Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Семаев, О вычислении логарифмов на эллиптических кривых, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 1, 65–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:35:43

О вычислении логарифмов на эллиптических кривых

© 1996 г. И. А. Семаев

Рассматривается задача решения показательного уравнения в циклической подгруппе порядка m группы E точек эллиптической кривой, определенной над конечным полем F_q . Доказано, что если F_{q_1} — минимальное расширение F_q такое, что подгруппа точек, рациональных над F_{q_1} , группы E содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z}/m \times \mathbf{Z}/m$, то сложность решения указанного уравнения не превосходит сложности вычисления логарифмов в поле F_{q_1} или сложности $O(\ln m)$ арифметических операций в этом поле. Таким образом, вычисление логарифмов на эллиптических кривых сводится к логарифмированию в конечном поле. С помощью другого подхода эта редукция была получена Менезесом, Окамото и Ванстоуном.

1. Рассматривается задача решения показательного уравнения в группе точек эллиптической кривой, определенной над конечным полем F_q . Поле F_q состоит из q элементов. Пусть F — некоторое расширение исходного поля F_q . Точки (x, y) , $x, y \in F$, удовлетворяющие уравнению

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad (1)$$

где $a_i \in F_q$ таковы, что кривая (1) без особенностей, вместе с бесконечноудаленной точкой P_∞ образуют коммутативную группу, которую мы будем обозначать E/F . Известно, что если F — конечное поле порядка q_1 , то порядок N_{q_1} группы E/F удовлетворяет неравенству $|N_{q_1} - q_1 - 1| \leq 2q_1^{1/2}$.

Пусть T — некоторая точка на E/F_q , которая порождает циклическую подгруппу $\langle T \rangle$ порядка m . Таким образом, $|\langle T \rangle| = m$. Задача состоит в решении уравнения

$$S = nT \quad (2)$$

относительно n при известных S и T . Нетрудно понять, что решение уравнения (2) сводится к случаю, когда m — простое число.

Кроме тривиального перебора n от 1 до m с последующей проверкой выполнения равенства (2), существует метод, предложенный Полигом и Хеллманом [1]. При памяти объема V сложность решения уравнения (2) есть величина порядка $m/V + V$. Сравним сложность решения уравнения (2) со сложностью проблемы дискретного логарифмирования. Рассмотрим уравнение

$$b = a^n, \quad (3)$$

$a, b \in F_q^*$. Проблема решения уравнения (3) имеет обширную литературу. Приведем два наиболее ярких результата. Пусть $q \rightarrow \infty$. В работе [2] Адлеман построил алгоритм в простом поле, асимптотическая оценка сложности которого равна

$$\exp(c_1(\ln q \ln \ln q)^{1/2}). \quad (4)$$

Копперсмит в [3] установил, что в случае, когда $q = 2^k$, сложность логарифмирования равна величине

$$\exp(c_2(k \ln^2 k)^{1/3}). \quad (5)$$

В том и другом случае c_1 и c_2 — небольшие постоянные. Следует также отметить, что доказательства оценок (4) и (5) имеют эвристический характер.

Как видно, проблема дискретного логарифмирования является во многих случаях существенно менее сложной по сравнению с проблемой решения уравнения (2). Отсутствие быстрых алгоритмов решения уравнения (2) является основанием для использования этой задачи в области криптографии при построении сетей связи с открытым распределением ключей [4, 7].

В предлагаемой работе доказывается, что с помощью несложных вычислений решение уравнения (2) сводится к решению уравнения (3) в некотором расширении F_{q_1} исходного поля F_q . Примеры показывают, что степень указанного расширения может быть очень мала. Это приводит к резкому уменьшению сложности вычисления логарифмов на эллиптических кривых, обладающих таким свойством. Точнее, в работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть F_{q_1} — расширение поля F_q такое, что E/F_{q_1} содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z}/t \times \mathbf{Z}/t$. Тогда сложность решения уравнения (2) не превосходит сложности вычисления логарифмов в поле F_{q_1} или сложности $O(\ln t)$ арифметических операций в том же поле.

Статья, кроме введения, содержит еще два раздела. В разделе 2 вводятся некоторые понятия и приводятся отдельные результаты теории эллиптических кривых. В разделе 3 доказывается сформулированная теорема и обсуждаются примеры.

Предлагаемая работа была выполнена в 1990 году. Другим методом этот результат получен в [10], некоторые усовершенствования и обобщения содержатся в [11]. Следует отметить, что методы автора могут быть применены к решению показательного уравнения в произвольном абелевом многообразии, определенном над конечным полем, при подходящем задании абелева многообразия.

2. Основное содержание этого параграфа взято из книги [5].

Пусть F — алгебраическое замыкание поля F_q , а $F[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x, y . Поле частных $F(E)$ фактор-кольца $F[x, y]$ по идеалу, порождаемому уравнением (1), называется полем алгебраических функций на кривой E/F . Дивизором на E/F называется формальная сумма конечного числа точек кривой с целыми коэффициентами. Таким образом, дивизор на E/F имеет вид $\sum n_P(P)$, где среди целых n_P лишь конечное число отлично от нуля. Пусть $f \in F(E)$ — функция на E/F . Точки P_i — нули функции f с кратностями

n_i , а Q_j — полюса функции f с кратностями m_j . Тогда дивизором функции f называется дивизор $\sum n_i(P_i) - \sum m_j(Q_j)$, который обозначается $\operatorname{div} f$. Пусть

$$D = \sum n_P(P) \quad (6)$$

— произвольный дивизор на E/F . Известно, что существует алгебраическая функция $f \in F(E)$ такая, что $\operatorname{div} f = D$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $\sum n_P = 0$, как сумма целых чисел, и $\sum n_P(P) = P_\infty$, в группе точек эллиптической кривой E/F . Можно определить значение функции f на дивизоре D , если нули и полюса f не содержатся среди точек P таких, что $n_P \neq 0$ в выражении (6). Положим

$$f(D) = \prod_P f^{n_P}(P).$$

Пусть F_{q_1} — расширение поля F_q такое, что группа E/F_{q_1} содержит подгруппу $E[m]$, изоморфную $\mathbf{Z}/m \times \mathbf{Z}/m$. Спаривание Вейля e_m — билинейное отображение прямого произведения $E[m]$ на себя в мультипликативную группу поля F_{q_1} : $e_m: E[m] \times E[m] \rightarrow F_{q_1}^*$. Для пары точек $P, Q \in E[m]$ значение функции $e_m(P, Q)$ определяется следующим образом. Пусть R — любая точка на E/F , обладающая тем свойством, что точки $P_\infty, P, Q+R, R$ попарно различны. Определим дивизоры на E/F , полагая $D_P = (P) - (P_\infty)$, $D_Q = (Q+R) - (R)$. Тогда найдутся алгебраические функции $f_P, f_Q \in F(E)$ с коэффициентами из поля F_{q_1} , удовлетворяющие равенствам

$$\operatorname{div} f_P = m(P) - m(P_\infty), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} f_Q = m(Q+R) - m(R). \quad (8)$$

Теперь значение спаривания Вейля точек P и Q определяется равенством $e_m(P, Q) = f_P(D_Q)/f_Q(D_P)$. Заметим, что функции, которые удовлетворяют равенствами (7) и (8), определены с точностью до мультипликативных постоянных из F . Очевидно, что значение функции e_m не зависит от этих множителей. Функция e_m обладает следующими свойствами:

- (a) $e_m(P_1 + P_2, Q) = e_m(P_1, Q)e_m(P_2, Q)$;
- (b) $e_m(P, Q) = e_m(Q, P)^{-1}$;
- (c) если σ — автоморфизм F над F_q , то $e_m(P, Q)^\sigma = e_m(P^\sigma, Q^\sigma)$;
- (d) существуют точки $P, Q \in E[m]$ такие, что $e_m(P, Q)$ — примитивный корень степени m из 1.

Из свойства (d) следует, в частности, что мультипликативная группа поля F_{q_1} содержит всю группу корней степени m из 1.

Теперь ясно, каким образом свести решение уравнения (2) к решению уравнения (3). Пусть Q — произвольная точка $E[m]$ порядка m такая, что группы $\langle Q \rangle$ и $\langle T \rangle$ имеют тривиальное пересечение. Тогда из свойств спаривания Вейля следует, что отображение $e_m(\cdot, Q)$ осуществляет изоморфное вложение группы $\langle T \rangle$ в группу $F/F_{q_1}^*$. Поэтому имеет место соотношение

$$e_m(S, Q) = e_m(T, Q)^n \quad (9)$$

в поле F_{q_1} . Таким образом, для доказательства теоремы осталось показать, что значения $e_m(S, Q)$ и $e_m(T, Q)$ могут быть вычислены за $O(\ln m)$ арифметических операций в поле F_{q_1} . Следует отметить, что точка Q может быть легко вычислена путем случайного выбора точек в группе E/F_{q_1} . Эта операция является единственным вероятностным моментом в предлагаемой процедуре.

3. Обозначим через f'_Q алгебраическую функцию на E/F с дивизором $\text{div } f'_Q = m(Q) - m(P_\infty)$. Очевидно, что $f'_Q(X) = f_Q(X - R)$. Поэтому, учитывая выражение (9) для e_m , а также рассуждение в конце предыдущего параграфа, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $P \in E[m]$, точка U — произвольная точка на E/F , которая не содержится в группе $\langle P \rangle$, порождаемой точкой P . Тогда значение функции f_P , которая определена равенством (7), в точке U может быть вычислено за $O(\ln m)$ арифметических операций в поле F_{q_1} .

Доказательство. В поле $F(E)$ существует и определена над F_{q_1} алгебраическая функция φ_k , которая удовлетворяет равенству

$$\text{div } \varphi_k = k(P) - (kP) - (k-1)(P_\infty).$$

В частном случае, когда $k = m$, имеют место равенства

$$\text{div } \varphi_m = m(P) - (mP) - (m-1)(P_\infty) = m(P) - m(P_\infty) = \text{div } f_P.$$

Поэтому с точностью до множителя из F

$$\varphi_m = f_P. \quad (10)$$

Мы покажем, как быстро вычислить значение функции φ_m в точке U . Тогда из (10) получим утверждение леммы. Предположим, что $k = k_1 + k_2$. Имеет место тождество

$$\varphi_k = \lambda_{k_1, k_2}^{-1} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2}, \quad (11)$$

где λ_{k_1, k_2} — функция на E/F , дивизор которой равен

$$(kP) - (k_1P) - (k_2P) + (P_\infty). \quad (12)$$

Тождество (11) есть следствие цепочки равенств

$$\begin{aligned} \text{div } \varphi_k &= k(P) - (kP) - (k-1)(P_\infty) \\ &= k_1(P) - (k_1P) - (k_1-1)(P_\infty) + k_2(P) - (k_2P) - (k_2-1)(P_\infty) \\ &\quad - ((kP) - (k_1P) - (k_2P) + (P_\infty)) \\ &= \text{div } \varphi_{k_1} + \text{div } \varphi_{k_2} - \text{div } \lambda_{k_1, k_2} \end{aligned}$$

и того факта, что дивизор произведения функций равен сумме дивизоров этих функций.

Из тождества (11) и 2-адического представления числа k следует, что функция φ_k является произведением $O(\ln k)$ функций вида λ_{k_1, k_2} и такого же числа функций φ_{2^i} . Снова применяя тождество (11), находим, что

$$\varphi_{2^l} = \lambda_{2^{l-1}, 2^{l-1}}^{-1} \varphi_{2^{l-1}}^2.$$

Значит, для того, чтобы получить значения функций φ_{2^l} достаточно вычислить значения функций $\lambda_{2^l, 2^l}$, $l = 1, 2, \dots, [\log_2 k]$. Итак, для вычисления значения алгебраической функции φ_k надо получить значения $O(\ln k)$ функций, дивизор которых имеет вид (12). Затем следует их перемножить в соответствии с правилами, задаваемыми тождествами вида (11).

Каким образом можно получить значение функции λ_{k_1, k_2} ? Рассмотрим несколько более общую функцию λ , дивизор которой удовлетворяет равенству $\text{div } \lambda = (R + H) - (R) - (H) + (P_\infty)$, где R, H — произвольные точки на E/F_{q_1} . Пусть η_1, η_2, η_3 — линейные функции с коэффициентами в поле F_{q_1} , которые задают уравнения прямых, проходящих через точки $R + H, -R, -H$, точки $R, -R$, точки $H, -H$, соответственно. Тогда

$$\text{div } \eta_1 = (R + H) + (-R) + (-H) - 3(P_\infty),$$

$$\text{div } \eta_2 = (R) + (-R) - 2(P_\infty),$$

$$\text{div } \eta_3 = (H) + (-H) - 2(P_\infty).$$

Поэтому $\text{div}(\eta_1 \eta_2^{-1} \eta_3^{-1}) = \text{div } \lambda$, то есть следует положить $\lambda = \eta_1 \eta_2^{-1} \eta_3^{-1}$. Отметим, что все алгебраические функции вида $\lambda_{k,l}$ определены над F_{q_1} . Поэтому вычисление их значений в точке $U \in E/F_{q_1}$ производится также над F_{q_1} . Далее, так как точка U не входит в группу, порождаемую точкой P , она не содержится среди нулей и полюсов ни одной из функций $\lambda_{k,l}$. Следовательно, их значения в точке U корректно определены и отличны от нуля. Таким образом, мы показали, что значение алгебраической функции φ_k в точке U можно вычислить за $O(\ln k)$ операций в поле F_{q_1} . Полагая $k = m$, получаем утверждение леммы.

Теорема является следствием леммы и рассуждений, приведенных в конце §2.

Рассмотрим теперь какова степень k расширения поля F_{q_1} над F_q такого, что $E[m] \in E/F_{q_1}$. Докажем еще одну лемму.

Лемма 2. *Предположим, что m делит порядок группы E/F_q . Пусть l — минимальное натуральное число, для которого $q^l \equiv 1 \pmod{m}$. Тогда степень расширения k делится на l и делит lm .*

Доказательство. Функция e_m принимает свои значения в поле F_{q^l} . Поэтому, очевидно, l делит k . Пусть P и Q — точки порядка m на E/F . Пусть при этом $P \in E/F_q$. Тогда согласно свойству (с) спаривания Вейля

$$e_m(P, Q) = e_m(P, Q)^\sigma = e_m(P^\sigma, Q^\sigma) = e_m(P, Q^\sigma),$$

где σ — произвольный автоморфизм поля F над F_{q^l} . Отображение $e_m(P, \cdot)$, когда порядок точки P равен m , осуществляет изоморфное вложение группы $\langle Q \rangle$ в мультипликативную группу поля F_{q^l} . Поэтому для каждого автоморфизма σ поля F над F_{q^l} выполняется равенство $Q^\sigma = Q + sP$ при некотором s . Значит, автоморфизм σ^m фиксирует точку Q . Следовательно, точка Q лежит на $E/F_{q^{lm}}$. Таким образом, число l делит k и число k , в свою очередь, делит произведение lm . Лемма доказана.

Рассмотрим примеры. В статье [7] предлагается использовать на практике одну из кривых с комплексным умножением. А именно, пусть p — простое число,

$p \equiv -1 \pmod{4}$. Эллиптическая кривая имеет над F_p уравнение

$$y^2 = x^3 + Ax. \quad (13)$$

Известно, что порядок группы E/F_p равен $p+1$. Нетрудно показать, что $E[p+1] \subseteq E/F_{p^2}$. Поэтому сложность логарифмирования на кривой (13) не превосходит сложности логарифмирования в поле F_{p^2} . Как показано в [6], для сложности логарифмирования в F_{p^2} имеет место оценка (4).

Похожим образом можно показать, что решение показательного уравнения на кривых $y^2 = x^3 + B$ над F_p , где $p \equiv -1 \pmod{3}$ и

$$y^2 + y + A = x^3 \quad (14)$$

над F_{2^k} , где k — нечетное число, также сводится к логарифмированию в квадратичном расширении исходного поля. Причем в последнем случае для сложности логарифмирования на кривой (14) верна оценка (5). Эти кривые были рассмотрены с точки зрения практического приложения в работе [8].

Кроме того, в статье [9] предлагается использовать группы точек эллиптических кривых над полем характеристики 2, у которых j -инвариант равен 0. Это кривая (14) при $A=0$, а также кривые $y^2 + y = x^3 + x$ and $y^2 + y = x^3 + x + 1$. Приведены порядки соответствующих групп точек над полем F_{2^k} . Нетрудно показать, что логарифмирование в этих группах сводится к логарифмированию в поле $F_{2^{4k}}$. Значит, для этой задачи верна субъэкспоненциальная оценка (5).

Таким образом, все известные в настоящее время варианты эллиптических кривых, предлагаемые для открытой криптографии, обладают нехорошим свойством. А именно, сложность решения задачи логарифмирования в этих группах не превосходит сложности вычисления логарифма в конечных полях, которые являются расширениями очень небольшой степени исходного поля. Для последней задачи, как указывалось во введении, разработаны эффективные алгоритмы.

Список литературы

1. Pohlig S., Hellman M. An improved algorithm for computing logarithms over $GF(p)$ and its cryptographic significance. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1978) **24**, 106–110.
2. Adleman L. A subexponential algorithm for the discrete logarithm problem with applications to cryptography. In: *Proc. IEEE 20th Annual Symp. Foundation Computer Sci.* 1979, pp. 55–60.
3. Coppersmith D. Fast evaluation of logarithms in fields of characteristic two. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1984) **30**, 587–594.
4. Koblitz N. Elliptic curves cryptosystems. *Math. Comput.* (1987) **48**, 203–209.
5. Silverman J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, Berlin, 1986.
6. El Gamal T. A subexponential-time algorithm for computing discrete logarithms over $GF(p^2)$. In: *Proc. Crypto'83*. 1984, pp. 275–292.
7. Miller V. S. Use of elliptic curves in cryptography. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1986) **218**, 417–426.

8. Bender A., Castagnoli G. The implementation of elliptic curve cryptosystems. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1990) **435**, 417–426.
9. Menezes A., Vanstone S. The implementation of elliptic curve cryptosystems. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1990) **453**, 2–13.
10. Menezes A., Okamoto T., Vanstone S. Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field. In: *Proc. 22nd Annual AMC Symp. Theory of Computing*. 1991, pp. 80–89.
11. Frey G., Ruck H. G. A remark concerning m -divisibility and the discrete logarithm in the divisor class group of curves. *Math. Comput.* (1994) **62**, 865–874.

Статья поступила 23.11.1992.