Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, О сложности сужений булевых функций,
Дискрет. матем., 1996, том 8, выпуск 2, 133–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:42:58

О сложности сужений булевых функций

© 1996 г. А. В. Чашкин

Исследуется сложность сужений булевых функций при их реализации схемами из функциональных элементов, контактными схемами, формулами и π -схемами. Пусть $D(d) = \{D \subseteq \{0,1\}^n \mid |D| = d\}$. Для достаточно широкого множества значений параметра d для произвольной булевой функции f устанавливаются нижние оценки сложности самого сложного ее сужения на области из $D(d)$. Обсуждается связь между сложностью частичных и полностью определенных булевых функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-011-1527.

Введение

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая булева функция. Сложностью $L(f)$ булевой функции f назовем сложность минимальной схемы, реализующей эту функцию в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Сложностью $L_{\text{кс}}(f)$ булевой функции f назовем сложность минимальной контактной схемы, реализующей f . Сложностью $L_\phi(f)$ булевой функции f назовем сложность минимальной формулы, реализующей f в базисе из всех не более чем двухместных булевых функций. Сложностью $L_\pi(f)$ булевой функции f назовем сложность минимальной π -схемы, реализующей f . Пусть $D_1 \subset D_2 \subseteq \{0,1\}^n$. Функцию $g: D_1 \rightarrow \{0,1\}$ назовем сужением функции $h: D_2 \rightarrow \{0,1\}$ на область D_1 , если $g(x) = h(x)$ при любом $x \in D_1$. Сужение функции f на область D будем обозначать через f_D , т.е. для функций g и h справедливо равенство $g = h_{D_1}$.

В работе для упомянутых выше мер сложности исследуется величина самого сложного сужения произвольной булевой функции среди всех возможных сужений этой функции на области фиксированной мощности. Основная цель работы заключается в выявлении общих свойств, характерных как для относительно несложных функций, так и для функций, имеющих экспоненциальную сложность. В работе показано, что одним из таких общих свойств является сложность сужений функций, т.е. у любой функции, чья сложность превосходит некоторое пороговое значение, обязательно найдется очень сложное сужение. В связи с этим можно говорить о локальной "одинаковости" почти всех булевых функций.

В первом пункте работы исследуется сложность сужений булевых функций при их реализации схемами в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Во втором пункте рассмотрен частный случай: найдены точные по порядку значения сложности самых сложных сужений функции с малым числом единиц на области различной мощности. Результаты этого пункта позволяют получить информацию о точности

неравенств, доказанных в первом пункте. В третьем пункте работы исследуются сложности сужений булевых функций при реализации функций π -схемами. Результаты, полученные в этом пункте, без труда могут быть перенесены на контактные схемы и формулы. В четвертом пункте работы обсуждается связь между сложностью частичных булевых функций и сложностью полностью определенных булевых функций. В этом пункте показано, что доказательство невысоких нижних оценок сложности частичных функций, определенных на областях малой мощности, и доказательство экспоненциальных нижних оценок сложности полностью определенных булевых функций являются в некотором смысле эквивалентными по трудности решения задачами. Результаты этого пункта в сочетании с результатами пунктов 1, 3 позволяют высказать предположение о том, что причины, не позволяющие в настоящее время доказывать даже сравнительно невысокие нижние оценки сложности булевых функций, имеют много общего с причинами, не позволяющими доказывать экспоненциальные нижние оценки сложности. Завершает работу добавление, в котором доказывается ряд результатов, необходимых в предыдущих пунктах.

1. Общий случай

Будем полагать, что n , число переменных всех рассматриваемых ниже функций, больше некоторой положительной постоянной. Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $f: D \rightarrow \{0, 1\}$, $N(L, n)$ — число неизоморфных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, имеющих n входов, один выход и сложность, не превосходящую L . Если рассматривать f как полностью определенную функцию, то можно утверждать, что для любого d , большего $(1 + o(1)) \log_2 N(L(f), n)$, существует такое сужение функции f на некоторую область D' , $|D'| = d$, что его сложность равна сложности f . Поэтому представляется естественным ограничить снизу мощности рассматриваемых областей сужения произвольной булевой функции f величиной $\log_2 N(L(f), n)$. В теореме 1 устанавливается нижняя оценка сложности самого сложного сужения произвольной функции f на область фиксированной мощности d .

Теорема 1. Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, и f существенно зависит от всех своих переменных. Тогда для любого d , где $\log_2 N(L(f), n) \leq d \leq 2^n$, существуют такие постоянная c_1 и область $D \in \{0, 1\}^n$, что

$$|D| \leq d, \quad (1)$$

$$L(f_D) \geq \max \left\{ n - 1, c_1 L(f) \left(\frac{1}{n} \log_2 \frac{dn}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{\log_2 3} \right\}. \quad (2)$$

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть

$$D \subseteq \{0, 1\}^n, \quad f: D \rightarrow \{0, 1\}, \quad L(f) \geq n, \quad |D| \geq 2 \log_2 N((L(f) - 4)/3, n).$$

Тогда существует такая область $D' \subseteq D$, что

$$|D'| \leq 2(2|D| \log_2 N((L(f) - 4)/3, n))^{1/2}, \quad (3)$$

$$L(f_{D'}) \geq (L(f) - 4)/3. \quad (4)$$

Доказательство. Положим

$$d = \left[(2|D| \log_2 N ((L(f) - 4)/3, n))^{1/2} \right].$$

Рассмотрим множество областей

$$M_d = \{V_i \mid V_i \subseteq D, |V_i| = d\},$$

а также сужения функции f на области этого множества. Возможны два случая:

- среди областей $V_i \in M_d$ существует область V_j , сложность сужения функции f на которую удовлетворяет неравенству

$$L(f_{V_j}) \geq (L(f) - 4)/3,$$

- сложность сужения функции f на любую область из множества M_d меньше чем $(L(f) - 4)/3$.

В первом случае утверждение леммы очевидно. В качестве D' достаточно взять область V_j . Рассмотрим второй случай. Так как $|M_d| = \binom{|D|}{d}$, и для любого целого i , $1 \leq i \leq \binom{|D|}{d}$, сложность $L(f_{V_i})$ не превосходит величины $(L(f) - 4)/3$, то существует схема S , сложность которой не больше, чем

$$(L(f) - 4)/3, \quad (5)$$

и которая реализует на области D некоторую булеву функцию h , совпадающую с функцией f не менее чем на $\binom{|D|}{d} / N((L(f) - 4)/3, n)$ областях множества M_d . Пусть $V = D \setminus (\bigcup V_i)$, где объединение берется по всем областям V_i , на которых $f = h$. Оценим сверху мощность R области V . Очевидно, что R должна удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{N} \binom{|D|}{d} ((L(f) - 4)/3, n) \leq \binom{|D| - R}{d},$$

или, что равносильно, неравенству

$$\binom{|D|}{d} / \binom{|D| - R}{d} \leq 2^{\log_2 N((L(f) - 4)/3, n)}. \quad (6)$$

В силу выбора параметра d и условия леммы $|D| \geq 2 \log_2 N((L(f) - 4)/3, n)$, можно воспользоваться леммой 6, доказанной в добавлении.

Так как $2 < e$, из леммы 6 и неравенства (5) следует, что

$$R \leq d. \quad (7)$$

Далее, пусть

$$d' = \left[(2(|D| - R) \log_2 N((L(f) - 4)/3, n))^{1/2} \right].$$

Рассмотрим новое множество областей

$$M_{d'} = \{V'_i \mid V'_i \subseteq D, V \subset V'_i, |V'_i| = d' + R\}.$$

Как и ранее, возможны два случая:

- среди областей $V'_i \in M_{d'}$ существует область V'_j , сложность сужения функции f на которую удовлетворяет неравенству

$$L(f_{V'_j}) \geq (L(f) - 4)/3,$$

- сложность сужения функции f на любую область из множества $M_{d'}$ меньше чем $(L(f) - 4)/3$.

В первом случае в качестве D' можно взять область V'_j , так как в силу (6) $|V'_j| \leq 2d$. Если имеет место второй случай, то вновь воспользуемся леммой 6. Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что в этом случае существует некоторая булева функция g , определенная на области D , имеющая сложность не более, чем

$$(L(f) - 4)/3 \quad (8)$$

и совпадающая с функцией f не менее чем на $|D| - R'$, $R' \leq d'$, наборах области D . Пусть эти наборы составляют область W , и пусть

$$V' = D \setminus W, \quad V' \cap V = \emptyset.$$

Рассмотрим далее такую функцию $z: D \rightarrow \{0, 1\}$, значения которой при любом $x \in V \cup V'$ совпадают с соответствующими значениями функции f . Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$f = hg \vee hz \vee gz = h(g \vee z) \vee gz.$$

Поэтому

$$L(f) \leq L(h) + L(g) + L(z) + 4,$$

или, учитывая неравенства (4) и (7),

$$L(f) \leq 2L(f)/3 + 4/3 + L(z).$$

Из последнего неравенства и определения функции z следует, что

$$L(f_{V \cup V'}) = L(z) \geq (L(f) - 4)/3.$$

Так как $|V \cup V'| \leq 2d$, лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Применим к функции f лемму 1. В результате получим область $V_1 \subseteq D$ и сужение f_{V_1} функции f на эту область. К полученному сужению вновь применим лемму 1 и т. д. Предположим, что возможно последовательное применение леммы 1 s раз к соответствующим сужениям. Тогда получим последовательность вложенных областей

$$V_s \subseteq V_{s-1} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subseteq V_0 = \{0, 1\}^n$$

и последовательность сужений функции f на эти области. Из леммы 1 следует, что

$$|V_i| \leq 2(2|V_{i-1}| \log_2(N((L(f_{V_{i-1}}) - 4)/3)))^{1/2}, \quad (9)$$

$$L(f_{V_i}) \geq (L(f_{V_{i-1}}) - 4)/3. \quad (10)$$

Так как $L(f_{V_i}) \leq L(f)$, оценку (8) можно заменить более слабой оценкой

$$|V_i| \leq 2(2|V_{i-1}| \log_2 N(L(f), n))^{1/2}. \quad (11)$$

Далее рассмотрим два случая:

$$(I) \quad d \geq n \log_2 N(L(f), n),$$

$$(II) \quad d < n \log_2 N(L(f), n).$$

Пусть имеет место первый случай. Оценим значение величины 2^t для минимального t , при котором $|V_t| \leq d$. Используем неравенство (10). Так как $|V_{t-1}| > d$, то

$$d < |V_{t-1}| \leq 4(2^n)^{1/2^{t-1}} \log_2 N(L(f), n).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$2^t < \frac{2n}{\log_2 \frac{d}{4 \log_2 N(L(f), n)}},$$

или, учитывая условие (I),

$$2^t \leq c_2 \frac{n}{\log_2 \frac{dn}{\log_2 N(L(f), n)}}, \quad (12)$$

где c_2 — некоторая постоянная. Очевидно, что при условии (I) неравенство (11) доказывает теорему, так как

$$|V_t| \leq d, \\ L(f_{V_i}) \geq L(f) \left(\frac{1}{c_2 n} \log_2 \frac{dn}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{\log_2 3} - 6.$$

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть $d' = n \log_2 N(L(f), n)$. Величина d' удовлетворяет условию первого случая. Следовательно, существуют такие область D' и сужение функции f на D' , что

$$|D'| \leq d', \\ L(f_{D'}) \geq c_3 L(f) \left(\frac{\log_2 n}{n} \right)^{\log_2 3},$$

где c_3 — постоянная. Будем далее полагать, что

$$L(f_{D'}) \leq \frac{1}{n} L(f).$$

Если последнее неравенство неверно, то очевидно, что существует область $D'' \subseteq D'$, сложность сужения функции $f_{D'}$ на которую удовлетворяет неравенству

$$L(f_{D''}) \leq \frac{1}{n} L(f). \quad (13)$$

Пусть минимальное значение t , при котором $|V_t| \leq d'$, равно t_0 . Оценим значение величины $2^{t_0+t_1}$ при условии, что

$$|V_{t_0+t_1}| \leq d, \quad |V_{t_0+t_1-1}| > d.$$

Из (8) и (13) следует неравенство

$$|V_{t_0+t_1-1}| \leq 2(n \log_2 N(L(f), n))^{1/2^{t_1-1}} \log_2 (N(L(f)/n, n))^{1-1/2^{t_1-1}}.$$

В силу леммы 7, доказанной в добавлении,

$$\log_2 N(L(f)/n, n) \leq \frac{1}{n-2} \log_2 N(L(f), n).$$

Следовательно,

$$|V_{t_0+t_1-1}| \leq 5n^{-1+1/2^{t_1-2}} \log_2 N(L(f), n).$$

Так как $|V_{t_0+t_1-1}| > d$, то

$$2^{t_1} < c_4 \frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{dn}{\log_2 N(L(f), n)}} \leq c_4, \quad (14)$$

где c_4 — некоторая постоянная. Объединяя неравенства (12) и (14), видим, что при некоторой постоянной c_5

$$L(f_{V_{t_0+t_1}}) \geq c_5 L(f) \left(\frac{\log_2 n}{c_4 n} \right)^{\log_2 3}. \quad (15)$$

Неравенство (15) доказано в предположении, что лемма 1 может быть использована не менее чем $t_0 + t_1$ раз. Пусть это не так, т.е. для некоторого t' , меньшего чем $t_0 + t_1$, лемма 1 не применима к функции $f_{V_{t'}}$. Тогда либо

$$L(f_{V_{t'}}) < n,$$

либо

$$|V_{t'}| < 2 \log_2 N((L(f_{V_{t'}}) - 4)/3, n).$$

Если $L(f_{V_{t'}}) < n$, то область D , сужение функции f на которую существенно зависит от всех n переменных, удовлетворяет условиям теоремы, так как

$$|D| \leq 2n, \quad L(f_D) \geq (n-1) \geq L(f_{V_{t'}}).$$

Если

$$|V_{t'}| < 2 \log_2 N((L(f_{V_{t'}}) - 4)/3, n), \quad (16)$$

то в силу леммы 7

$$|V_{t'}| < 2 \log_2 N((L(f_{V_{t'}}) - 4)/3, n) \leq \frac{2}{3} \log_2 N(L(f_{V_{t'}}), n) + \frac{2}{3}.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, неравенство (16) невозможно. Теорема доказана.

Результат приводимой ниже теоремы 2 неформально может быть сформулирован в виде следующего предложения. Функция f , сложность которой удовлетворяет неравенству

$$L(f) \geq c_6 n^{1+\log_2 3},$$

обладает таким нетривиальным сужением f_D на некоторую область D , что сложность этого сужения только в некоторое постоянное число раз меньше сложности самой сложной частичной функции, определенной на D . Из теоремы 2 следует, что все функции, сложность которых больше, чем $c_6 n^{1+\log_2 3}$, локально устроены одинаково: все такие функции имеют очень сложные сужения.

Теорема 2. Пусть

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}, \quad L(f) \geq c_6 n^{\log_2 3 + 1},$$

где c_6 — постоянная. Тогда существуют такие область $D \subseteq \{0, 1\}^n$ и постоянная c_7 , что

$$L(f_D) \geq n, \quad \frac{|D|}{\log_2 N(L(f_D), n)} \leq c_7.$$

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть

$$D \subseteq \{0, 1\}^n, \quad f: D \rightarrow \{0, 1\}, \quad L(f) \geq n, \quad |D| \geq 2 \log_2 N((L(f) - 4)/3, n).$$

Тогда существуют такие область $D' \subseteq D$ и постоянная c_8 , что

$$\frac{|D'|}{\log_2 N(L(f_{D'}), n)} \leq c_8 \left(\frac{|D|}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть D' — область, доставляемая леммой 1. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{|D'|}{\log_2 N(L(f_{D'}), n)} &\leq \frac{2(2|D| \log_2 N((L(f) - 4)/3, n))^{1/2}}{\log_2 N((L(f) - 4)/3, n)} \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{|D|}{\log_2 N((L(f) - 4)/3, n)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно показать, что

$$\log_2 N((L(f) - 4)/3, n) \geq \frac{1}{4} \log_2 N(L(f), n). \quad (19)$$

Подставляя последнее неравенство в (18), видим, что

$$\frac{|D'|}{\log_2 N(L(f_{D'}), n)} \leq 4\sqrt{2} \left(\frac{|D|}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем применять к функции f лемму 2, пока это возможно. В результате применения леммы 2 получим последовательность вложенных областей V_i . Легко видеть, что

$$\frac{|V_i|}{\log_2 N(L(f_{V_i}), n)} \leq c_8^2 \left(\frac{2^n}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2^i}.$$

Предположим, что лемму 2 удалось применить k раз. Тогда лемма 2 не может быть применена следующий $(k+1)$ -й раз, если нарушено одно из условий леммы:

$$(I) \quad L(f_{V_k}) \geq n,$$

$$(II) \quad |V_k| \geq 2 \log_2 N((L(f_{V_k}) - 4)/3, n).$$

Если $(k+1)$ -му применению леммы 2 препятствует второе условие, то очевидно, что теорема доказана, так как в этом случае

$$\frac{|V_k|}{\log_2 N(L(f_{V_k}), n)} < 2.$$

Теперь покажем, что если для $k-1$ справедливо условие (II), то справедливо и неравенство

$$L(f_{V_k}) \geq n, \quad (20)$$

из которого легко следует справедливость условия (I) для $k-1$. Пусть

$$|V_{k-1}| \geq 2 \log_2 N((L(f_{V_{k-1}}) - 4)/3, n),$$

$$\frac{|V_{k-1}|}{\log_2 N(L(f_{V_{k-1}}), n)} < c_8^2 \left(\frac{2^n}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2^{k-1}}.$$

Объединив два последние неравенства, видим, что

$$2 \log_2 N((L(f_{V_{k-1}}) - 4)/3, n) \leq |V_{k-1}|$$

$$\leq c_8^2 \left(\frac{2^n}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2^{k-1}} \log_2 N(L(f_{V_{k-1}}), n).$$

Следовательно, учитывая (19), находим, что существует такая постоянная c_9 , что

$$\left(\frac{2^n}{\log_2 N(L(f), n)} \right)^{1/2^k} \geq c_9,$$

и поэтому

$$\left(\frac{1}{2} \right)^k \geq \frac{\log_2 c_9}{\log_2 \frac{2^n}{\log_2 N(L(f), n)}}.$$

Так как

$$L(f_{V_i}) \geq (L(f_{V_{i-1}}) - 4)/3,$$

справедливы оценки

$$L(f_{V_k}) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{k \log_2 3} L(f) - 6 \geq c_{10} \left(\frac{1}{n} \right)^{\log_2 3} L(f) \geq n,$$

где c_{10} — постоянная. Неравенство (20), а вместе с ним и теорема 2, доказаны.

2. Функция с малым числом единиц

Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $f: D \rightarrow \{0, 1\}$. Весом функции f назовем мощность множества $\{x \in D \mid f(x) = 1\}$. Вес функции f обозначим через $\|f\|$. Пусть α — постоянная, и пусть $1 < \alpha < 2$. Рассмотрим функцию $f^\alpha: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ веса n^α , для сложности которой справедливо равенство

$$L(f^\alpha) = \max_{\|f\| \leq n^\alpha} L(f).$$

Из теоремы 3.4 из [1] следует, что

$$L(f^\alpha) = c_{11} \frac{n^{1+\alpha}}{\log_2 n} (1 + o(1)), \quad (21)$$

где c_{11} — некоторая постоянная. Там же (лемма Д.3) найдена оценка числа неизоморфных схем в произвольном конечном базисе, имеющих n входов, m выходов и сложность которых не превосходит L . Из этой оценки легко извлекается следующая лемма.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$N(L, n) \leq (c_{12}(L + n))^L,$$

где c_{12} — некоторая постоянная.

Из (21) и леммы 3 следует существование такой постоянной c_{13} , что

$$\log_2(N(L(f^\alpha), n)) \leq c_{13} n^{1+\alpha}. \quad (22)$$

Пусть

$$D(d) = \{D \subseteq \{0, 1\}^n \mid |D| = d\}.$$

Теорема 3. *Существуют такие постоянные c_{14} и c_{15} , что для любого d , $n^{1+\alpha} \leq d \leq 2^n$,*

(1) *для любой области $D \in D(d)$ справедлива оценка*

$$L(f_D^\alpha) \leq c_{14} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n},$$

(2) *существует такая область $D' \in D(d)$, что*

$$L(f_{D'}^\alpha) \geq c_{15} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n}.$$

Доказательство первого предложения теоремы следует непосредственно из леммы 8, доказанной в добавлении.

Доказательство второго предложения теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 4. Пусть $D \subseteq \{0,1\}^n$, $f: D \rightarrow \{0,1\}$, $\|f\| = t$, $L(f) \geq n$, $|D| \geq t + 2 \log_2 N(L(f)/2 - 1, n)$. Тогда существует такая область $D' \subseteq D$, что

$$\begin{aligned} |D'| - t &\leq (2(|D| - t) \log_2 N(L(f)/2 - 1, n))^{1/2}, \\ L(f_{D'}) &\geq (L(f) - 1)/2, \\ \|f_{D'}\| &= t. \end{aligned}$$

Доказательство. Настоящая лемма доказывается так же, как и лемма 1. Положим

$$d = \left[(2(|D| - t) \log_2 N((L(f) - 1)/2, n))^{1/2} \right].$$

Рассмотрим множество областей

$$M_d = \{V_i \mid V_i \subseteq D, |V_i| = d + t, \|f_{V_i}^\alpha\| = t\},$$

а также сужения функции f^α на области этого множества. Возможны два случая:

- (I) среди областей $V_i \in M_d$ существует область V_j , сложность сужения функции f^α на которую удовлетворяет неравенству

$$L(f_{V_j}^\alpha) \geq (L(f^\alpha) - 1)/2,$$

- (II) сложность сужения функции f^α на любую область из множества M_d меньше, чем $(L(f^\alpha) - 1)/2$.

В первом случае утверждение леммы очевидно. Второй случай аналогичен случаю (II), рассмотренному при доказательстве леммы 1. Нетрудно показать существование такой функции $h: D \rightarrow \{0,1\}$, совпадающей с функцией f^α на некоторой области V , что

$$|D \setminus V| \leq d, \quad L(h) < (L(f) - 1)/2.$$

Рассмотрим теперь функцию $g: D \rightarrow \{0,1\}$, совпадающую с функцией f^α на области

$$V' = (D \setminus V) \cup \{x \mid f^\alpha(x) = 1\}.$$

Легко видеть, что $f^\alpha = hg$. Следовательно,

$$L(f_{V'}^\alpha) = L(g) \geq L(f^\alpha) - L(h) - 1 \geq (L(f^\alpha) - 1)/2.$$

Так как $|V'| \leq d + t$, то лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству второго предложения теоремы. Предположим, что к функции f^α возможно s раз применить лемму 4. В результате получим такую последовательность областей

$$V_s \subseteq V_{s-1} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subseteq V_0 = \{0,1\}^n,$$

что при $1 \leq i \leq s$

$$(I) |V_i| - n^\alpha \leq \left(2(|V_{i-1}| - n^\alpha) \log_2 N \left((L(f_{V_{i-1}}^\alpha) - 1)/2, n \right) \right)^{1/2},$$

$$(II) L(f_{V_i}^\alpha) \geq (L(f_{V_{i-1}}^\alpha) - 1)/2,$$

$$(III) \|f_{V_i}^\alpha\| = n^\alpha.$$

Полагая $L(f_{V_{i-1}}^\alpha) = L(f^\alpha)$, оценим величину $|V_i| - n^\alpha$. Ясно, что

$$|V_i| - n^\alpha \leq (2(|V_{i-1}| - n^\alpha) \log_2 N(L(f^\alpha), n))^{1/2} \leq c_{16}(2^n)^{1/2^i} n^{1+\alpha},$$

где c_{16} — некоторая постоянная. Из последнего неравенства найдем минимальное m , $1 \leq m \leq s$, при котором

$$|V_m| - n^\alpha \leq dn^3 - n^\alpha.$$

Так как

$$dn^3 - n^\alpha < |V_{m-1}| - n^\alpha \leq c_{13}(2^n)^{1/2^{m-1}} n^{1+\alpha},$$

справедлива оценка

$$m \leq \log_2 n - \log_2 \log_2(dn) + 1.$$

Из леммы 8 следует неравенство

$$L(f_{V_m}^\alpha) \leq c_{11} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n}. \quad (23)$$

Заметим, что с другой стороны,

$$L(f_{V_m}^\alpha) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m L(f) - 1 \geq \frac{\log_2 dn}{n} L(f) - 1 \geq c_{17} \frac{\log_2 dn}{n} L(f), \quad (24)$$

где c_{17} — постоянная.

Используя (23), оценим значение величины 2^k для минимального k , при котором

$$|V_{m+k}| - n^\alpha \leq d - n^\alpha.$$

Так как из (22), (23) следует, что при некоторых постоянных c_{18}, c_{19}

$$\begin{aligned} d/2 < d - n^\alpha < |V_{m+k-1}| - n^\alpha \\ &\leq (dn^3 - n^\alpha)^{1/2^{k-1}} c_{18} \frac{n^\alpha \log_2 d}{\log_2 n} (\log_2 n + \log_2 \log_2 d) \leq c_{19} (dn^3)^{1/2^{k-1}} n^\alpha \log_2 d, \end{aligned}$$

то

$$2^{k-1} \leq \frac{\log_2 dn^3}{\log_2 \frac{d}{2c_{19}n^\alpha \log_2 d}} \leq \frac{8 \log_2 d}{\log_2 d} = 8,$$

и, следовательно, учитывая (21) и (24),

$$L(f_{V_{m+k}}^\alpha) \geq \frac{1}{16} L(f_{V_m}^\alpha) \geq \frac{c_{17} \log_2 dn}{16n} L(f^\alpha) \geq c_{15} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n}.$$

Так как $d > n^{1+\alpha}$, то, очевидно, что при всех $i \leq m + k$

$$L(f_{V_i}^\alpha) \geq c_{20} n^\alpha > n.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что при всех $i \leq m+k$

$$|V_i| \geq n^\alpha + 2 \log_2 N((L(f_{V_i}^\alpha) - 1)/2, n).$$

Предположим, что это не так. Тогда из леммы 3 и леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} |V_i| &< n^\alpha + 2 \log_2 N((L(f_{V_i}^\alpha) - 1)/2, n) \leq n^\alpha + L(f_{V_i}^\alpha) \log_2 c_{12} L(f_{V_i}^\alpha) \\ &\leq 3L(f_{V_i}^\alpha) \log_2 L(f_{V_i}^\alpha) \leq c_{21} n^\alpha \ln V_i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{|V_i|}{\ln |V_i|} < c_{21} n^\alpha.$$

Так как величина, стоящая в левой части последнего неравенства, монотонно возрастает по $|V_i|$, а $|V_i| \geq n^{1+\alpha}$, то неравенство

$$\frac{n^{1+\alpha}}{(1+\alpha) \ln n} < c_{21} n^\alpha$$

приводит к противоречию со сделанным выше предположением. Теорема доказана.

3. Контактные схемы, π -схемы и формулы

Пусть $N_{\text{кс}}(L, n)$ равно числу неизоморфных двухполюсных контактных схем, которые имеют не более L ребер, не содержат изолированных вершин и содержат только контакты из множества $\{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Пусть, далее, $N_\pi(L, n)$ равно числу неизоморфных π -схем, которые имеют не более L ребер и содержат контакты из множества $\{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, а $N_\phi(L, n)$ равно числу неизоморфных формул в базисе из всех не более чем двуместных булевых функций, которые содержат не более L символов переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Результаты, аналогичные доказанным в теореме 1 и теореме 2 для схем из функциональных элементов, имеют место и при реализации булевых функций контактными схемами, π -схемами и формулами в базисе из всех не более чем двуместных булевых функций. Причем формулировки и доказательства этих результатов для всех трех управляющих систем почти дословно повторяют друг друга. Поэтому ограничимся тем, что явно сформулируем эти результаты только для π -схем. Формулировки для контактных схем и формул отличаются от приводимых ниже формулировок для π -схем только функциями $L_{\text{кс}}$, L_ϕ , $N_{\text{кс}}$, N_ϕ , используемыми вместо функций L_π и N_π .

Так как π -схемы изоморфны формулам в базисе $\{\&, \vee, \bar{}\}$, то результаты теорем 4, 5 справедливы также и для этих формул.

Теорема 4. Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, и f существенно зависит от всех своих переменных. Тогда для любого d , где

$$\log_2 N_\pi(L_\pi(f), n) \leq d \leq 2^n,$$

существуют такие постоянная c_{21} и область $D \subseteq \{0, 1\}^n$, что

$$|D| \leq d, \quad L_\pi(f_D) \geq \max \left(n, c_{21} L_\pi(f) \left(\frac{1}{n} \log_2 \frac{dn}{\log_2 N_\pi(L_\pi(f), n)} \right)^2 \right).$$

Доказательство теоремы 4 выводится из следующей леммы так же, как и доказательство теоремы 1 выводится из леммы 1. Поэтому доказательство теоремы 4 опустим, ограничившись доказательством леммы 5.

Лемма 5. Пусть

$$D \subseteq \{0, 1\}^n, \quad f: D \rightarrow \{0, 1\}, \quad L_\pi(f) \geq n, \quad |D| \geq 2 \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n).$$

Тогда существует такая область $D' \subseteq D$, что

$$|D'| \leq 2(2|D| \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n)), \quad L_\pi(f_{D'}) \geq L(f)/2.$$

Доказательство. Пусть

$$d = \left[(2\|f\| \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n))^{1/2} \right].$$

Рассмотрим множество областей

$$M_d = \{V_i \mid V_i \subseteq D, \{x \mid x \in D, f(x) = 0\} \subseteq V_i, |V_i| = \|\bar{f}\| + d\},$$

а также сужения функции f на области этого множества. Как и при доказательстве леммы 4, можно показать, что существует такая область $V \subseteq D$, что

$$(I) \quad |V| - \|\bar{f}\| \leq (2(|D| - \|\bar{f}\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n))^{1/2};$$

$$(II) \quad L_\pi(f_V) \geq L_\pi(f)/2;$$

$$(III) \quad \|f_V\| = |V| - \|\bar{f}\|.$$

Далее, положим

$$d' = \left[(2\|\bar{f}_V\| \log_2 N_\pi(L_\pi(f_V)/2, n))^{1/2} \right].$$

Рассмотрим множество областей

$$M_{d'} = \{V'_i \mid V'_i \subseteq V, \{x \mid x \in V, f_V(x) = 1\} \subseteq V'_i, |V'_i| = \|f_V\| + d'\},$$

а также сужения функции f на области этого множества. Как и ранее нетрудно показать, что существует такая область $V' \subseteq V$, что

$$(I') \quad |V'| - \|f_V\| \leq (2(|V| - \|f_V\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f_V)/2, n))^{1/2};$$

$$(II') \quad L_\pi(f_{V'}) \geq L_\pi(f)/2.$$

Из (II) и (II') следует неравенство

$$L_\pi(f_{V'}) \geq L_\pi(f)/4.$$

Из (III), (I') и леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} |V'| &\leq \|f_V\| + (2(|V| - \|f_V\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f_V)/2, n))^{1/2} \\ &\leq |V| - \|\bar{f}\| + (2(|V| - \|f_V\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/4, n))^{1/2} \\ &\leq (2(|D| - \|\bar{f}\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n))^{1/2} + (2(|V| - \|f_V\|) \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/4, n))^{1/2} \\ &\leq (2|D| \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n))^{1/2} + (2|D| \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/4, n))^{1/2} \\ &\leq 2(2|D| \log_2 N_\pi(L_\pi(f)/2, n))^{1/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что область V' удовлетворяет требуемым условиям. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2. Поэтому приведем теорему 5 без доказательства.

Теорема 5. Пусть

$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}, \quad L(f) \geq c_{22}n^3,$$

где c_{22} — постоянная. Тогда существуют такие область $D \subseteq \{0, 1\}^n$ и постоянная c_{23} , что

$$L_\pi(f_D) \geq n, \quad \frac{|D|}{\log_2 N_\pi(L_\pi(f_D), n)} \leq c_{23}.$$

4. Сложность частичных и полностью определенных булевых функций

Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $|D| < 2^{n/2}$. В [2] доказано существование такого линейного оператора

$$F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{2\lceil \log_2 |D| \rceil},$$

что для любых $x, y \in D$, $F(x) \neq F(y)$, если $x \neq y$. Воспользуемся этим результатом. Пусть $f: D \rightarrow \{0, 1\}$. Положим $m = 2\lceil \log_2 |D| \rceil$. Рассмотрим функцию $f': \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ такую, что $f'(z) = f(y)$, если $y \in D$ и $F(y) = z$. Схема, реализующая функцию f , может быть получена из схемы S' , реализующей функцию f' , если к входам S' подключить выходы схемы, реализующей оператор F . Поэтому очевидно, что

$$L(f') \geq L(f) - L(F).$$

Пусть

$$|D| = n^{O(1)}.$$

В этом случае нетрудно показать, что

$$L(F) = O(n).$$

Следовательно, доказательство невысокой нижней оценки сложности для функции f влечет доказательство экспоненциальной нижней оценки сложности для функции f' . Действительно, если $L(f) \geq L(F) + \varepsilon n$, где ε — некоторая постоянная, то

$$L(f'(z_1, \dots, z_m)) \geq \varepsilon n = \varepsilon 2^{\log_2 n} = \varepsilon 2^{O(m)}. \quad (25)$$

Похожая ситуация имеет место и для других управляющих систем. Пусть S' — контактная схема, реализующая функцию f' , и пусть $l_i(x_1, \dots, x_n)$ — i -я функция оператора F . Заменяем в схеме S' каждый контакт вида $z_i^{\sigma_i}$ на контактную схему, реализующую функцию $z_i^{\sigma_i}(x_1, \dots, x_n)$. Нетрудно убедиться в том, что новая схема S будет реализовывать функцию f . Так как линейная функция от n переменных реализуется контактной схемой со сложностью, не превосходящей $4n - 2$, то очевидно, что

$$L_{\text{кс}}(f') \geq \frac{L_{\text{кс}}(f)}{4n}.$$

Если $L_{\text{кс}}(f) \geq 4n^{1+\varepsilon}$, где ε — положительная постоянная, то

$$L_{\text{кс}}(f'(z_1, \dots, z_m)) \geq n^\varepsilon = 2^{\varepsilon \log_2 n} = 2^{O(m)}. \quad (26)$$

Подобный результат справедлив и для формул в базисе, содержащем линейную функцию. Легко видеть, что

$$L_\phi(f') \geq \frac{L_\phi(f)}{n}.$$

Следовательно, если $L_\phi(f) \geq n^{1+\varepsilon}$, то

$$L_\phi(f'(z_1, \dots, z_m)) \geq n^\varepsilon = 2^{O(m)}. \quad (27)$$

Так как сложность реализации линейной функции π -схемами не более, чем в два раза превосходит квадрат числа переменных [3], то

$$L_\pi(f') \geq \frac{L_\pi(f)}{2n^2}.$$

Следовательно, если $L_\pi(f) \geq 2n^{2+\varepsilon}$, то

$$L_\pi(f'(z_1, \dots, z_m)) \geq n^\varepsilon = 2^{O(m)}. \quad (28)$$

Из (25)–(28) следует, что доказательство невысоких нижних оценок сложности частичных булевых функций с малой областью определения и доказательство экспоненциальных нижних оценок сложности полностью определенных булевых функций являются в некотором смысле эквивалентными по трудности решения задачами. В связи с этим можно высказать предположение, что существование у булевых функций сложных сужений на малые области является препятствием для доказательства относительно невысоких нижних оценок сложности. Это предположение на качественном уровне подтверждается известными в данный момент максимальными нижними оценками сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов, контактными схемами, формулами и π -схемами. С точностью до постоянных множителей эти оценки для некоторых функций f_1, f_2, f_3, f_4 имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} L(f_1) &\geq n, & L_{\text{кс}}(f_2) &\geq \frac{n^2}{\log_2 n}, \\ L_\phi(f_3) &\geq \frac{n^2}{\log_2 n}, & L_\pi(f_4) &\geq n^3. \end{aligned} \quad (29)$$

С другой стороны, из теорем 1, 4 и их аналогов для контактных схем и формул следует, что если сложности некоторых функций g_1, g_2, g_3, g_4 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} L(g_1) &\geq cn^{1+\log_2 3}, & L_{\text{кс}}(g_2) &\geq cn^{3+\varepsilon}, \\ L_\phi(g_3) &\geq cn^{3+\varepsilon}, & L_\pi(g_4) &\geq cn^{4+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (30)$$

где c и ε — положительные постоянные, причем ε может быть сколь угодно малой, то существуют такие области $D_1, D_2, D_3, D_4 \subseteq \{0, 1\}^n$, что $|D_i| = n^a$, где $i \in [1, \dots, 4]$, a — постоянная,

$$\begin{aligned} L(g_{1D_1}) &\geq c'n, & L_{\text{кс}}(g_{2D_2}) &\geq c'n^{1+\varepsilon}, \\ L_\phi(g_{3D_3}) &\geq cn^{1+\varepsilon}, & L_\pi(g_{4D_4}) &\geq c'n^{2+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (31)$$

где c' — постоянная.

Сравнивая (31) с (25)–(28), замечаем, что выполнение неравенств (30) влечет существование у функций g_1, g_2, g_3, g_4 сужений, эквивалентных в некотором смысле экспоненциально сложным функциям. Легко видеть, что неравенства (29) и (30) определяют один и тот же порядок на множестве рассмотренных выше мер сложности булевых функций.

5. Добавление

Лемма 6. Пусть a, b, c, d — натуральные числа,

$$\left[\sqrt{2ab} \right] \leq d \leq a/2, \quad a > 2b > 5.$$

Тогда максимальное c , удовлетворяющее неравенству

$$\binom{a}{d} / \binom{a-c}{d} \leq e^b \quad (32)$$

не превосходит d .

Доказательство. Доказывать лемму будем от противного. Предположим, что максимальное c , удовлетворяющее неравенству (32), больше d . Неравенство (32) равносильно неравенству

$$\ln \left(\binom{a}{d} / \binom{a-c}{d} \right) - b \leq 0. \quad (33)$$

Оценим снизу левую часть (33). Для этого воспользуемся хорошо известными неравенствами

$$e^{t/(1+t)} < 1+t < e^t, \quad (34)$$

справедливыми при $t > 0$, и неравенствами

$$\frac{n^k}{k!} e^{-k(k-1)/(2(n-k+1))} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-k(k-1)/(2n)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\binom{a}{d} / \binom{a-c}{d} \right) - b &\geq \ln \frac{a^d e^{-d(d-1)/(2(a-d+1))}}{(a-c)^d e^{-d(d-1)/(2(a-c))}} - b \\
 &= d \ln \left(1 + \frac{c}{a-c} \right) + \frac{d(d-1)}{2} \frac{(c-d+1)}{(a-c)(a-d+1)} - b \\
 &\geq d \frac{c}{a-c} + \frac{d(d-1)(c-d+1)}{2(a-c)(a-d+1)} - b \geq \frac{d^2}{a} - b \\
 &\geq \frac{(\sqrt{2ab}-1)^2}{a} - b > \frac{ab-2\sqrt{2ab}}{a} > \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} (\sqrt{ab} - \sqrt{8}) > 0.
 \end{aligned}$$

Получили противоречие с (32). Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \log_2 N((L-k+1)/k, n) &\leq \frac{1}{k} \log_2 N(L, n) + \frac{1}{k}, \\
 \log_2 N_\pi(L/k, n) &\leq \frac{1}{k} \log_2 N_\pi(L, n) + \frac{1}{k}.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательства двух неравенств аналогичны. Поэтому докажем только первое из них. Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\binom{N(L, n)}{k} k! \leq N(kL + k - 1, n).$$

А так как

$$\binom{N(L, n)}{k} k! \geq \frac{N(L, n)^k}{k!} k! e^{-k(k-1)/(2(N(L, n)-k+1))} \geq \frac{N(L, n)^k}{2},$$

то

$$k \log_2 N(L, n) - 1 \leq \log_2 N(kL + k - 1, n).$$

Пусть $kL + k - 1 = L'$. Тогда

$$\log_2 N((L' - k + 1)/k, n) \leq \frac{1}{k} \log_2 N(L', n) + \frac{1}{k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Существует такая постоянная c_{14} , что для любого d , $n^{1+\alpha} \leq d \leq 2^n$, любой области $D \in D(d)$ и любой функции $f: D \rightarrow \{0, 1\}$ веса n^α справедливо неравенство

$$L(f) \leq c_{14} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n}.$$

Доказательство. Утверждения леммы выводятся из следующих фактов.

Пусть $D \subseteq \{0, 1\}^n$, $|D| < 2^{n/2}$. Тогда существует такой линейный оператор $F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{2 \log_2 |D|}$, что для любых $x, y \in D$, $F(x) \neq F(y)$, если $x \neq y$ (см. лемму 4 в [2]).

Пусть $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, $f > n$. Тогда (см. теорему 3.4 в [1])

$$L(f) \leq \frac{\ln \binom{2^n}{\|f\|}}{\ln \ln \binom{2^n}{\|f\|}} (1 + o(1)).$$

Так как

$$L(F) \leq \frac{8n \log_2 |D|}{\log_2 n} = o\left(\frac{n^\alpha \ln |D|}{\ln n}\right),$$

достаточно показать, что при некоторой постоянной c_{14} справедливо неравенство

$$\frac{\ln \binom{d^2}{n^\alpha}}{\ln \ln \binom{d^2}{n^\alpha}} \leq c_{14} \frac{n^\alpha \ln d}{\ln n}.$$

Для доказательства последнего неравенства заметим, что величина, стоящая в его левой части, возрастает с увеличением d , а

$$\ln \binom{d^2}{n^\alpha} \leq \ln \frac{d^{2n^\alpha}}{(n^\alpha)!} \leq 2n^\alpha \ln d.$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Пробл. киберн.* (1965) **14**, 31–110.
2. Андреев А. Е. О сложности реализации частичных булевых функций схемами из функциональных элементов. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 36–45.
3. Яблонский С. В. Реализация линейной функции в классе π -схем. *Докл. АН СССР* (1954) **94**, №5, 805–806.
4. Нечипорук Э. И. Об одной булевской функции. *Докл. АН СССР* (1966) **169**, №4, 765–767.

Статья поступила 21.06.94.