Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Кравцов, Неразрешимость задач векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 89–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:31:09

Неразрешимость задач векторной дискретной оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев

© 1996 г. М. К. Кравцов

В терминах систем подмножеств описан достаточно широкий класс задач комбинаторной векторной оптимизации, которые неразрешимы с помощью классического приема линейной свертки критериев. В этот класс, в частности, попадают хорошо известные задачи на графах (коммивояжера, о цепях между двумя вершинами и совершенных паросочетаниях, о p -медиане и покрытии графа цепями), а также разнообразные задачи булева программирования с векторной целевой функцией, представляющей собой любую комбинацию критериев вида MAXSUM, MAXMIN, MAXMAX.

Работа частично финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Системой подмножеств (СП), как обычно [1, 2], назовем пару $\tau = (E, T)$, где E — конечное множество элементов, T — некоторая совокупность его непустых подмножеств t , называемых далее траекториями. На множестве E зададим векторную весовую функцию (ВВФ)

$$W(e) = (w_1(e), w_2(e), \dots, w_r(e)),$$

где $w_s(e) \in \mathbb{R}_+ \forall s \in N_r = \{1, 2, \dots, r\}, \forall e \in E$, а на множестве траекторий T — векторную целевую функцию (ВЦФ)

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_r(t)), \quad F_s(t) \rightarrow \max_t \quad \forall s \in N_r$$

с частными критериями трех видов:

MAXSUM:

$$F_s(t) = \sum_{e \in t} w_s(e) \rightarrow \max_T, \quad (1)$$

MAXMIN:

$$F_s(t) = \min_{e \in t} w_s(e) \rightarrow \max_T, \quad (2)$$

MAXMAX:

$$F_s(t) = \max_{e \in t} w_s(e) \rightarrow \max_T. \quad (3)$$

ВЦФ $F(t)$ будем называть комбинированной, если она представляет собой любую комбинацию критериев вида MAXSUM, MAXMIN и MAXMAX, т.е. либо содержит все три вида названных критериев, либо любые два из них, либо один из них.

ВЦФ $F(t)$ определяет на T паретовское множество (ПМ) $\tilde{T} \subseteq T$, состоящее из всех паретовских оптимумов: $\tilde{t} \in \tilde{T}$ тогда и только тогда, когда не существует такой траектории $t' \in T$, что

$$F(\tilde{t}) \neq F(t'), \quad F(\tilde{t}) \leq F(t').$$

Говоря об r -критериальной комбинаторной задаче (r -ККЗ) $Z^r = (E, T, W, F)$, будем подразумевать задачу нахождения ПМ $\tilde{F}$. При этом под r -ККЗ понимается массовая задача [1, 3]. Наряду с массовой задачей будем использовать и понятие индивидуальная задача. Всякая индивидуальная r -ККЗ определяется конкретным набором (E, T, W, F) , где СП $\tau = (E, T)$ и все параметры ВЦФ $F(t)$, в том числе и ВВФ $W(e)$, фиксированы. СП τ в этом случае называется индивидуальной СП, а $W(e)$ индивидуальной ВВФ.

Очевидно, что в схему r -ККЗ вкладываются такие известные задачи на графах, как задачи о коммивояжере, о совершенных паросочетаниях, об остовных деревьях, о цепях между парой вершин и другие, поскольку множество E можно трактовать как множество ребер графа, а траектории, соответственно, как гамильтоновы циклы, совершенные паросочетания, остовные деревья и простые цепи между выделенной парой вершин. В эту же схему вписываются и задачи булева программирования (см. [2]).

Один из важнейших подходов к нахождению паретовских оптимумов в многокритериальных задачах (любой природы, как непрерывных, так и дискретных) основан на линейной свертке критериев [4, 5], сущность которой заключается в скаляризации задачи, т.е. в свертывании векторного критерия в одну числовую функцию. Преимущество такого подхода состоит в возможности применения эффективного аппарата теории оптимизации, именуемого алгоритмами линейной свертки критериев (АЛСК). К сожалению, АЛСК не всегда гарантируют нахождение всех паретовских оптимумов в задачах векторной дискретной оптимизации. Это означает, что существует такая индивидуальная задача, в которой некоторый паретовский оптимум никакой линейной сверткой критериев выловить не удастся. В этом случае принято говорить, что массовая задача неразрешима с помощью АЛСК [6–10].

В [6–10] доказано, что многокритериальные задачи на графах (об остовных деревьях и цепях между парой вершин, о совершенных паросочетаниях и коммивояжере) неразрешимы с помощью АЛСК, если ВЦФ состоит лишь из критериев вида MINSUM. Этот результат позже был обобщен в [11, 12] на случай, когда ВЦФ представляет собой любую комбинацию критериев вида MINSUM и MINMAX. Установлена также неразрешимость с помощью АЛСК и многокритериальных задач о p -медиане графа, о покрытии графа звездами (цепями, циклами) и разнообразных задач о назначениях с теми же критериями [11, 12].

В настоящей работе исследуются r -ККЗ с комбинированной ВЦФ. Показано, что такие задачи при некоторых дополнительных условиях на СП неразрешимы с помощью АЛСК. Этот результат, в частности, позволяет установить неразрешимость с помощью АЛСК многокритериальных задач на графах (коммивояжера, о цепях между парой вершин и совершенных паросочетаниях, о p -медиане и покрытии графа цепями), а также разнообразных задач булева программирования с комбинированной ВЦФ.

Индивидуальную СП $\tau = (E, T)$ назовем особой, если существуют три попарно различные траектории t_1, t_2, t_3 и элементы $e_k^* \in t_k \setminus t^{(0)}$, $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям

$$\{t \in T: t \subseteq t(e_1^*, e_2^*, e_3^*)\} = \emptyset, \quad (4)$$

$$\bigcup_{D \in \mathfrak{B}} t(D) = \emptyset, \quad (5)$$

где

$$t^{(0)} = \bigcup_{1 \leq k_1 < k_2 \leq 3} (t_{k_1} \cap t_{k_2}), \quad t(e_1^*, e_2^*, e_3^*) = \bigcup_{k=1}^3 (t_k \setminus \{e_k^*\}),$$

$\mathfrak{B}$ — множество всех подмножеств из $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, состоящих не менее, чем из двух элементов,

$$t(D) = \{t \in T: D \subseteq t\} \quad \forall D \in \mathfrak{B}.$$

Такую тройку траекторий t_1, t_2, t_3 также будем называть особой.

Теорема 1. Для всякой особой СП $\tau = (E, T)$ с комбинированной ВЦФ $F(t)$ существует такая индивидуальная ВВФ $W(e)$, что для индивидуальной r -ККЗ (E, T, W, F) , $r \geq 2$, выполняется условие

$$\exists \tilde{t} \in \tilde{T}: \Phi(\tilde{t}, \lambda) < \max\{\Phi(t, \lambda): t \in T\} \quad \forall \lambda \in \Lambda_r,$$

где

$$\Phi(t, \lambda) = \sum_{s=1}^r \lambda_s F_s(t), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda_r,$$

$$\Lambda_r = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r): \sum_{s=1}^r \lambda_s = 1, \lambda_s > 0 \forall s \in N_r \right\}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай двух критериев ($r = 2$). Пусть $\tau = (E, T)$ — особая СП, а t_1, t_2, t_3 — особая тройка траекторий в τ . Определим индивидуальную ВВФ

$$W(e) = (w_1(e), w_2(e))$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1(e_1^*) &= 0, & w_2(e_1^*) &= a, \\ w_1(e_2^*) &= a, & w_2(e_2^*) &= 0, \\ w_1(e_3^*) &= w_2(e_3^*) = b, \\ w_s(e) &= \delta_s \quad \forall e \in t(e_1^*, e_2^*, e_3^*), \quad s = 1, 2, \\ w_1(e) &= w_2(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^3 t_k \right), \end{aligned}$$

где

$$\delta_s = \begin{cases} 0, & \text{если } F_s(t) \text{ — критерий вида MAXSUM или MAXMAX,} \\ c, & \text{если } F_s(t) \text{ — критерий вида MAXMIN,} \end{cases}$$

$$c > a > 2b > 0.$$

Тогда, учитывая соотношения (4) и (5), заключаем, что, какие бы виды критериев из (1)–(3) ни фиксировались в качестве функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$, для всякой траектории $t \in T$ возможна лишь одна из следующих альтернатив:

$$(1) F_1(t) = 0, F_2(t) \leq a,$$

$$(2) F_1(t) \leq a, F_2(t) = 0,$$

$$(3) F_1(t) = F_2(t) = b.$$

Поэтому, принимая во внимание очевидные равенства

$$F_1(t_1) = 0, \quad F_2(t_1) = a,$$

$$F_1(t_2) = a, \quad F_2(t_2) = 0,$$

$$F_1(t_3) = F_2(t_3) = b,$$

получим, что

$$\{t_1, t_2, t_3\} \subseteq \bar{T},$$

$$b = \Phi(t_3, \lambda) < \frac{a}{2} \leq \max\{\Phi(t_1, \lambda), \Phi(t_2, \lambda)\} \leq \max\{\Phi(t, \lambda) : t \in T\} \quad \forall \lambda \in \Lambda_2.$$

Отсюда следует справедливость теоремы 1 в случае, когда $r = 2$.

Доказательство теоремы 1 в случае $r > 2$ получим, если весовые функции $w_1(e)$ и $w_2(e)$ оставим прежними, а при $s = 3, 4, \dots, r$ положим

$$w_s(e) = w_2(e) \quad \forall e \in E \setminus \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\},$$

$$w_s(e) = \delta_s \quad \forall e \in \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Следующие r -критериальные ($r \geq 2$) задачи с комбинированной ВЦФ неразрешимы с помощью АЛСК:

- (1) Задача о совершенных паросочетаниях на n -вершинном графе при любом четном $n \geq 4$.
- (2) Задача о цепях между парой вершин на n -вершинном графе при любом $n \geq 4$.
- (3) Задача покрытия n -вершинного графа цепями [13], длины которых принадлежат заданному множеству $\{h_1, h_2, \dots, h_p\} \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$, для любого числа $n \geq 4$, представимого в виде

$$n = \sum_{i=1}^p h_i x_i, \quad x_i \in \mathbf{Z}_+.$$

- (4) Задача о коммивояжере на n -вершинном графе при любом $n \geq 6$.
- (5) Задача о коммивояжере на n -вершинном орграфе при любом $n \geq 4$ [13].
- (6) Задача о p -медиане ($1 \leq p \leq n - 1$) n -вершинного графа (со взвешенными вершинами) при любом $n \geq 4$ [14].
- (7) Прямоугольная задача о назначениях порядка $m \times n$, $3 \leq m \leq n$ [15].
- (8) Задача о назначениях с m категориями работ порядка $m \times n$, $3 \leq m \leq n$ [15].
- (9) Распределительная задача с булевыми переменными (или, в другой терминологии, обобщенная задача о назначениях) порядка $m \times n$, $3 \leq m \leq n$ [16].
- (10) Задача развозки [17] (или, в другой терминологии, задача о разбиении [16]) порядка $n \geq 4$.

Здесь ссылки указывают на источник, где имеются постановки этих задач в однокритериальном случае ($r = 1$).

Доказательство. Так как все перечисленные выше r -критериальные задачи можно трактовать как r -ККЗ (см. [2, 12]), в силу теоремы 1 для доказательства этой теоремы достаточно построить особую тройку траекторий некоторой индивидуальной СП для каждой из задач с учетом указанных размерностей.

Прежде всего заметим, что построенные в [12] так называемые примитивные тройки траекторий для задач 1–3 и 7–9, удовлетворяют условиям (4) и (5), т. е. являются особыми.

Теперь докажем существование особой тройки траекторий для некоторых индивидуальных СП задач о коммивояжере, p -медиане и задачи развозки.

4. Рассмотрим n -вершинный ($n \geq 6$) граф $G = (V, E)$, у которого множество вершин $V = N_n = \{1, \dots, n\}$, а множество ребер $E = \{e_i : i \in N_{n+5}\}$ определено в виде следующего списка:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 2), & e_2 &= (1, 4), & e_3 &= (1, 3), \\ e_4 &= (2, 3), & e_5 &= (4, 3), & e_6 &= (2, 4), \\ e_7 &= (4, 5), & e_8 &= (3, 5), & e_9 &= (2, 5), \\ e_i &= (i - 5, i - 4), & i &= 10, 11, \dots, n + 4, & e_{n+5} &= (n, 1). \end{aligned}$$

Легко убедиться, что множество всех траекторий задачи о коммивояжере на этом графе состоит из следующих шести гамильтоновых циклов:

$$\begin{aligned} t_1 &= \{e_1, e_6, e_5, e_8\} \cup H, \\ t_2 &= \{e_2, e_6, e_4, e_8\} \cup H, \\ t_3 &= \{e_3, e_4, e_6, e_7\} \cup H, \\ t_4 &= \{e_1, e_4, e_5, e_7\} \cup H, \\ t_5 &= \{e_3, e_5, e_6, e_9\} \cup H, \\ t_6 &= \{e_2, e_5, e_4, e_9\} \cup H, \end{aligned}$$

где

$$H = \{e_i \in E : i = 10, 11, \dots, n + 5\}.$$

Пусть $e_1^* = e_1$, $e_2^* = e_2$, $e_3^* = e_3$. Тогда

$$t^* = t(e_1^*, e_2^*, e_3^*) = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup H.$$

Поскольку подграф $G^* = (V, t^*)$ графа G не содержит гамильтоновых циклов, справедливо соотношение (4). Очевидно, что при этом будет выполняться и условие (5). Значит, тройка траекторий t_1, t_2, t_3 является особой.

5. Рассмотрим полный n -вершинный орграф K_n с множеством вершин $V = N_n$ и множеством дуг $E = N_n \times N_n$. Очевидно, что множества дуг

$$\begin{aligned} t_1 &= \{(2, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n), (n, 2)\}, \\ t_2 &= \{(3, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5), \dots, (n-1, n), (n, 3)\}, \\ t_3 &= \{(4, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6), \dots, (n-1, n), (n, 4)\} \end{aligned}$$

являются гамильтоновыми контурами орграфа K_n , т.е. траекториями задачи коммивояжера на этом орграфе.

Пусть $e_1^* = (2, 1)$, $e_2^* = (3, 1)$, $e_3^* = (4, 1)$. Тогда

$$t = t(e_1^*, e_2^*, e_3^*) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), \dots, (n-1, n), (n, 2), (n, 3), (n, 4)\}.$$

Поскольку подграф $G^* = (V, t^*)$ орграфа K_n не содержит гамильтоновых контуров, справедливо соотношение (4). Ясно, что при этом будет выполняться и условие (5). Следовательно, тройка траекторий t_1, t_2, t_3 является особой.

6. Областью определения задачи о p -медиане графа ($1 \leq p \leq n-1$) [14] является множество матриц

$$X = \left\{ x = \|x_{ij}\|_{n \times n} : \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N_n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n x_{ii} = p, x_{ij} \leq x_{ii} \quad \forall i, j \in N_n, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n \right\}.$$

Таким образом, при фиксированных n и p , $1 \leq p \leq n-1$, множество X определяет единственную СП $\tau = (E, T)$, $E = N_n \times N_n$, в которой для любого $n \geq 4$ тройка траекторий

$$\begin{aligned} t_1 &= \{(1, n)\} \cup Q, \\ t_2 &= \begin{cases} \{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, n)\} & \text{при } p = 1, \\ \{(2, n)\} \cup Q & \text{при } p \geq 2, \end{cases} \\ t_3 &= \begin{cases} \{(3, 1), (3, 2), \dots, (3, n)\} & \text{при } p = 1, \\ \{(1, 1), (3, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), \dots, (1, n-1), (3, n)\} & \text{при } p = 2, \\ \{(3, n)\} \cup Q & \text{при } p \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$Q = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (p, p), (1, p+1), (1, p+2), \dots, (1, n-1)\},$$

удовлетворяет, как легко видеть, условиям (4), (5), если положить $e_1^* = (1, n)$, $e_2^* = (2, n)$, $e_3^* = (3, n)$, т. е. является особой.

10. Областью определения задачи развозки порядка n [17] является множество векторов

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1 \quad \forall i \in N_m, x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N_n \right\},$$

где a_{ij} — заданные числа ($a_{ij} = 1$, если по маршруту j обслуживается i -й клиент, и $a_{ij} = 0$ в противном случае),

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \geq 1 \quad \forall j \in N_n.$$

В качестве индивидуальной СП рассмотрим область определения задачи развозки порядка $n \geq 4$, заданную числами

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1 \quad \forall (i, j) \in N_{m-l} \times N_{n-1}, \quad 1 \leq l \leq m-1, \\ a_{in} &= 1, \quad i = m-l+1, m-l+2, \dots, m, \end{aligned}$$

$a_{ij} = 0$ для остальных пар (i, j) .

Легко убедиться, что тройка траекторий $t_1 = \{1\}$, $t_2 = \{2\}$, $t_3 = \{3\}$, является особой, так как в качестве e_1^* , e_2^* и e_3^* можно взять соответственно 1, 2 и 3.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Утверждение 7 теоремы 2, касающееся неразрешимости квадратной задачи о назначениях порядка n , может быть обобщено и на p -индексные ($p > 2$) как аксиальные, так и планарные задачи о назначениях порядка $n \geq 3$ (терминологию см. в [18]).

Список литературы

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация, алгоритмы и сложность*. Мир, Москва, 1985.
2. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О комбинаторных задачах векторной оптимизации. *Дискретная математика* (1995) 7, №1, 3–18.
3. Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.
4. Михалевич В. С., Волкович В. Л. *Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем*. Наука, Москва, 1982.
5. Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
6. Емеличев В. А., Перепелица В. А. Многокритериальные задачи об остовах графа. *ДАН СССР* (1988) 298, №3, 544–547.

7. Емеличев В. А., Перепелица В. А. К вычислительной сложности многокритериальных задач. *Изв. АН СССР, Техн. кибернетика* (1988) №1, 78–85.
8. Емеличев В. А., Перепелица В. А. О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1989) 29, №2, 171–183.
9. Emelichev V. A., Perepeliza V. A. Complexity of vector optimization problems on graphs. *Optimization* (1991) 22, №6, 903–918.
10. Емеличев В. А., Перепелица В. А. Сложность дискретных многокритериальных задач. *Дискретная математика* (1994) 6, №1, 3–33.
11. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев. *Докл. РАН* (1994) 334, №1, 9–11.
12. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1994) 34, №7, 1082–1094.
13. Перепелица В. А. *Многокритериальные задачи теории графов. Алгоритмический подход*. УМК ВО, Киев, 1989.
14. Кристофидес Н. *Теория графов. Алгоритмический подход*. Мир, Москва, 1978.
15. Кравцов М. К., Шерман А. Х. О решении комбинаторных задач оптимизации с минимаксными критериями. *Кибернетика* (1989) №3, 71–77.
16. Ковалев М. М. *Дискретная оптимизация*. БГУ им. В. И. Ленина, Минск, 1977.
17. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. *Дискретное программирование*. Наука, Москва, 1969.
18. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.

Статья поступила 25.01.94.