим всевозможные варианты.

5.1. Пусть $g_1(x, y)$ — такая функция, что для некоторого $i \in E_k$, $g(i, j) \in E_k \setminus \{i\}$ при любом $j \in E_k \setminus \{i\}$ и $g_1(i, j_1) = g_1(i, j_2)$ для некоторых $j_1, j_2 \in E_k \setminus \{i\}$, $j_1 \neq j_2$. Без ограничения общности (благодаря отношению G^*), можно считать, что $i = 0$. Пусть

$$\text{Im}^+ g(0, y) = \{a \in E_k \setminus \{0\} \mid a \in \text{Im } g(0, y)\},$$

$$\text{Im}^\oplus g(0, y) = \{a \in E_k \setminus \{0\} \mid \text{Im } g(0, a) = a\}.$$

Можно построить последовательность функций

$$\tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_{p_1}, \tilde{g}_{p_1+1}, \dots, \tilde{g}_{p_2}, \tilde{g}_{p_2+1}, \dots, \tilde{g}_{p_l}$$

следующим образом: $\tilde{g}_2(x, y) = g_1(x, g_1(x, y))$, $\tilde{g}_3(x, y) = g_1(x, \tilde{g}_2(x, y))$, $\dots$, $\tilde{g}_{p_1}(x, y) = g_1(x, \tilde{g}_{p_1-1}(x, y))$, $\dots$, $\tilde{g}_{p_1+1}(x, y) = \tilde{g}_{p_1}(x, \tilde{g}_{p_1}(x, y))$, $\tilde{g}_{p_1+2}(x, y) = \tilde{g}_{p_1}(x, \tilde{g}_{p_1+1}(x, y))$, $\dots$, $\tilde{g}_{p_2}(x, y) = \tilde{g}_{p_1}(x, \tilde{g}_{p_2-1}(x, y))$, $\dots$, $\tilde{g}_{p_l}(x, y) = \tilde{g}_{p_l-1}(x, \tilde{g}_{p_l-1}(x, y))$, где

$$|\text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_u}(0, y)| \geq |\text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_u-1}(0, y)| + 1,$$

$$\text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_u-1}(0, y) = \text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_u-1+1}(0, y) = \dots = \text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_u-1}(0, y), \quad u = 2, \dots, l,$$

а $\text{Im}^\oplus \tilde{g}_{p_l}(0, y) = \text{Im}^+ \tilde{g}_{p_l}(0, y)$. Легко видеть, что $\tilde{g}_{p_l}(0, a_1) = \dots = \tilde{g}_{p_l}(0, a_{i_1}) = a_1, \dots, \tilde{g}_{p_l}(0, a_{i_{m-1}+1}) = \dots = \tilde{g}_{p_l}(0, a_{i_m}) = a_{i_{m-1}} + 1$, где $\{a_1, \dots, a_{i_m}\} = E_k \setminus \{0\}$, $\text{Im}^+ \tilde{g}_{p_l}(0, y) = \{a_1, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_{m-1}+1}\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $i_1 \geq 2$. Поскольку $|\text{Im } \tilde{g}_{p_l}(0, y)| \leq k - 2$, аналогично доказательству лемм 2 и 3 можно получить $\tilde{g}_{p_l,1}(x, y)$ из $\{[\tilde{g}_{p_l,1}]\}_{G^*}$ такую, что $\tilde{g}_{p_l,1}(0, y) = a_1$ при $y \in E_k \setminus \{0\}$. Тогда $\tilde{g}_{p_l,1}$ является искомой $h(x, y)$.

5.2. Пусть $g_1(x, y)$ — такая функция, что $g_1(i, j_1) = i$, $g_1(i, j_2) \neq i$ для некоторых $i, j_1, j_2 \in E_k$, $|\{i, j_1, j_2\}| = 3$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 0$.

Если $g_1(0, j_2) = j_3 \in E_k \setminus \{j_2, 0\}$, то в G найдется $\pi = (0)(j_2 j_3)(\dots) \dots (\dots)$. Пусть $g_1^1(x, y) = g_1(x, g_1^\pi(x, y))$. Нетрудно видеть, что $g_1^1(0, j_3) = j_3$. Аналогично ситуации 5.1 из $\{[g_1^1]\}_{G^*}$ можно получить, без ограничения общности, такую $\tilde{g}_1$, что

$$\tilde{g}_1(0, 1) = \dots = \tilde{g}_1(0, i_1) = 1,$$

$$\tilde{g}_1(0, i_1 + 1) = \dots = \tilde{g}_1(0, i_1 + i_2) = i_1 + 1,$$

...

$$\tilde{g}_1(0, i_1 + \dots + i_{s-1} + 1) = \dots = \tilde{g}_1(0, i_1 + \dots + i_s) = i_1 + \dots + i_{s-1} + 1,$$

$$\tilde{g}_1(0, i_1 + \dots + i_s + 1) = i_1 + \dots + i_s + 1,$$

$$\tilde{g}_1(0, i_1 + \dots + i_s + 2) = i_1 + \dots + i_s + 2,$$

...

$$\tilde{g}_1(0, q) = q, \tilde{g}_1(0, q + 1) = 0, \dots, \tilde{g}_1(0, k - 1) = 0.$$

Для любой $g(x, y)$ пусть

$$\begin{aligned}\Lambda_g^i &= (g(i, 0), \dots, g(i, i-1), g(i, i+1), \dots, g(i, k-1)), \\ I_g^i(a) &= |\{b \in E_k \setminus \{i\} \mid g(i, b) = a\}|, \\ r_+^i(g) &= \sum_{a \in \text{Im } g(i, y) \setminus \{i\}} (I_g^i(a) - 1).\end{aligned}$$

(а) Пусть $r_+^0(\tilde{g}_1) = 0$, $I_{\tilde{g}_1}^0(0) = 1$, т. е. $\Lambda_{\tilde{g}_1}^0 = (1, 2, \dots, k-2, 0)$. Из $\{\{\tilde{g}_1\}\}_{G^*}$ можно выбрать $\tilde{g}_{1,1}(x, y)$ такую, что $\tilde{g}_{1,1}(0, k-1) = 1$. Пусть $\tilde{g}_{1,2}(x, y) = \tilde{g}_{1,1}(\tilde{g}_1(x, y), y)$. Тогда $\Lambda_{\tilde{g}_{1,2}}^0 = (1, 2, \dots, k-2, 1)$. Возвращаемся к подслучаю I.

(б) Пусть $r_+^0(\tilde{g}_1) = 0$, $I_{\tilde{g}_1}^0(0) > 1$, т. е. $\Lambda_{\tilde{g}_1}^0 = (1, \dots, q, 0, \dots, 0)$, $q < k-2$. В G всегда найдется π_1 такая, что $\pi_1(0) = 0$, $\{\pi_1(2), \dots, \pi_1(q+1)\} = \{1, \dots, q\}$. Пусть $\tilde{g}_{1,3} = \langle \pi_1 \rangle(\tilde{g}_1)$, $\tilde{g}_{1,4} = \tilde{g}_1(\tilde{g}_{1,3}(x, y), y)$. Тогда $\Lambda_{\tilde{g}_{1,4}}^0 = (1, 2, \dots, q+1, 0, \dots, 0)$. Продолжая эту процедуру, возвращаемся к подслучаю (а).

(с) Пусть $r_+^0(\tilde{g}_1) \geq 1$, $I_{\tilde{g}_1}^0(0) \geq 1$. Аналогично доказательствам лемм 2 и 3 в $\{\{\tilde{g}_1\}\}_{G^*}$ найдется $\tilde{g}_{1,5}(x, y)$ такая, что $\Lambda_{\tilde{g}_{1,5}}^0 = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $k-2 \geq \mu \geq 2$, где μ — число единиц в векторе.

Предположим, что $\{\{\tilde{g}_{1,5}\}\}_{G^*}$ содержит $\tilde{g}_{1,5,0}(x, y)$ такую, что $\tilde{g}_{1,5}^0(0, 1) = \tilde{g}_{1,5}^0(1, 0) = 1$. В $\{\{\tilde{g}_{1,5}\}\}_{G^*}$ найдется $\tilde{g}_{1,5}^1(x, y)$ такая, что $\tilde{g}_{1,5}^1(0, \mu+1) = 1$ и $\tilde{g}_{1,5}^1(0, a) \in \{0, 1\}$ при любом $a \in E_k \setminus \{0\}$. Для $\tilde{g}_{1,5}^2(x, y) = \tilde{g}_{1,5}^0(\tilde{g}_{1,5}(x, y), \tilde{g}_{1,5}^1(x, y))$

$$\Lambda_{\tilde{g}_{1,5}^2}^0 = (1, \dots, 1, e_{\mu+2}, \dots, e_{k-1}),$$

где первые $\mu+1$ элемента равны единице и $e_{\mu+2}, \dots, e_{k-1} \in \{0, 1\}$. Продолжая эту процедуру, можно получить $\tilde{g}_{1,6}$ из $\{\{\tilde{g}_{1,5}\}\}_{G^*}$ такую, что $\Lambda_{\tilde{g}_{1,6}}^0 = (1, \dots, 1)$.

Если $\tilde{g}_{1,5}(\rho_1, 0) = \rho_2 \neq \rho_1$ для некоторого $\rho_1 \in \{\mu+1, \dots, k-1\}$, то пусть $\tilde{g}_{1,5}^4(x, y) = \tilde{g}_{1,5}^3(x, \tilde{g}_{1,5}(x, y))$, где $\tilde{g}_{1,5}^3 \in \{\{\tilde{g}_{1,5}(x, y)\}\}_{G^*}$ и $\tilde{g}_{1,5}^3(\rho_1, \rho_2) = 0$. Тогда $\tilde{g}_{1,5}^4(0, \rho_1) = \tilde{g}_{1,5}^4(\rho_1, 0) = 0$. В $\{\{\tilde{g}_{1,5}^4\}\}_{G^*}$ всегда найдется $\tilde{g}_{1,5}^5(x, y)$ такая, что $\tilde{g}_{1,5}^5(0, 1) = \tilde{g}_{1,5}^5(1, 0) = 1$. Возвращаемся к рассмотренной ситуации.

Предположим, что $\tilde{g}_{1,5}(1, 0) = 0$, $\tilde{g}_{1,5}(\rho, 0) = 0$ для любого $\rho \in \{\mu+1, \dots, k-1\}$.

Пусть $\mu \geq [k/2]$. В G найдется π_2 такая, что $\pi_2(0) = 0$, $\pi_2(k-q) = q$, $q = 1, \dots, [k/2]$. Пусть $\tilde{g}_{1,5}^6 = \tilde{g}_{1,5}^{\pi_2}$, $\tilde{g}_{1,5}^7(x, y) = \tilde{g}_{1,5}(\tilde{g}_{1,5}^6(x, y), \tilde{g}_{1,5}^5(x, y))$. Если $\tilde{g}_{1,5}(k-1, 1) \neq 0$, то легко проверить, что $\tilde{g}_{1,5}^7(0, y) \neq 0$ при любом $y \in E_k \setminus \{0\}$, кроме того, $\tilde{g}_{1,5}^7(0, k-2) = \tilde{g}_{1,5}^7(0, k-1) = k-1$. Возвращаемся к подслучаю 5.1. Если $\tilde{g}_{1,5}(k-1, 1) = 0$, то положим $\tilde{g}_{1,5}^8(x, y) = \tilde{g}_{1,5}(\tilde{g}_{1,5}^7(x, y), \tilde{g}_{1,5}(x, y))$. Легко проверить, что $\tilde{g}_{1,5}^8(0, a) \in \{1, k-1\}$ для любого $a \in E_k \setminus \{0\}$. Возвращаемся к подслучаю 5.1.

Пусть $2 \leq \mu < [k/2]$. В $\{\{\tilde{g}_{1,5}\}\}_{G^*}$ найдется $\tilde{g}_{1,5}^9(x, y)$ такая, что $\tilde{g}_{1,5}^9(0, 1) = \tilde{g}_{1,5}^9(0, k-1) = 1$. Пусть $\tilde{g}_{1,5}^{10}(x, y) = \tilde{g}_{1,5}^9(x, \tilde{g}_{1,5}^7(x, y))$. Легко проверить, что $\tilde{g}_{1,5}^{10}(0, a) = 1$ при $a \in \{1, \dots, \mu, k-1, k-2, \dots, k-\mu\}$. Если $2\mu \geq [k/2]$, то с функцией $\tilde{g}_{1,5}^{10}$ возвращаемся к предыдущей ситуации. Если $2\mu < [k/2]$, то аналогичным рассуждением можно получить $\tilde{g}_{1,5}^{11}$ из $\{\{\tilde{g}_{1,5}\}\}_{G^*}$ такую, что $\tilde{g}_{1,5}^{11}(0, y)$ принимает 4μ раз значение 1 и $k-1-4\mu$ раз значение 0, кроме того $\tilde{g}_{1,5}^{11}(0, 1) = 1$. Продолжая такую процедуру, всегда возвращаемся к рассмотренной ситуации.

5.3. Пусть для некоторых $i, j \in E_k$, $i \neq j$, имеют место соотношения $\Lambda_{g_1}^i = (i, \dots, i)$, $|\{j, g_1(j, a_1), g_1(j, a_2)\}| = 3$ при любых $a_1, a_2 \in E_k \setminus \{j\}$, $a_1 \neq a_2$. Если $g_1(j, b) = b$ для некоторого $b \in E_k \setminus \{j\}$, то при $\tilde{g}_1(x, y) = g_1(y, x)$

$$\tilde{g}_1(b, j) = b, \quad \tilde{g}_1(b, i) = i, \quad \tilde{g}_1(x, y) \in P_k^\alpha \setminus P_k^2 \tilde{C}_4.$$

Возвращаемся к ситуации 5.2. В противном случае пусть

$$g_{1,1}(x, y) = g_1(x, g_1(x, y)), \dots, g_{1,q+1}(x, y) = g_1(x, g_{1,q}(x, y)), \dots$$

Тогда $g_{1,s}(i, a) = i$, $g_{1,s}(j, a) = a$ для некоторых s, a , $s \leq k$, $a \in E_k \setminus \{i, j\}$. С функциями $\bar{g}_{1,k}(x, y) = g_{1,k}(y, x)$ и $g_1(x, y)$ возвращаемся к ситуации 5.2.

5.4. Пусть $g_1(i, a) \neq i$, $g_1(i, a_1) \neq g_1(i, a_2)$ для любых i, a, a_1, a_2 , где $a_1 \neq a_2$, $i \notin \{a, a_1, a_2\}$. Так как $g_1 \in P_k^\alpha \setminus P_k^2 \bar{C}_4$, имеем $g_1(j, b) = c \in E_k \setminus \{j, b\}$ для некоторых $j, b \in E_k$.

(а) Если $g_1(j_1, b) = g_1(j_2, b)$ или $g_1(j_3, b) = b$ для некоторых $j_1, j_2, j_3 \in E_k$, $j_1 \neq j_2$, то с функцией $\bar{g}_1(x, y) = g_1(y, x)$ возвращаемся либо к ситуации 5.1, либо к ситуации 5.2.

В противном случае, при $k = 3$

$$\Lambda_{g_1}^0 = (2, 1), \quad \Lambda_{g_1}^1 = (2, 0), \quad \Lambda_{g_1}^2 = (1, 0), \quad (1)$$

а при $k = 4$ либо

$$\Lambda_{g_1}^0 = (2, 3, 1), \quad \Lambda_{g_1}^1 = (3, 0, 2), \quad \Lambda_{g_1}^2 = (1, 3, 0), \quad \Lambda_{g_1}^3 = (2, 1, 0), \quad (2)$$

либо

$$\Lambda_{g_1}^0 = (3, 1, 2), \quad \Lambda_{g_1}^1 = (2, 3, 0), \quad \Lambda_{g_1}^2 = (3, 0, 1), \quad \Lambda_{g_1}^3 = (1, 2, 0). \quad (3)$$

Аналогично рассуждению, имеющемуся в начале этого подслучая 5, из g_1, g_2 G^* -замыканием можно получить $g_1^*(x, y)$ такую, что $g_1^* \in P_k^\alpha \setminus P_k^2 \bar{C}_4$ и относительно g_1^* не верна ни одна из систем равенств (1), (2), (3), т.е. возвращаемся к рассмотренным ситуациям.

Пусть $k \geq 5$. Покажем, что в $\{g_1\}_{G^*}$ либо найдется $g_1^*(x, y)$ такая, что $g_1^*(b, j_4) = j_4$, $g_1^*(b, j) = c \in E_k \setminus \{b, j\}$ для некоторых $j_4, j \in E_k \setminus \{b\}$ и $|\{g_1^*(b, j_1), g_1^*(b, j_2), b\}| = 3$ для любых $j_1, j_2 \in E_k \setminus \{b\}$, $j_1 \neq j_2$, либо найдется $g_1^{**}(x, y)$, с которой возвращаемся к рассмотренным ситуациям.

В $\{\bar{g}_{1,1}(x, y)\}_{G^*}$ всегда найдется $\bar{g}_{1,1}(b, y)$ такая, что РНЦ $\bar{g}_{1,1}(x, y)$ содержит только циклы длины 1 и p_1 , где p_1 — простое число, и $\bar{g}_{1,1}(b, y)$ нетривиальна. Если РНЦ $g_{1,1}(b, y)$ содержит хотя бы один цикл длины 1, то $\bar{g}_{1,1}$ является искомой g_1^* . Пусть РНЦ $\bar{g}_{1,1}(b, y)$ содержит только циклы длины p_1 . Тогда $k-1 = n_1 p_1$.

Пусть $G_b = \{\varphi(x) \in G \mid \varphi(b) = b\}$. Если $n_1 = 1$, $p_1 \geq 5$ или $k-1 \geq 10$, то, аналогично доказательству леммы 1, в силу 2-транзитивности $\{\bar{g}_{1,1}(b, y)\}_{G_b^*}$ в $\{\bar{g}_{1,1}(x, y)\}_{G_b^*}$ найдется искомая функция g_1^* . Предположим, что $n_1 \geq 2$. Если $(k-1, p_1) \in \{(8, 2), (9, 3)\}$, то из доказательства леммы 1 нетрудно получить g_1^* из $\{\bar{g}_{1,1}(x, y)\}_{G_b^*}$. Остаются ситуации, когда $(k-1, p_1) \in \{(4, 2), (6, 3), (6, 2)\}$.

Пусть $(k-1, p_1) = (4, 2)$. Без ограничения общности предположим, что $b = 0$ и $\Lambda_{g_{1,1}}^0 = (2, 1, 4, 3)$. Если $\bar{g}_{1,1}(j, y) = y$ для некоторого $j \in E_5$, то с функцией $\vec{\bar{g}}_{1,1}(x, y) = \bar{g}_{1,1}(y, x)$ возвращаемся к ситуации 5.2. Если подгруппа $\{\bar{g}_{1,1}(j, y)\}_{G_j^*}$ нечетверна и неединична для некоторого j , то легко получить g_1^* из $\{\bar{g}_{1,1}\}_{G_j^*}$. Предположим, что $\bar{g}_{1,1}(i, y)$ — нетривиальная перестановка четверной группы для любого $i \in E_k$. Если $\bar{g}_{1,1}(4, 3) \in \{1, 2, 3, 4\}$, то в силу того, что $\vec{\bar{g}}_{1,1}(3, 0) = 4$, $\vec{\bar{g}}_{1,1}(3, 4) \in \{1, 2, 3, 4\}$, приходим либо к одной из ситуаций 5.1, 5.2, либо к тому, что $\{\vec{\bar{g}}_{1,1}(3, y)\}_{G_3^*}$ нечетверна и неединична, т.е. к рассмотренной ситуации.

Пусть $\tilde{g}_{1,1}(4,3) = 0$. Тогда либо мы имеем неединичную, нечетверную подгруппу $[\{\tilde{g}_{1,1}(4,y)\}]_{G_4^*}$, либо $\Lambda_{\tilde{g}_{1,1}}^4 = (3,2,1,0)$ (тогда $\tilde{g}_{1,1}^{\theta_1}(1,0) = \tilde{g}_{1,1}^{\theta_1}(1,4) = 2$). Возвращаемся к рассмотренным ситуациям.

Пусть $(k-1, p_1) = (6, 3)$. Без ограничения общности предположим, что $\Lambda_{\tilde{g}_{1,1}}^0 = (2, 3, 1, 5, 6, 4)$. В G_0 найдется

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & * & * & * \\ 0 & 1 & 3 & 2 & * & * & * \end{pmatrix}$$

такая, что для $\tilde{g}_{1,2}(x,y) = \tilde{g}_{1,1}(x, \tilde{g}_{1,1}^{\theta_1}(x,y))$ справедливы равенства $\tilde{g}_{1,2}(0,1) = 1$, $\tilde{g}_{1,2}(0,4) = 2$, т.е. $\tilde{g}_{1,2}$ является искомой g_1^* .

Пусть $(k-1, p_1) = (6, 2)$. Без ограничения общности предположим, что $\Lambda_{\tilde{g}_{1,2}}^0 = (2, 1, 4, 3, 6, 5)$. В G_0 найдется

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 6 & * & * & * \\ 0 & 4 & 3 & 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}(0,1) = 4$, $\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}(0,4) = 1$ и $\theta_2^{-1}(2) \in \{5, 3, 2\}$. Если $\theta_2(5) = 2$, то для $\tilde{g}_{1,3}(x,y) = \tilde{g}_{1,1}(x, \tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}(x,y))$ справедливы равенства $\tilde{g}_{1,3}(0,1) = 3$, $\tilde{g}_{1,3}(0,6) = 6$, т.е. $\tilde{g}_{1,3}$ является искомой g_1^* .

Пусть $\theta_2(2) = 2$ или $\theta_2(2) = 3$. Если РНЦ $\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}$, содержит цикл длины, не равной 2, то возвращаемся к рассмотренным ситуациям. Если РНЦ $\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}$ содержит только цикл длины 2, то легко видеть, что $\Lambda_{\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}}^0 = (4, 5, 6, 1, 2, 3)$ или $\Lambda_{\tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}}^0 = (4, 6, 5, 1, 3, 2)$. Пусть $\tilde{g}_{1,3}(x,y) = \tilde{g}_{1,1}(x, \tilde{g}_{1,1}^{\theta_2}(x,y))$. Легко видеть, что РНЦ $\tilde{g}_{1,3}(0,y)$ всегда содержит тройной цикл. Возвращаемся к рассмотренным ситуациям.

Пусть $\tilde{g}_1^*(x,y) = g_1^*(x,y)$. Если $\Lambda_{\tilde{g}_1^*}^{j_4} = (j_4, \dots, j_4)$, то в силу справедливости равенства $\tilde{g}_1^*(j,b) = c$, возвращаемся к одной из ситуаций 5.2, 5.3. В противном случае возвращаемся к ситуации 5.2.

Дальше докажем, что $C_{k,1}^2 \in [\{h\}]_{G^*}$. Очевидно, что $[\{h\}]_{G^*}$ содержит $h_1(x,y)$ такую, что $\Lambda_{h_1}^0 = (1, \dots, 1)$.

(А) Пусть $h_1(x,y)$ такая, что $\Lambda_{h_1}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_1}^s = (s, \dots, s)$, $s = 1, \dots, k-1$. Предположим, что $[\{h_1\}]_{G^*}$ содержит $h_1^l(x,y)$ такую, что $\Lambda_{h_1^l}^s = (1, \dots, 1)$, $s = 0, \dots, l$, $0 \leq l < k-1$, $\Lambda_{h_1^l}^r = (r, \dots, r)$, $r = l+1, \dots, k-1$. Нетрудно видеть, что $[\{h_1^l\}]_{G^*}$ содержит $h_1^{l,1}(x,y)$ такую, что $\Lambda_{h_1^{l,1}} = (0, \dots, 0)$, $\Lambda_{h_1^{l,1}}^s = (1, \dots, 1)$, $s = 1, \dots, l+1$, $\Lambda_{h_1^{l,1}}^r = (r, \dots, r)$, $r = l+2, \dots, k-1$. Пусть $h_1^{l+1}(x,y) = h_1^l(h_1^{l,1}(x,y), h_1^l(x,y))$. Тогда

$$\Lambda_{h_1^{l+1}}^s = (1, \dots, 1), \quad s = 0, \dots, l+1, \quad \Lambda_{h_1^{l+1}}^r = (r, \dots, r), \quad r = l+2, \dots, k-1.$$

Таким индуктивным построением получим, что $C_{k,1}^2 \in [\{h_1\}]_{G^*}$.

(В) Пусть $h_1(i, j_1) = i \neq h_1(i, j_2)$ для некоторых $i, j_1, j_2 \in E_k$, $|\{i, j_1, j_2\}| = 3$. Для определенности пусть $i = 1$.

Если $h_1(1, 0) = t_1 \neq i$, то $1 \neq j_1 \neq 0$. Если $h_1(j_1, 0) = j_1$, то пусть

$$\begin{aligned}\pi_3 &= (10j_1)(\dots) \dots (\dots) \in G, & h_{1,1}(x, y) &= h_1^{\pi_3}(x, h_1(x, y)), \\ \pi_4 &= (01)(\dots) \dots (\dots) \in G, & h_{1,2}(x, y) &= h_1^{\pi_4}(x, h_1(x, y)), \\ h_{1,3}(x, y) &= h_1(h_{1,1}(x, y), h_{1,2}(x, y)), & h_{1,4}(x, y) &= h_1(x, h_{1,3}(x, y)).\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\Lambda_{h_{1,4}}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_{1,4}}^1 = (1, \dots, 1)$. Если $h_1(j_1, 0) = j_3 \neq j_1$, то пусть $h_{1,5}(x, y) = h_1(x, h_{1,1}(x, y))$. Легко проверить, что $\Lambda_{h_{1,5}}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_{1,5}}^1 = (1, \dots, 1)$. Если $h_1(1, 0) = 1$, то пусть $h_{1,6}(x, y) = h_1(h_{1,2}(x, y), h_{1,1}(x, y))$. Легко проверить, что $\Lambda_{h_{1,6}}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_{1,6}}^1 = (1, \dots, 1)$. Итак, в этом случае $[\{h_1\}]_{G^*}$ всегда содержит $h_2(x, y)$ такую, что $\Lambda_{h_2}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_2}^1 = (1, \dots, 1)$. Нетрудно видеть, что $[\{h_2\}]_{G^*}$ содержит $h_{2,1}(x, y), h_{2,2}(x, y)$ такие, что $\Lambda_{h_{2,1}}^0 = (0, \dots, 0)$, $\Lambda_{h_{2,1}}^2 = (0, \dots, 0)$, $\Lambda_{h_{2,2}}^1 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_{2,2}}^2 = (1, \dots, 1)$. Пусть $h_{2,3}(x, y) = h_{2,2}(x, h_{2,1}(x, y))$. Тогда $\Lambda_{h_{2,3}}^0 = (0, \dots, 0)$, $\Lambda_{h_{2,3}}^1 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_{2,3}}^2 = (1, \dots, 1)$. Предположим, что $[\{h_2\}]_{G^*}$ содержит $h_l(x, y)$ такую, что $\Lambda_{h_l}^s = (s, \dots, s)$, $s = 0, \dots, l-1$, $\Lambda_{h_l}^l = (l-1, \dots, l-1)$, $2 \leq l \leq k-2$. Используя предложение 1, легко проверить, что $[\{h_l\}]_{G^*}$ содержит $h_{l,1}(x, y), h_{l,2}(x, y)$ такие, что $\Lambda_{h_{l,1}}^s = (s, \dots, s)$, $s = 0, \dots, l-1$, $\Lambda_{h_{l,1}}^{l+1} = (l-1, \dots, l-1)$, а $\Lambda_{h_{l,2}}^l = (l, \dots, l)$, $\Lambda_{h_{l,2}}^{l+1} = (l, \dots, l)$. Пусть $h_{l+1}(x, y) = h_{l,2}(x, h_{l,1}(x, y))$. Легко видеть, что $\Lambda_{h_{l+1}}^s = (s, \dots, s)$, $s = 0, \dots, l$, $\Lambda_{h_{l+1}}^{l+1} = (l, \dots, l)$. Тем самым доказано, что $[\{h_1\}]_{G^*} \ni h_{k-1}(x, y)$, где $\Lambda_{h_{k-1}}^s = (s, \dots, s)$, $s = 0, \dots, k-2$, $\Lambda_{h_{k-1}}^{k-1} = (k-2, \dots, k-2)$. Пусть

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & \dots & * \\ k-1 & k-2 & * & \dots & * \end{pmatrix} \in G, \quad h_k = h_{k-1}^{\pi_5}.$$

Тогда $\Lambda_{h_k}^0 = (1, \dots, 1)$, $\Lambda_{h_k}^s = (s, \dots, s)$, $s = 1, \dots, k-1$. Возвращаемся к случаю А.

(С) Пусть $h_1(i, j) \neq i$ для любых $i, j \in E_k$, $i \neq j$. Очевидно, что $[\{h_1\}]_{G^*}$ содержит $h_s^*(x, y)$, $s = 0, \dots, k-1$, такие, что $\Lambda_{h_s^*}^s = (t_s, \dots, t_s)$, $t_s \neq s$, $h_s^*(i, j) \neq i$ для любых $i, j \in E_k$, $i \neq j$. Пусть

$$\begin{aligned}h_{1,1}^*(x, y) &= h_1^*(x, h_1(x, y)), \\ h_{1,2}^*(x, y) &= h_2^*(x, h_{1,1}^*(x, y)), \\ &\dots \\ h_{1,k-1}^*(x, y) &= h_{k-1}^*(x, h_{1,k-2}^*(x, y)).\end{aligned}$$

Если $h_{1,s}^*(i_1, y) = i_1$, $h_{1,s}^*(i_2, y) = c \neq i_2$ для некоторых $i_1, i_2, c, s \in E_k$, $i_1 \neq i_2$, $s \neq 0$, или $h_{1,s}^*(i, j_1) = i \neq h_{1,s}^*(i, j_2)$ для некоторых $i, j_1, j_2, s \in E_k$, $|\{i, j_1, j_2\}| = 3$, $s \neq 0$, то возвращаемся к ситуациям, рассмотренным в случае В. В противном случае $h_{1,k-1}^*(x, y)$ должна быть такой функцией, что $\Lambda_{h_{1,k-1}^*}^s = (v_s, \dots, v_s)$, $v_s \in E_k$, $s = 0, \dots, k-1$ и $v_{k-1} \neq k-1$. Если $v_a = v_b$ для некоторых $a, b \in E_k$, $a \neq b$, то рассуждая аналогично схеме, изложенной в ситуации 5.1, получим, что $C_{k,v_a}^2 \in [\{h_{1,k-1}^*\}]_{G^*}$. В противном случае пусть $S_{x,y}^\alpha$ есть множество всех таких двуместных функций $g(x, y)$ из P_k^α , что $\Lambda_g^s = (v_s, \dots, v_s)$, $v_s \in E_k$, $s = 0, \dots, k-1$, и $v_a \neq v_b$ для любых $a, b \in E_k$, $a \neq b$. Пусть

$$A_s = \{(s, 0), \dots, (s, s-1), (s, s+1), \dots, (s, k-1)\}, \quad s = 0, \dots, k-1.$$

Пусть $\hat{A}_k = \{A_0, \dots, A_{k-1}\}$. Построим некоторое отображение F из $S_{x,y}^\alpha$ на $S(\hat{A}_k)$ следующим образом: для каждой $g \in S_{x,y}^\alpha$ перестановка $\hat{g} = F(g)$ такова, что $\hat{g}(A_i) = A_j$ имеет место для любых $i, j \in E_k$ тогда и только тогда, когда $g(x, y) = j$ при $(x, y) \in A_i$. Используем обозначение $\hat{g}(X)$, где X — аргумент функции $\hat{g}$. Для каждой перестановки

$$\pi = \begin{pmatrix} 0, & \dots, & k-1 \\ i_0, & \dots, & i_{k-1} \end{pmatrix}$$

пусть

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} A_0, & \dots, & A_{k-1} \\ A_{i_0}, & \dots, & A_{i_{k-1}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

(α) для любых $\pi \in S(E_k)$, $g \in S_{x,y}^\alpha$ верно, что $F(g^\pi) = \hat{g}^\pi$,

(β) для любых g^1, g^2 из $S_{x,y}^\alpha$ верно, что $F(g^1(g^2(x, y), y)) = \hat{g}^1(\hat{g}^2(X))$,

(γ) для каждой $\hat{g} \in S(\hat{A}_k)$ существует единственная $g \in S_{x,y}^\alpha$ такая, что $F(g) = \hat{g}$ и, если $\hat{g}$ порождается элементами $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m$, то существует $g \in [\{g_1, \dots, g_m\}]_{G^*}$ такая, что $F(g) = \hat{g}$.

Для любых $\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m \in S(\hat{A}_k)$ пусть $[\{\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m\}]_{G^*}$ — минимальная подгруппа всех инвариантных подгрупп группы $S(\hat{A}_k)$, содержащих $\{\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_m\}$. При $k \geq 3$, $k \neq 4$, в силу леммы 1, $[\{\hat{h}_{1,k-1}^*\}]_{G^*}$ 2-транзитивна. При $k = 4$ пусть $h_{1,4}^*(x, y) = g_2(x, h_{1,3}^*(x, y))$. Нетрудно проверить, что либо $A(\hat{A}_4) \subseteq [\{\hat{h}_{1,3}^*\}]_{G^*}$, либо $A(\hat{A}_4) \subseteq [\{\hat{h}_{1,4}^*\}]_{G^*}$. Отсюда следует, что при $k \geq 3$ в $[\{\hat{h}_{1,k-1}^*, g_2\}]_{G^*}$ всегда найдутся $t_1(x, y), t_2(x, y) \in S_{x,y}^\alpha$ такие, что $t_1 = t_2 = 1$ на A_0 , $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ на A_1 . Пусть $t_3(x, y) = t_1(t_1(x, y), t_2(x, y))$. Тогда $t_3 = 1$ на $A_0 \cup A_1$. Возвращаемся к ситуации, рассмотренной в случае В.

Итак, доказано, что $C_{k,1}^2 \in [\{g_1, g_2\}]_{G^*}$. Легко видеть, что $C_{k,\gamma}^2 \in [\{C_{k,1}^2\}]_{G^*}$ при любом $\gamma \in E_k$. Пусть

$$MZ_3(a_1, a_2, \dots, a_s) = \{m(x, y, z) \in P_3 \mid m(y, x, x) = m(x, y, x) = m(x, x, y)\}$$

для любых значений $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, $y \in E_k$. Для любых $a_1, a_2 \in E_k$, $a_1 \neq a_2$ пусть

$$d_{a_1, a_2}(x, y, z) = C_{k, a_1}^2(C_{k, a_2}^2(x, y), C_{k, a_2}^2(y, z), C_{k, a_2}^2(z, x)).$$

Легко видеть, что $d_{a_1, a_2} \in MZ_3(a_1, a_2)$. Предположим, что для любых q различных значений $a_1, \dots, a_q$ из E_k , $2 \leq q \leq k-2$, класс $[\{C_{k+1}^2\}]_{G^*}$ содержит $d_{a_1, \dots, a_q}(x, y, z) \in MZ_3(a_1, \dots, a_q)$. Для любых $q+1$ различных значений $a_1, \dots, a_{q+1}$ из E_k пусть

$$d_{a_1, \dots, a_{q+1}}(x, y, z) = C_{k, a_{q+1}}^2(C_{k, a_1}^2(d_{a_1, \dots, a_q}(x, y, z), d_{a_2, \dots, a_{q+1}}(x, y, z)), \\ C_{k, a_2}^2(d_{a_1, \dots, a_q}(x, y, z), d_{a_1, a_3, \dots, a_{q+1}}(x, y, z))).$$

Легко проверить, что $d_{a_1, \dots, a_{q+1}} \in MZ_3(a_1, \dots, a_{q+1})$. Тем самым доказано, что $[\{C_{k+1}^2\}]_{G^*}$ содержит мажоритарную функцию $d_{0, \dots, k-1}(x, y, z)$. Согласно [9] в этом случае $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq k^3$.

Пусть $f(x, \dots, x) \neq x$ и $|\text{Im } f(x, \dots, x)| = k$.

При $k = 3$, если $f \in L^3$, то согласно [13] $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 2$, а если $f \in A_3^0$, то согласно [12] $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 3$.

Пусть $k = 4$. При $f \in V_4^4 L_4^0 \setminus (S_4^4 L_4 \cup PV_4)$ нетрудно доказать соотношение $[\{f\}]_{G^*} = [\{x + y + z + 1\}]_{G^*} = V_4^4 L_4$. При $f \in V_4^4 L_4 \setminus (A_4^4 L_4 \cup V_4^4 L_4^0)$ легко проверить, что $[\{f\}]_{G^*} = [\{3x + 2y + 1\}]_{G^*} = V_4^4 L_4$. При $f \in NL_4 \setminus (PV_4 \cup CE_4 \cup V_4^4 L_4^0)$ нетрудно доказать, что $[\{f\}]_{G^*} = [\{x + y\}]_{G^*} = NL_4$. При $f \in LL_4 \setminus (NL_4 \cup V_4^4 L_4 \cup LL_4^1)$ согласно [6] $[\{f\}]_{G^*} = [\{2x, x + y\}]_{G^*} = LL_4$. При $f \in VQL_4 \setminus (V_4^4 L_4 \cup VQL_4^\alpha)$, аналогично подслучаю III.2 получим, что

$$[\{f\}]_{G^*} = [\{x^2 + y^2 + x + 1\}]_{G^*} = VQL_4.$$

При $f \in QL_4 \setminus (VQL_4 \cup LL_4 \cup SQL_4^+)$ согласно [6] $[\{f\}]_{G^*} = [\{x + y, x^2\}]_{G^*} = QL_4$. При $f \in V_4 \setminus (V_4^\alpha \cup VQL_4)$ имеем $f(x, \dots, x) = x + c$ для некоторого $c \in E_4$ и $f(x_1, \dots, x_n) + c \in V_4^\alpha$. Отсюда аналогично подслучаю III.3 находим, что $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} = \text{ORD}[\{f + c\}]_{G^*} \leq 4^3$. При $f \in P_4 \setminus (V_4 \cup QL_4 \cup P_k^\alpha \cup SLP_k)$ согласно [6] $[\{f\}]_{G^*} = P_4$, что означает, что $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 2$.

Пусть $k \geq 5$. Тогда $f \in P_k \setminus (P_k^\alpha \cup SLP_k)$. Подстановкой переменных из f можно получить $g(x) \in P_k \setminus P_k^\alpha$. Согласно теореме 1 $[\{f, g\}]_{G^*} = P_k$, т. е. $\text{ORD}[\{f\}]_{G^*} \leq 2$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
2. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. *Докл. АН СССР* (1959) **127**, №1, 44–46.
3. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды МИАН СССР* (1958) **51**, 5–142.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1982.
5. Мальцев А. И. Симметрические группоиды. *Матем. сб.* (1952) **31**, №1, 136–151.
6. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами. *Дискретная математика* (1993) **5**, №4, 85–106.
7. Кудрявцев В. Б. *Функциональные системы*. Издательство МГУ, Москва, 1982.
8. Мальцев А. И. Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского. *Алгебра и логика* (1967) **6**, №3, 61–74.
9. Марченков С. С. *О замкнутых классах в P_k , содержащих однородные функции*. Препринт Ин-та прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, №35.
10. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 . *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 82–95.
11. Марченков С. С. Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов. *Матем. вопросы кибернетики* (1989) **2**, 100–122.
12. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 . *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач* (1980) **34**, 38–73.

13. Baginski J., Demetrovics J. *The Structure of Linear Classes in Prime-Valued Logics*. Discrete Math. Banach Center publication, Warsaw, 1982, 105–123.
14. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k -значной логики. Докл. Академии наук Белоруссии (1994) **38**, №3, 16–19.

Статья поступила 21.03.94.