Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Числа отрезков возрастания в случайной перестановке и обратной к ней асимптотически независимы, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 41–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:39:43

Числа отрезков возрастания в случайной перестановке и обратной к ней асимптотически независимы

© 1996 г. В. А. Ватутин

Пусть $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$ — перестановка элементов множества $1, \dots, n$, а $D = \{k: \sigma(k) > \sigma(k+1)\}$ — множество спусков σ . Обозначим через $\text{des } \sigma$ мощность множества D и пусть

$$\text{maj } \sigma = \sum_{k \in D} k, \quad \text{ides } \sigma = \text{des } \sigma^{-1}, \quad \text{imaj } \sigma = \text{maj } \sigma^{-1},$$

где σ^{-1} — перестановка, обратная к σ . В работе показано, что распределение четырехмерного вектора $R(n) = (\text{des } \sigma, \text{maj } \sigma, \text{ides } \sigma, \text{imaj } \sigma)$ асимптотически нормально при $n \rightarrow \infty$, причем две первые координаты $R(n)$ асимптотически независимы от двух последних.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-011-1443.

Работы, посвященные исследованию комбинаторных и вероятностных свойств случайных перестановок, можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся статьи, в которых анализируются такие свойства перестановок (назовем их алгебраическими), которые связаны (в той или иной степени) с цикловой структурой перестановок (число циклов, количество циклов фиксированной длины или количество перестановок с длинами циклов, принадлежащими фиксированному множеству, длина максимального цикла и т.д.). В монографии В. Ф. Колчина [1] читатель может найти библиографические ссылки на такого рода работы и ознакомиться с основными результатами, относящимися к данной тематике. Последние достижения в этой области опубликованы в работах [2–7]. Ко второй группе относятся статьи, в которых перестановки трактуются как числовые последовательности специального вида, и изучаются геометрические свойства таких последовательностей: количество отрезков возрастания, распределения длин этих отрезков, длина максимального отрезка и т.д. Среди множества работ, содержащих результаты такого рода, мы упомянем монографии Я. Гульдена и Л. Джексона [8] и Р. Стенли [9], а также статьи [10–12], в которых найдены производящие функции, перечисляющие количество перестановок, имеющих то или иное геометрическое строение. Интерес к вероятностным свойствам таких последовательностей вызван необходимостью построения критериев, предназначенных для проверки случайности различного рода выборок,

а также качества последовательностей, вырабатываемых датчиками псевдослучайных чисел. Более подробно эти вопросы обсуждаются в книге Д. Кнута [13].

Следует отметить, что геометрическая структура случайных перестановок изучена менее детально, чем алгебраическая. Это объясняется, по-видимому, тем фактом, что производящие функции, перечисляющие перестановки с интересующими нас свойствами, имеют, как правило, весьма громоздкий вид. В настоящей работе, опираясь на результаты статей [10–12], мы находим совместное распределение количества отрезков возрастания и величины главного индекса в случайной равновероятной перестановке и обратной к ней и, в частности, показываем, что числа отрезков возрастания в случайной перестановке и перестановке, обратной к ней, асимптотически независимы.

Пусть $S(n)$ — множество всех перестановок чисел $1, \dots, n$, а $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$ — некоторый элемент множества $S(n)$. Скажем, что пара $(\sigma(i), \sigma(i+1))$ образует спуск, если $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Обозначим через $I(A)$ индикатор события A и с каждой перестановкой $\sigma \in S(n)$ свяжем четырехмерный вектор $R(\sigma) = (\text{des } \sigma, \text{maj } \sigma, \text{ides } \sigma, \text{imaj } \sigma)$, компоненты которого задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \text{des } \sigma &= \sum_{k=1}^{n-1} I(\sigma(k) > \sigma(k+1)), \\ \text{maj } \sigma &= \sum_{k=1}^{n-1} k I(\sigma(k) > \sigma(k+1)), \\ \text{ides } \sigma &= \text{des } \sigma^{-1}, \quad \text{imaj } \sigma = \text{maj } \sigma^{-1}, \end{aligned}$$

где σ^{-1} обозначает перестановку, обратную к σ . Зададим на множестве $S(n)$ равномерное распределение, приписав каждой перестановке из $S(n)$ вероятность $1/n!$, и пусть

$$H_n(t_1, q_1, t_2, q_2) = \mathbf{E} t_1^{\text{des } \sigma} q_1^{\text{maj } \sigma} t_2^{\text{ides } \sigma} q_2^{\text{imaj } \sigma}.$$

Явное выражение для функции $H_n(t_1, q_1, t_2, q_2)$ было получено в [12]. Мы перепишем его в несколько ином, более удобном для дальнейших рассуждений виде, в связи с чем нам понадобится ряд новых обозначений. Для неотрицательных целых чисел r и q положим $(r)_q = 1 + q + \dots + q^{r-1}$, считая при этом, что $(0)_q = 0$. Легко проверить, что

$$(r)_{q^k} = \frac{1 - q^{rk}}{1 - q^k} = \frac{(r)_q (k)_{q^r}}{(k)_q}. \quad (1)$$

Положим, наконец,

$$(t; q)_{n+1} = (1-t)(1-tq)(1-tq^2) \dots (1-tq^n).$$

Лемма 1 ([12]). Последовательность $H_n(t_1, q_1, t_2, q_2)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет формальному соотношению

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n! H_n(t_1, q_1, t_2, q_2) u^n}{(t_1; q_1)_{n+1} (t_2; q_2)_{n+1}} = \sum_{s \geq 0} \sum_{r \geq 0} t_1^s t_2^r \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} (s)_{q_1^m} (r)_{q_2^m} u^m \right\}. \quad (2)$$

Из леммы I мы выведем позднее явное выражение для интересующей нас производящей функции, однако на данном этапе нам будет удобнее использовать особый способ порождения случайной перестановки из множества $S(n)$.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения, и пусть $\text{rank } X_k$ — количество случайных величин в рассматриваемой последовательности, не превосходящих X_k (считая X_k). В силу непрерывности распределения случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, последовательность $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, в которой $\sigma(k) = \text{rank } X_k$, является перестановкой с вероятностью единица, и, очевидно, вероятность реализации любой перестановки из $S(n)$ в такой схеме равна $1/n!$. Положим $Z(k) = \mathbf{I}(X_k > X_{k+1})$ и пусть

$$\xi(m) = \sum_{k=1}^{m-1} Z(k). \quad (3)$$

Легко понять, что

$$\{X_k > X_{k+1}\} \iff \{\sigma(k) > \sigma(k+1)\},$$

и, следовательно,

$$\text{des } \sigma = \xi(n), \quad (4)$$

в то время как

$$\text{maj } \sigma = \sum_{k=1}^{n-1} kZ(k) = n\xi(n) - \sum_{k=1}^n \xi(k). \quad (5)$$

Отталкиваясь от представлений (3) и (4), нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} A(n) &= \mathbf{E} \text{des } \sigma = \mathbf{E} \text{ides } \sigma = (n-1)/2, \\ B(n) &= \mathbf{E} \text{maj } \sigma = \mathbf{E} \text{imaj } \sigma = n(n-1)/4, \end{aligned} \quad (6)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} C(n) &= \mathbf{D} \text{des } \sigma = \mathbf{D} \text{ides } \sigma = (n+1)/12, \\ D(n) &= \mathbf{D} \text{maj } \sigma = \mathbf{D} \text{imaj } \sigma = (n-1)n(2n+5)/72. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем использовать символ $*$ для соответствующих случайных величин, подвергшихся стандартной центрировке и нормировке. Так, в частности,

$$\text{des } \sigma^* = (\text{des } \sigma - \mathbf{E} \text{des } \sigma) / (\mathbf{D} \text{des } \sigma)^{-1/2}.$$

Пусть (η_1, ς_1) и (η_2, ς_2) — независимые случайные векторы, каждый из которых имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6}/2 \\ \sqrt{6}/2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ распределение четырехмерного случайного вектора $(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*, \text{idcs } \sigma^*, \text{imaj } \sigma^*)$ сходится к распределению четырехмерного вектора $(\eta_1, \varsigma_1, \eta_2, \varsigma_2)$.

Положим $b = (12)^{-1/2}$ и рассмотрим случайный процесс

$$Y_n(t) = \frac{1}{b\sqrt{n}}(\xi([nt]) - \mathbf{E}\xi([nt])), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Лемма 2. Последовательность случайных процессов $\{Y_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ в топологии Скорохода к стандартному винеровскому процессу $\{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$.

Доказательство. В силу определения (3) случайная величина $\xi([nt])$ является суммой 1-зависимых случайных величин и, следовательно (см., например, [14]) при $n \rightarrow \infty$ распределение $Y_n(t)$ сходится к нормальному распределению с параметрами 0 и t . По тем же соображениям при любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq 1$ распределение вектора $(Y_n(t_1), Y_n(t_2), \dots, Y_n(t_r))$ сходится к распределению вектора $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_r))$.

Докажем теперь, что последовательность мер, порождаемых последовательностью процессов Y_n , плотна. Для этого рассмотрим процессы

$$Y_n^{(1)}(t) = \frac{1}{b\sqrt{n}} \sum_{k \leq (nt+1)/2} (Z(2k-1) - 1/2),$$

$$Y_n^{(2)}(t) = \frac{1}{b\sqrt{n}} \sum_{k \leq nt/2} (Z(2k) - 1/2),$$

под знаками суммы в определениях каждого из которых стоят независимые между собой случайные величины. Поскольку

$$|Y_n(t) - Y_n(s)| \leq |Y_n^{(1)}(t) - Y_n^{(1)}(s)| + |Y_n^{(2)}(t) - Y_n^{(2)}(s)|,$$

желаемое свойство плотности мер, соответствующих распределениям последовательности Y_n , будет установлено, если мы покажем, что последовательности мер, порождаемых соответственно распределениями процессов $Y_n^{(1)}$ и $Y_n^{(2)}$, плотны. Справедливость последнего факта вытекает из независимости слагаемых, определяющих указанные процессы (мы отсылаем за подробностями к монографии [15, глава 3, §16]). В силу теоремы Донскера [15, глава 3, §16] установленные выше свойства последовательности процессов Y_n влекут утверждение леммы.

Лемма 3. При $n \rightarrow \infty$ совместное распределение компонент случайного вектора $(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*)$ сходится к двумерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей B , задаваемой (8).

Доказательство. Ввиду (5)–(7)

$$\text{maj } \sigma^* = bn \left(\frac{n}{\mathbf{D} \text{maj } \sigma} \right)^{1/2} \left(Y_n(1) - \int_0^1 Y_n(t) dt \right). \quad (9)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} bn \left(\frac{n}{\mathbf{D} \text{maj } \sigma} \right)^{1/2} = \sqrt{6}$$

и преобразование случайного процесса $Y_n(t)$, определяемое последним сомножителем в (9), непрерывно в топологии Скорохода, в силу леммы 2 и принципа инвариантности при $n \rightarrow \infty$

$$(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*) \xrightarrow{D} \left(W(1), \sqrt{6} \left(W(1) - \int_0^1 W(t) dt \right) \right) \quad (10)$$

где символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению. Последнее доказывает лемму, так как вектор, стоящий в правой части (10) имеет двумерное нормальное распределение с ковариационной матрицей B , задаваемой (8).

Замечание 1. Поскольку распределения случайных векторов $(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*)$ и $(\text{ides } \sigma^*, \text{imaj } \sigma^*)$ совпадают, заключение леммы 3 остается справедливым и для пары $(\text{ides } \sigma^*, \text{imaj } \sigma^*)$.

Замечание 2. Используя принцип инвариантности, можно найти совместные распределения $\text{des } \sigma^*$ с рядом других характеристик случайных перестановок. Например, действуя в духе монографии Биллингсли [15], можно вычислить предельное совместное распределение случайных величин

$$\text{des } \sigma^*, \quad \text{maj } \sigma^*, \quad \max_{0 < k < n} \xi^*(k), \quad \frac{1}{n^{3/2}} \max_{0 < r \leq n} \left(\sum_{k=1}^{r-1} kZ(k) - r(r-1)/4 \right),$$

а также иных характеристик перестановок, которые могут быть достаточно просто записаны в терминах спусков.

Замечание 3. Пусть $\pi = \pi(1)\pi(2) \dots \pi(j)$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, j, j < n$, а $k \in \{1, 2, \dots, n-j+1\}$. Скажем, что фрагмент $\sigma(k)\sigma(k+1) \dots \sigma(k+j-1)$ перестановки σ имеет профиль спусков π , если места спусков перестановки π и последовательности чисел $\sigma(k)\sigma(k+1) \dots \sigma(k+j-1)$ совпадают. Так, например, если $\pi = 2\ 3\ 1$, а $\sigma = 3\ 5\ 2\ 4\ 1$, то профили π и σ совпадают при $k = 1$ и 3 . Обозначим $Z_\pi(k)$ индикатор события, состоящего в совпадении профилей спусков π и $\sigma(k)\sigma(k+1) \dots \sigma(k+j-1)$. Используя порождение перестановок при помощи случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющих непрерывное распределение, положим

$$\tau_k = (\tau_k(1)\tau_k(2) \dots \tau_k(j))$$

где $\tau_k(i)$ равно количеству случайных величин среди $X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+j-1}$, не превосходящих X_{k+i-1} . Нетрудно понять, что профиль фрагмента определяется не абсолютными значениями образующих его элементов, а отношением “больше–меньше”, и, следовательно, $Z_\pi(k) = 1$ тогда и только тогда, когда

$\tau_k = \pi$. Отсюда вытекает, что случайные величины $Z_\pi(k)$, $k = 1, 2, \dots, n - j + 1$, являются j -зависимыми. Положим

$$\text{des}_\pi \sigma = \sum_{k=1}^{n-j} Z_\pi(k), \quad \text{maj}_\pi \sigma = \sum_{k=1}^{n-j} k Z_\pi(k)$$

(введенные характеристики перестановок рассматривались, например, в [18]). В частности, если $\pi = 2\ 1$, то $\text{des}_\pi \sigma = \text{des } \sigma$ и $\text{maj}_\pi \sigma = \text{maj } \sigma$. Используя j -зависимость случайных величин $Z_\pi(k)$ и повторяя практически дословно доказательство леммы 3, можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ вектор $(\text{des}_\pi \sigma^*, \text{maj}_\pi \sigma^*)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым вектором средних и некоторой ковариационной матрицей B_π . Мы опускаем подробное доказательство этого факта.

Цель последующих рассуждений — установить асимптотическую независимость векторов $(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*)$ и $(\text{idcs } \sigma^*, \text{imaj } \sigma^*)$. К сожалению, мы не располагаем “вероятностным” доказательством этого факта и вынуждены прибегнуть к довольно громоздким аналитическим оценкам.

Лемма 4. Пусть

$$t = \exp\{i\lambda n^{-1/2}\}, \quad q = \exp\{i\gamma n^{-3/2}\},$$

где λ и γ — положительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Для любых неотрицательных целых чисел r и s , удовлетворяющих неравенству $r + s \leq n$, справедлива оценка

$$|(tq^r; q)_s| \leq (\lambda + \gamma)^s n^{-s/2}.$$

Доказательство. В силу неравенства $|1 - e^{ix}| \leq |x|$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |(tq^r; q)_s| &= \prod_{k=0}^{s-1} |1 - tq^{k+r}| \leq \prod_{k=0}^{s-1} (|1 - t| + |1 - q^{k+r}|) \leq \prod_{k=0}^{s-1} (|1 - t| + (k+r)|1 - q|) \\ &\leq \prod_{k=0}^{s-1} (\lambda n^{-1/2} + (k+r)\gamma n^{-3/2}) \leq (\lambda + \gamma)^s n^{-s/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_n$ — последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношению $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ а $q = \exp\{i\gamma n^{-3/2}\}$, где γ — положительное число. Справедливо неравенство

$$R = \prod_{m=1}^n m^{k_m} \left| \prod_{m=1}^n ((m)_q)^{k_m} \right|^{-1} \leq C,$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Ввиду очевидных оценок

$$|(m)_q| = \left| \frac{1 - q^m}{1 - q} \right| \leq m, \quad |(m)_q| \geq m - m(m-1)|1 - q|$$

а также неравенства $1 - x \geq e^{-2x}$, справедливого при всех достаточно малых положительных x , и в силу выбора q получаем, что

$$\begin{aligned} R &\leq \left| \prod_{m=1}^n (1 - (m-1)|1 - q|)^{k_m} \right|^{-1} \leq \exp \left\{ 2|1 - q| \sum_{m=1}^n m k_m \right\} \\ &= \exp\{2n|1 - q|\} \leq C. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Как показано в [10], функцию $G_n^{(1)}(t_1, q_1) = H_n(t_1, q_1, 1, 1)$ можно записать в виде

$$G_n^{(1)}(t_1, q_1) = \frac{1}{n!} (t_1; q_1)_{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} t_1^r ((r)_{q_1})^n.$$

Аналогичное представление справедливо и для производящей функции $G_n^{(2)}(t_2, q_2) = H_n(1, 1, t_2, q_2)$.

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_n$ — последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношениям $k_1 + k_2 + \dots + k_n = j < n$ и $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$,

$$L_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q) = (t; q)_{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} t^r ((r)_q)^j \prod_{m=1}^n ((m)_{q^r})^{k_m}.$$

Лемма 6. Пусть

$$t = \exp\{i\lambda n^{-1/2}\}, \quad q = \exp\{i\gamma n^{-3/2}\},$$

где λ и γ — положительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Тогда

$$|L_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q)| \leq j! (\lambda + \gamma)^{n-j} n^{-(n-j)/2} \prod_{m=1}^n m^{k_m}.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^n ((m)_{q^r})^{k_m} &= \prod_{m=1}^n (1 + q^r + q^{2r} + \dots + q^{(m-1)r})^{k_m} \\ &= \sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, k_2, \dots, k_m) q^{rs}, \end{aligned}$$

где положительные коэффициенты $C(s, k_1, k_2, \dots, k_m)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, k_2, \dots, k_m) = \prod_{m=1}^n m^{k_m}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_{n,j}(k_1, \dots, k_n; t, q) &= \sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, \dots, k_n)(t; q)_{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} (tq^s)^r ((r)_q)^j \\ &= \sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, \dots, k_n)(t; q)_s j! G_j^{(1)}(tq^s, q)(tq^{s+j+1}; q)_{n-s-j-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая лемму 4 и тот факт, что $|G_j^{(1)}(t, q)| \leq 1$, получаем оценки

$$\begin{aligned} |L_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q)| &\leq j! \sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, k_2, \dots, k_n)(t; q)_s (tq^{s+j+1}; q)_{n-s-j-1} \\ &\leq j! (\lambda + \gamma)^{n-j} n^{-(n-j)/2} \sum_{s=0}^{n-j} C(s, k_1, k_2, \dots, k_n), \end{aligned}$$

что вместе с (11) завершает доказательство леммы.

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_n$ — последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих соотношениям $k_1 + k_2 + \dots + k_n = j < n$ и $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Положим

$$T_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q) = (t; q)_{n+1} \sum_{r=0}^{\infty} t^r \prod_{m=1}^n ((r)_m)^{k_m}.$$

Лемма 7. В условиях леммы 6

$$|T_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q)| \leq C j! (\lambda + \gamma)^{n-j} n^{-(n-j)/2},$$

где константа C та же, что и в лемме 5.

Доказательство. Используя равенство (1), нетрудно проверить, что

$$T_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q) = \left(\prod_{m=1}^n ((m)_q)^{k_m} \right)^{-1} L_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t, q).$$

Теперь необходимая оценка следует из лемм 5 и 6.

Для $j \leq n$ положим

$$\begin{aligned} M_{n,j}(r, s; q_1, q_2) &= \frac{1}{j!} \text{coeff}_{u^n} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} (s)_{q_1^m} (r)_{q_2^m} u^m \right)^j \\ &= \sum^{(j)} \prod_{m=1}^n \frac{1}{k_m! m^{k_m}} ((r)_{q_1^m} (s)_{q_2^m})^{k_m}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже знак $\sum^{(j)}$ обозначает суммирование по всем наборам целых неотрицательных чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$, удовлетворяющих условиям $k_1 + k_2 + \dots + k_n = j$ и $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Заметим, что

$$M_{n,n}(r, s; q_1, q_2) = \frac{1}{n!} ((r)_{q_1} (s)_{q_2})^n.$$

Доказательство теоремы 1. В принятых обозначениях производящая функция $H_n(t_1, q_1, t_2, q_2)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} H_n(t_1, q_1, t_2, q_2) &= \frac{1}{n!} (t_1; q_1)_{n+1} (t_2; q_2)_{n+1} \sum_{s \geq 0} \sum_{r \geq 0} t_1^s t_2^r \sum_{j=1}^n M_{n,j}(r, s; q_1, q_2) \\ &= G_n^{(1)}(t_1, q_1) G_n^{(2)}(t_2, q_2) + Q_n(t_1, q_1, t_2, q_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &Q_n(t_1, q_1, t_2, q_2) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j!}{n!} \right)^2 \sum^{(j)} \prod_{m=1}^n \frac{1}{k_m! m^{k_m}} L_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t_1, q_1) T_{n,j}(k_1, k_2, \dots, k_n; t_2, q_2). \end{aligned}$$

Пусть

$$t_k = \exp\{i\lambda_k(C(n))^{-1/2}\}, \quad q_k = \exp\{i\gamma_k(D(n))^{-1/2}\},$$

где λ_k и γ_k — положительные числа, $k = 1, 2$. Положим также

$$\lambda = 10 \max(\lambda_1, \lambda_2), \quad \gamma = 10 \max(\gamma_1, \gamma_2).$$

Из леммы 7 и равенств (7) следует, что при всех достаточно больших n

$$|Q_n(t_1, q_1, t_2, q_2)| \leq C^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j!}{n!} \right)^2 S(n, j) (\lambda + \gamma)^{2(n-j)} n^{-(n-j)},$$

где через

$$S(n, j) = \sum^{(j)} \prod_{m=1}^n \frac{1}{k_m! m^{k_m}}$$

обозначены числа Стирлинга первого рода без знака, определяемые равенством

$$\sum_{j=1}^n S(n, j) x^j = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

(см. [16, стр. 181]). Поскольку, очевидно,

$$S(n, j) = \sum_{1 \leq p_1 < \dots < p_{n-j} \leq n-1} p_1 \dots p_{n-j} \leq n^{n-j} \binom{n}{n-j},$$

при выбранных значениях t_k и q_k , $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} |Q_n(t_1, q_1, t_2, q_2)| &\leq C^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j!}{n!} \right)^2 \binom{n}{n-j} (\lambda + \gamma)^{2(n-j)} \\ &\leq C^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j!}{n! (n-j)!} (\lambda + \gamma)^{n-j} \\ &\leq \frac{C^2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\lambda + \gamma)^{2(n-j)}}{(n-j)!} \leq \frac{C^2}{n} \exp\{2(\lambda + \gamma)\}. \end{aligned}$$

Теперь у нас всё готово для завершения доказательства теоремы. Вспоминая обозначения (6) и (7), положим для $k = 1, 2$

$$t_k^* = \exp\{-i\lambda_k A(n)(C(n))^{-1/2}\}, \quad q_k^* = \exp\{-i\gamma_k B(n)(D(n))^{-1/2}\}.$$

Тогда, в силу предыдущих оценок, леммы 3 и замечания 1, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \exp\{i(\lambda_1 \text{des } \sigma^* + \lambda_2 \text{idex } \sigma^* + \gamma_1 \text{maj } \sigma^* + \gamma_2 \text{imaj } \sigma^*)\} \\ &= t_1^* q_1^* G_n(t_1, q_1) t_2^* q_2^* G_n(t_2, q_2) + t_1^* t_2^* q_1^* q_2^* Q_n(t_1, q_1, t_2, q_2) \\ &\rightarrow \mathbf{E} \exp\{i(\lambda_1 \eta_1 + \gamma_1 \varsigma_1)\} \mathbf{E} \exp\{i(\lambda_2 \eta_2 + \gamma_2 \varsigma_2)\}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Пусть

$$\text{inv } \sigma = \sum_{k < j} \mathbf{I}(\sigma(k) > \sigma(j))$$

— количество инверсий в перестановке σ . Как показано в [17], распределения векторов $(\text{des } \sigma, \text{maj } \sigma, \text{imaj } \sigma)$ и $(\text{des } \sigma, \text{maj } \sigma, \text{inv } \sigma)$ совпадают. Отсюда и из теоремы 1 вытекает асимптотическая нормальность вектора $(\text{des } \sigma^*, \text{maj } \sigma^*, \text{inv } \sigma^*)$ и асимптотическая независимость его первых двух компонент от последней.

Замечание 5. Пусть e — тождественная перестановка из $S(n)$, а

$$\Omega_p = \{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p), \sigma_k \in S(n): \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p = e\}.$$

Зададим на множестве Ω_p равномерное распределение, приписав каждому набору $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in \Omega_p$ вероятность $(n!)^{p-1}$, и положим

$$H_n(t_1, q_1, \dots, t_p, q_p) = \mathbf{E} \prod_{k=1}^p t_k^{\text{des } \sigma_k} q_k^{\text{maj } \sigma_k}.$$

Исходя из представления (см. [10])

$$\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(t_1, q_1, \dots, t_p, q_p) (n!)^{p-1} u^n}{\prod_{k=1}^p (t_k; q_k)_{n+1}} = \sum_{s_1 \geq 0} \dots \sum_{s_p \geq 0} \prod_{k=1}^p t_k^{s_k} \exp \left\{ \sum_{m \geq 1} \frac{u^m}{m} \prod_{k=1}^p (s_k)_{q_k^m} \right\}$$

и практически дословно повторяя доказательство теоремы 1, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ распределение 2р-мерного случайного вектора $(\text{des } \sigma_k^*, \text{maj } \sigma_k^*; k = 1, \dots, p)$ сходится к распределению 2р-мерного вектора $(\eta_k, \varsigma_k; k = 1, \dots, p)$, в котором пары $\eta_k, \varsigma_k, k = 1, \dots, p$, одинаково распределены и независимы, причем распределения двумерных векторов $(\eta_k, \varsigma_k), k = 1, \dots, p$, нормальны с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей B , описываемой (8).

Список литературы

1. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
2. Колчин В. Ф. О числе подстановок с ограничениями на длины циклов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 97–109.
3. Павлов А. И. О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 109–123.
4. Якимив А. Л. О подстановках с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 125–134.
5. Якимив А. Л. О некоторых классах постановок с длинами циклов из заданного множества. *Дискретная математика* (1992) **4**, №3, 128–134.
6. Колчин А. В. Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 100–115.
7. Arratia R., Tavaré S. Limit theorems for combinatorial structures via discrete process approximations. *Random Structures and Algorithms* (1992) **3**, 321–344.
8. Гульден Я., Джексон Д. *Перечислительная комбинаторика*. Наука, Москва, 1990.
9. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. Мир, Москва, 1990.
10. Garsia A. M., Gessel I. Permutation statistics and partitions. *Adv. Math.* (1979) **31**, 288–305.
11. Rowlings D. Enumeration of permutations by descents, indescent, imajor index, and basic components. *J. Combinatorial Theory, Ser. A* (1981) **36**, 1–14.
12. Rowlings D. P. Generalized Worpitzky identities with applications to permutation enumeration. *European J. Combinatorics* (1981) **2**, 67–78.
13. Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ, т.3: Сортировка и поиск*. Мир, Москва, 1978.
14. Шергин В. В. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для m -зависимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1979) **24**, №4, 781–794.
15. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*. Наука, Москва, 1977.
16. Риордан Дж. *Комбинаторные тождества*. Наука, Москва, 1982.
17. Foata D. Distributions Euleriennes et Mahoniennes sur le groupe des permutations, In: *Higher Combinatorics. Proc. NATO Adv. Inst.* (M. Aigner, Ed.) Dordrecht, Riedel, 1977, pp. 27–49.
18. Björner A., Wachs M. L. Permutation statistics and linear extensions of posets. *J. Combinatorial Theory, Ser. A* (1991) **58**, 85–114.

Статья поступила 9.02.1995.