Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Маренич, Сингулярность некоторых отношений и их комбинаторные применения, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 63–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 05:09:55

Сингулярность некоторых отношений и их комбинаторные применения

© 1996 г. Е. Е. Маренич

Найдены условия обратимости дзета-функций, а также формулы вычисления функций Мебиуса отношений пересечения, непересечения, накрытия и дополнения. Как следствие несингулярности этих отношений получены многие комбинаторные утверждения.

1. Введение

Пусть L — конечное множество, F — поле, $F(0)$ — поле характеристики 0. Функции $f: L^2 \rightarrow F$ называются бинарными функциями; $\text{bin}_F(L)$ — множество бинарных функций. На $\text{bin}_F(L)$ определены операции сложения $+$ и свертки $*$ равенствами

$$(f + g)(a, b) = f(a, b) + g(a, b), \quad (f * g)(a, b) = \sum_{z \in L} f(a, z)g(z, b).$$

Обозначим $\text{Bin}_F(L)$ алгебру бинарных функций, $\text{Bin}_F(L)$ изоморфна полной матричной алгебре. Определим бинарную функцию e , полагая $e(a, a) = 1$, $e(a, b) = 0$ для $a \neq b$.

Пусть T — бинарное отношение на L . Бинарная функция ζ_T , где

$$\zeta_T(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a T b, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

называется дзета-функцией отношения T . Если ζ_T обратима в $\text{Bin}_F(L)$, то T называется несингулярным на L над F , а $\mu_T = \zeta_T^{-1}$ называется функцией Мебиуса отношения T . Отношение $T = L^2$ назовем единичным отношением на L . Для $a, b \in L$ обозначим $[a, b]_T = \{z \mid z \in L, a T z T b\}$.

Теорема 1 (обращение Мебиуса для отношения T [1]). Пусть T — несингулярное на L над F отношение, $f, g: L \rightarrow F$. Если для всех $a \in L$

$$g(a) = \sum_{z \in L, z T a} f(z), \tag{1}$$

то для всех $a \in L$

$$f(a) = \sum_{z \in L} g(z) \mu_T(z, a) \tag{2}$$

и наоборот.

Если T — частичный порядок, то формулы (1), (2) представляют собой классическое обращение Мебиуса.

Различные обобщения обращения Мебиуса имеются в работах Б. С. Стечкина [2, 3].

Если $\leq$ обозначает частичный порядок, то $\leq$ несингулярно на L над F . Известно большое значение несингулярности частичных порядков для комбинаторики. Например, функции Мебиуса, обращение Мебиуса и их применения являются основой для некоторых разделов комбинаторного анализа [4–7].

В работе рассматриваются бинарные отношения, не являющиеся частичными порядками, несингулярность которых имеет многочисленные комбинаторные следствия.

Если $\leq$ есть отношение частичного порядка на L , то $(L, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством. Для частично упорядоченных множеств мы используем терминологию, принятую в [6]. Если в $(L, \leq)$ существует единственный наименьший или наибольший элемент, то он обозначается, соответственно, $\bar{0}$ или $\bar{1}$. Отношение $\leq$ определяет на L отношения меньше и отношения накрытия $<$: $a < b$ равносильно $a \leq b$ и $a \neq b$; $a < b$ равносильно $|\{a, b\}| = 2$.

В градуированных частично упорядоченных множествах $(L, \leq)$ ранговая функция обозначается ρ . Если $(L, \leq)$ имеет ранг n , то для $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} W_k &= W_k(L, \leq) = \{z \mid z \in L, \rho(z) = k\}, \\ \text{bot}_k &= \text{bot}_k(L, \leq) = \{z \mid z \in L, \rho(z) \leq k\}, \\ \text{top}_k &= \text{top}_k(L, \leq) = \{z \mid z \in L, \rho(z) \geq k\}. \end{aligned}$$

Будем говорить, что элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ перенумерованы по рангу, если из $\rho(a_i) < \rho(a_j)$ следует $i < j$.

Частично упорядоченное множество $(L, \leq)$ называется нижней (верхней) полурешеткой, если для всех $a, b \in L$ существует точная нижняя (верхняя) грань $a \wedge b$ ($a \vee b$). Частично упорядоченное множество $(L, \leq)$, являющееся одновременно нижней и верхней полурешеткой, называется решеткой.

Пусть $(L, \leq)$ — нижняя полурешетка. На L определены отношения пересечения R и непересечения $\bar{R}$: $a R b$ равносильно $a \wedge b \neq \bar{0}$, $a \bar{R} b$ равносильно $a \wedge b = \bar{0}$.

Пусть $(L, \leq)$ — верхняя полурешетка. На L определены отношения накрытия S и ненакрытия $\bar{S}$: $a S b$ равносильно $a \vee b = \bar{1}$, $a \bar{S} b$ равносильно $a \vee b \neq \bar{1}$.

Пусть $(L, \leq)$ — решетка. На L определено отношение дополнения C : $a C b$ равносильно $a \vee b = \bar{1}$, $a \wedge b = \bar{0}$. Обозначим ${}^\perp a$ — множество дополнений элемента a .

Среди отношений, не являющихся частичными порядками, в комбинаторике наиболее часто встречаются отношения $R, \bar{R}, S, \bar{S}, C$. Ранее сингулярность и функции Мебиуса этих отношений не изучались. В §2 и §4 установлены и доказаны свойства сингулярности, найдены формулы для вычисления функций Мебиуса указанных отношений. Как следствие доказанных результатов, получены многие комбинаторные утверждения, как новые, так и классические.

В неявной форме несингулярность отношений $R, \bar{R}, S, \bar{S}, C$ давно используется в комбинаторике. Например, в неявной форме $\mu_{\bar{R}}$ и обращение Мебиуса для $\bar{R}$ получены в [8] и использованы для изучения симметрических функций.

Функция $I: L \rightarrow L$ называется оператором T -замыкания, если $a T I(b)$ равносильно $I(a) T I(b)$ для всех $a, b \in L$. Определим множество

$$I(L) = \{z \mid z \in L, I(z) = z\}$$

и отношение

$$I(T) = T \cap (I(T))^2.$$

Теорема 2 ([1]). Пусть T несингулярно на L над F , I — оператор T -замыкания, $I(T) \neq \emptyset$. Тогда отношение $I(T)$ несингулярно на $I(L)$ над F и для $a, b \in I(L)$

$$\mu_{I(T)}(a, b) = \sum_{z \in L, I(z)=b} \mu_T(a, z). \quad (3)$$

Для $a \in L - I(L)$, $b \in I(L)$,

$$\sum_{z \in L, I(z)=b} \mu_T(a, z) = 0. \quad (4)$$

Если T есть частичный порядок, то (3) и (4) совпадают с известными формулами Рота [4]. Различные обобщения теоремы 2 имеются в [2, 3].

Для частичных порядков $\leq$ операторы $\leq$ -замыкания являются важным инструментом вычисления функций Мебиуса $\mu_{\leq}$ [4, 9, 6].

В §3 изучаются свойства операторов $\bar{R}$ -замыкания. Для некоторых решеток описаны все операторы $\bar{R}$ -замыкания. Ранее операторы $\bar{R}$ -замыкания, по видимому, не изучались.

В §5, как следствие несингулярности отношений $R, \bar{R}, S, C$, получены формулы для вычисления рангов некоторых комбинаторных матриц, доказаны многие комбинаторные утверждения, как новые, так и известные.

Как обычно, $\text{GF}(q)$ обозначает конечное поле, содержащее q элементов, $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbf{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbf{R}$.

Пусть L — конечное множество, $|L|$ — число элементов в L , 2^L — множество всех подмножеств L , $L^2 = \{(a, b) \mid ab \in L\}$.

Обозначим $\binom{n}{k}$ биномиальные коэффициенты, $\binom{n}{k}_q$ — коэффициенты Гаусса.

Пусть U — конечное множество, $|U| = n$. Решетка $\text{Bul}(U) = (2^U, \subseteq)$ называется булеаном. Решетка, изоморфная $\text{Bul}(U)$, обозначается $\text{Bul}(n)$.

Пусть U есть n -мерное векторное пространство над $\text{GF}(q)$, $\text{lin}(U)$ — множество подпространств U . На $\text{lin}(U)$ определен частичный порядок $\leq$: $u \leq v$ обозначает, что u — подпространство v . $\text{Lin}(U) = (\text{lin}(U), \leq)$ есть решетка подпространств пространства U . Решетка, изоморфная $\text{Lin}(U)$, обозначается $\text{Lin}(n, q)$. Числа Галуа $\text{gal}(n, q)$ определяются равенством $\text{gal}(n, q) = |\text{lin}(U)|$.

Пусть U есть n -мерное векторное пространство над $\text{GF}(q)$, $\text{aff}(U)$ — множество аффинных подпространств U . На $\text{aff}(U)$ определен частичный порядок $\leq$: $u \leq v$ обозначает, что u — подпространство v . $\text{Aff}(U) = (\text{aff}(U), \leq)$ есть решетка аффинных подпространств пространства U . Решетка, изоморфная $\text{Aff}(U)$, обозначается $\text{Aff}(n, q)$.

В работе используется матричная терминология, принятая в [10]. Для $f \in \text{Bin}_F(L)$, $P_1, P_2 \subseteq L$ $m(f, P_1, P_2)$ обозначает матрицу размера $|P_1| \times |P_2|$, у

которой в a -й строке и b -м столбце, где $(a, b) \in P_1 \times P_2$, расположен элемент $f(a, b)$.

Если элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ перенумерованы, то каждой $f \in \text{Bin}_F(L)$ поставлена в соответствие $m(f, L, L)$ -квадратная матрица порядка $|L|$, у которой в i -й строке и j -м столбце расположен элемент $f(a_i, a_j)$. Матрица $m(\zeta_T, L, L)$ называется матричным представлением ζ_T .

Множество N , $N \subseteq L$, называется T -антицепью, если $(a, b) \notin T$ для любых $a, b \in N$, $a \neq b$.

2. Сингулярность отношений непересечения и пересечения

2.1. Сингулярность отношения непересечения

Пусть $(L, \leq)$ — конечная нижняя полурешетка, $\bar{R}$ — отношение непересечения на L .

Лемма 1. В алгебре $\text{Bin}_F(L)$

$$\zeta_{\bar{R}} = \zeta_{\geq} * d_0 * \zeta_{\leq}, \quad (5)$$

где $d_0(a, b) = e(a, b)\mu_{\leq}(\bar{0}, b)$ для $a, b \in L$,

$$\begin{aligned} \text{rank}_F m(\zeta_{\bar{R}}, L, L) &= |\{z \in L, \mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0\}|, \\ \det m(\zeta_{\bar{R}}, L, L) &= \prod_{z \in L} \mu_{\leq}(\bar{0}, z). \end{aligned}$$

Для несингулярности $\bar{R}$ на L над F необходимо и достаточно, чтобы для $z \in L$

$$\mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0.$$

Если $\bar{R}$ несингулярно на L над F , то

$$\mu_{\bar{R}} = \mu_{\leq} * d_0^{-1} * \mu_{\geq}.$$

Доказательство. Справедливость (5) проверяется непосредственно. Остальные утверждения следуют из (5).

Для конечных геометрических решеток $(L, \leq)$ отношение $\bar{R}$ несингулярно на L над $F(0)$.

Следствие 1. Пусть $(L, \leq)$ — конечная дистрибутивная решетка. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\bar{R}}, L, L) = 2^{|W_1|},$$

$\bar{R}$ несингулярно на L над F тогда и только тогда, когда $(L, \leq)$ — булеан.

Положим

$$L_F(\bar{R}) = \{z \mid z \in L, \mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0\}.$$

Теорема 3. Пусть $N \subseteq L$, $N \neq \emptyset$. Тогда

- для сужения $\bar{R}$ на $L_F(\bar{R})$ в алгебре $\text{Bin}_F(L_F(\bar{R}))$

$$\zeta_{\bar{R}} = \zeta_{\geq} * d_0 * \zeta_{\leq}, \quad (6)$$

где $d_0(a, b) = e(a, b)\mu_{\leq}(\bar{0}, b)$ для $a, b \in L_F(\bar{R})$;

- сужение $\bar{R}$ на $L_F(\bar{R})$ несингулярно над F ;
- существует биекция $\varphi: L_F(\bar{R}) \rightarrow L_F(\bar{R})$ такая, что $a \wedge \varphi(a) = \bar{0}$ для $a \in L_F(\bar{R})$;

$$\det m(\zeta_{\bar{R}}, L_F(\bar{R}), L_F(\bar{R})) = \prod_{z \in L_F(\bar{R})} \mu_{\leq}(\bar{0}, z);$$

- если N есть $\bar{R}$ -антицепь, $N \subseteq L_F(\bar{R})$, то $|N| \leq |L_F(\bar{R})|/2$;
- если сужение $\bar{R}$ на N несингулярно над F , то существует инъекция $\varphi: N \rightarrow L_F(\bar{R})$ такая, что $\varphi(a) \leq a$ для $a \in N$;
- если сужение $\bar{R}$ на N несингулярно над F , то $|N| \leq |L_F(\bar{R})|$.

Доказательство. Равенство (6) следует из (5).

Если $z \in N \cap \{\varphi(a) \mid a \in N\}$, где φ — биекция, существование которой утверждается в теореме, то $z = \varphi(a)$ для некоторого $a \in N$, $z \wedge a \neq \bar{0}$, $\varphi(a) \wedge a \neq \bar{0}$. Получаем противоречие.

Из (5) следует, что

$$m(\zeta_{\bar{R}}, N, N) = m(\zeta_{\geq}, N, L_F(\bar{R}))m(d_0, L_F(\bar{R}), L_F(\bar{R}))m(\zeta_{\leq}, L_F(\bar{R}), N).$$

Поэтому существует такой минор m порядка $|N|$ матрицы $m(\zeta_{\geq}, N, L_F(\bar{R}))$, что $\det m \neq 0$. Отсюда следует нужное утверждение.

Следствие 2. Пусть $\mu_{\leq}(\bar{0}, b) \neq 0$ для $b \in L$. Тогда

- существует биекция $\varphi: L \rightarrow L$ такая, что $a \wedge \varphi(a) = \bar{0}$ для $a \in L$;
- если $(L, \leq)$ — решетка, то $\varphi(\bar{0}) = \bar{1}$, $\varphi(\bar{1}) = \bar{0}$;
- если N есть $\bar{R}$ -антицепь, то $|N| \leq |L|/2$.

Для геометрических решеток первое утверждение следствия 2 доказано в [11].

В некоторых решетках $(L, \leq)$ существуют $\bar{R}$ -антицепи N , для которых $|N| = |L|/2$.

Пример 1. Пусть U — конечное множество, I — идеал в булеане $\text{Bul}(U)$, $\bar{I} = \{U - a \mid a \in I\}$. Рассмотрим частично упорядоченное множество $(I, \subseteq)$. Из первого утверждения следствия 2 следует, что существует биекция $\varphi: I \rightarrow \bar{I}$ такая, что $a \bar{R} \varphi(a)$ для $a \in I$. Поэтому существует биекция $\psi: I \rightarrow \bar{I}$ такая, что $a \leq \psi(a)$ для $a \in I$, где $\psi(a) = U - \varphi(a)$. Впервые этот результат установлен в [26, 27].

Пример 2. Пусть U — конечное множество, $|U| = n$. Рассмотрим отношения $\bar{R}$ и S в булеане $\text{Bul}(U)$. Из леммы 1 следует, что для $a, b \subseteq U$,

$$\mu_{\bar{R}}(a, b) = (-1)^{|a \cap b|} \zeta_s(a, b),$$

$$\mu_s(a, b) = (-1)^{|a| + |b| + n} \zeta_{\bar{R}}(a, b),$$

$$\det m(\zeta_{\bar{R}}, 2^U, 2^U) = \det m(\zeta_s, 2^U, 2^U) = \begin{cases} -1, & \text{если } n = 1, \\ 1, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что существуют матричные представления $\zeta_{\bar{R}}$ и ζ_s , являющиеся, соответственно, верхней треугольной и нижней треугольной матрицей относительно побочной диагонали. Поэтому

$$\text{per } m(\zeta_{\bar{R}}, 2^U, 2^U) = \text{per } m(\zeta_s, 2^U, 2^U) = 1.$$

Отсюда следует, что существует единственная биекция $\varphi: 2^U \rightarrow 2^U$ такая, что $a \bar{R} \varphi(a)$ (или $a S \varphi(a)$) для $a \subseteq U$.

Теорема 4 (обращение Мебиуса для отношения непересечения). Пусть $\bar{R}$ несингулярно на L над F , $f, g: L \rightarrow F$. Если для $a \in L$

$$g(a) = \sum_{z \in L, z \bar{R} a} f(z),$$

то для $a \in L$

$$f(a) = \sum_{z_1, z_2 \in L} g(z_1) \mu_{\leq}(z_1, z_2) \mu_{\leq}(a, z_2) / \mu_{\leq}(\bar{0}, z_2)$$

и наоборот.

2.2. Сингулярность отношения пересечения

Пусть $(L, \leq)$ — конечная нижняя полурешетка. Легко видеть, что R сингулярно на L над F . Далее мы будем рассматривать сужение R на $P = L - \{\bar{0}\}$.

Лемма 2. В алгебре $\text{Bin}_F(P)$, для сужения R на P

$$\zeta_R = \zeta_{\geq} * d * \zeta_{\leq}, \quad (7)$$

где $d(a, b) = -e(a, b) \mu_{\leq}(\bar{0}, b)$ для $a, b \in P$;

$$\text{rank}_F m(\zeta_R, P, P) = |\{z \mid z \in P, \mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0\}|;$$

$$\det m(\zeta_R, P, P) = (-1)^{|P|} \prod_{z \in P} \mu_{\leq}(\bar{0}, z);$$

для несингулярности сужения R на P над F необходимо и достаточно, чтобы $\mu_{\leq}(\tilde{0}, z) \neq 0$ для $z \in P$; если сужение R несингулярно над F , то $\mu_R = \mu_{\leq} * d^{-1} * \mu_{\geq}$.

Доказательство. Равенство (7) проверяется непосредственно. Остальные утверждения следуют из (7).

Для конечных геометрических решеток $(L, \leq)$ сужение R несингулярно на P над $F(0)$.

Следствие 3. Пусть $(L, \leq)$ — конечная дистрибутивная решетка. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_R, P, P) = 2^{|W_1|} - 1;$$

сужение R несингулярно на P над F тогда и только тогда, когда $(L, \leq)$ — булеан.

Положим

$$P_F(R) = \{z \mid z \in P, \mu_{\leq}(\tilde{0}, z) \neq 0\}.$$

Аналогично теореме 3 доказывается теорема 5.

Теорема 5. Пусть $N \subseteq P$, $N \neq \emptyset$. Тогда

– для сужения $\bar{R}$ на $P_F(R)$ в алгебре $\text{Bin}_F(P_F(R))$

$$\zeta_R = \zeta_{\geq} * d * \zeta_{\leq},$$

где $d_0(a, b) = -e(a, b)\mu_{\leq}(\tilde{0}, b)$ для $a, b \in P_F(R)$;

– сужение R на $P_F(R)$ несингулярно над F ;

– если сужение R на N несингулярно над F , то существует инъекция $\varphi: N \rightarrow P_F(R)$ такая, что $\varphi(a) \leq a$ для $a \in N$;

– если сужение R на N несингулярно над F , то $|N| \leq |P_F(R)|$.

Следствие 4. Если N есть R -антицепь, $N \subseteq L$, то $|N| \leq |P_F(R)|$.

Доказательство. Сужение R на N несингулярно над F .

В некоторых решетках $(L, \leq)$ существуют R -антицепи N , для которых $|N| = |P_F(R)|$.

Теорема 6 (обращение Мебиуса для отношения пересечений). Пусть сужение R несингулярно на P над F , $f, g: L \rightarrow F$. Если для $a \in P$

$$g(a) = \sum_{z \in P, zRa} f(z),$$

то для $a \in L$

$$f(a) = - \sum_{z_1, z_2 \in P} f(z_1)\mu_{\leq}(a, z_2)\mu_{\leq}(z_1, z_2)/\mu_{\leq}(\tilde{0}, z_2)$$

и наоборот.

Пример 3. Пусть U — конечное множество, $|U| = n$, R — сужение отношения пересечения, S — сужение отношения накрытия на $P = 2^U - \{\emptyset\}$. Из леммы 7 следует, что для $a, b \in P$

$$\begin{aligned}\mu_R(a, b) &= (-1)^{|a|+|b|+1} \zeta_S(a, b), \\ \mu_S(a, b) &= (-1)^{n+1+|a|+|b|} \zeta_R(a, b), \\ \det m(\zeta_R, P, P) &= \det m(\zeta_S, P, P) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ -1, & \text{если } n > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

3. Операторы $\bar{R}$ -замыкания

3.1. Свойства операторов $\bar{R}$ -замыкания

Пусть $(L, \leq)$ — конечная решетка, P — множество атомов. Каждый оператор $\bar{R}$ -замыкания I является оператором R -замыкания и наоборот. Заметим, что $I(\tilde{0}) = \tilde{0}$.

Пусть c фиксировано, $c \in L$. Отображения $J_c: L \rightarrow L$, $J_{=c}: L \rightarrow L$ такие, что для всех $z \in L$

$$J_c(z) = z \wedge c, \quad J_{=c}(z) = \begin{cases} c, & \text{если } c \wedge z \neq \tilde{0}, \\ 0, & \text{если } c \wedge z = \tilde{0}, \end{cases}$$

являются операторами $\bar{R}$ -замыкания, назовем их тривиальными. Остальные операторы $\bar{R}$ -замыкания будем называть нетривиальными.

Оператор $\bar{R}$ -замыкания I назовем простым, если $I(a) = \tilde{0}$ равносильно $a = \tilde{0}$.

Лемма 3. Для любых $a, b, c \in P$, если $I(a) \neq \tilde{0}$, то $a \leq I(a)$; если $a \leq I(b)$, то $b \leq I(a)$; если $a \leq I(b)$, $b \leq I(c)$, то $a \leq I(c)$.

Доказательство. Так как $I(a) R I(a)$, то $a R I(a)$. Поэтому $a \leq I(a)$.

Положим $P(I) = \{a \mid a \in P, I(a) \neq \tilde{0}\}$. Из леммы 3 следует, что на $P(I)$ определено отношение эквивалентности $\sim$: $a \sim b$ равносильно $a \leq I(b)$.

Лемма 4. Пусть $(L, \leq)$ — конечная атомарная решетка. Тогда

– для любого $a \in P$

$$I(a) = \bigvee_{z \sim a} z,$$

где $\bigvee$ берется по всем атомам $z \sim a$;

– для всех $d \in L$

$$I(d) = \bigvee_{z \leq d} I(z), \tag{8}$$

где $\bigvee$ берется по всем атомам $z \leq d$;

- если $a \in P$, $d \in L$ и $I(a)RI(d)$, то $I(a) \leq I(d)$;
- если $a \in P$, $a \leq I(d)$, то $I(a) \neq \bar{0}$ и существует атом $b \leq d$ такой, что $a \leq I(b)$.

Доказательство. Для доказательства (8) рассмотрим два случая.

Предположим, что $I(d) = \bar{0}$. Пусть a — атом, $a \leq d$. Докажем, что $I(a) = \bar{0}$. Предположим противное, пусть $I(a) \neq \bar{0}$. Тогда $a \leq I(a)$, $d RI(a)$, $I(d) RI(a)$. Получили противоречие.

Из доказанного следует (8).

Предположим теперь, что $I(d) \neq \bar{0}$. Докажем, что

$$\bigvee_{z \leq d} I(z) = \bigvee_{z \leq d} \left(\bigvee_{y \sim z} y \right) \leq I(d). \quad (9)$$

Пусть $z, y \in P$, $z \leq d$, $y \sim z$. Тогда $z \leq I(y)$, $z \leq d$. Поэтому $d RI(y)$, $I(d) RI(y)$, $y RI(d)$, $y \leq I(d)$. Отсюда следует (9).

Докажем, что

$$\bigvee_{z \leq d} I(z) \geq I(d). \quad (10)$$

Пусть $a \in P$, $a \leq I(d)$. Тогда $I(a) RI(d)$, $d RI(a)$. Поэтому существует $z \in P$, $z \leq I(a)$, $z \leq d$, $a \leq I(z)$. Отсюда следует (10).

Лемма 5. Пусть $(L, \leq)$ — конечная атомарная решетка, I — оператор $\bar{R}$ -замыкания. I является простым оператором тогда и только тогда, когда $I(\bar{1}) = \bar{1}$.

Пример 4. Пусть U — конечное множество, $\bar{R}$ — отношение непересечения в $\text{Bul}(U)$. Пусть $\pi = A_1 | \dots | A_k$ — произвольное частичное разбиение множества U (то есть $A_1, \dots, A_k \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, $A_1 \cup \dots \cup A_k \subseteq U$). На множестве $A_1 \cup \dots \cup A_k$ разбиением π определено отношение эквивалентности $\sim$. Определим $I: 2^U \rightarrow 2^U$, полагая для всех $a \subseteq U$

$$I(a) = \bigcup_{z \in a} \{y \mid y \sim z\}.$$

Очевидно, что I есть оператор $\bar{R}$ -замыкания в $\text{Bul}(U)$. В $\text{Bul}(U)$ для $|U| \geq 3$ существуют простые, нетривиальные операторы $\bar{R}$ -замыкания.

Теорема 7. Пусть $(L, \leq)$ — конечная атомарная решетка, I — оператор $\bar{R}$ -замыкания.

Если I — простой оператор, то $a \leq I(a)$ для всех $a \in L$.

Для всех $a, b \in L$, если $a \leq b$, то $I(a) \leq I(b)$.

Для всех $a \in L$, $I(I(a)) = I(a)$.

Доказательство. Первые два утверждения легко следуют из леммы 4. Докажем третье утверждение. Если $I(a) = \bar{0}$, то утверждение справедливо. Предположим, что $I(a) \neq \bar{0}$. Докажем, что

$$I(a) \leq I(I(a)). \quad (11)$$

Пусть $b \in P$, $b \leq I(a)$. Тогда $bRI(a)$, $I(b)RI(a)$, $I(b)RI(I(a))$, $bRI(I(a))$, $b \leq I(I(a))$. Отсюда следует (11).

Докажем, что

$$I(I(a)) \leq I(a). \quad (12)$$

Пусть $b \in P$, $b \leq I(I(a))$. Тогда $bRI(I(a))$, $I(b)RI(I(a))$, $I(b)RI(a)$, $bRI(a)$, $b \leq I(a)$. Отсюда следует (12).

Следствие 5. Пусть $(L, \leq)$ — конечная атомарная решетка, I — простой оператор $\bar{R}$ -замыкания. Тогда I есть оператор $\leq$ -замыкания.

Существуют операторы $\leq$ -замыкания, не являющиеся операторами $\bar{R}$ -замыкания.

3.2. Операторы $\bar{R}$ -замыкания в решетке $\text{Lin}(U)$

Лемма 6. Пусть I есть простой оператор $\bar{R}$ -замыкания в решетке $\text{Lin}(U)$. Если u есть I -замкнутое пространство, то и любое дополнение u есть I -замкнутое пространство.

Доказательство. Пусть $u \neq \bar{0}$, $v \in {}^\perp u$. Тогда $v \bar{R} u$, $I(v) \bar{R} u$. Если $I(v) \neq v$, то, по теореме 7, $I(v) > v$, $n \geq \dim(I(v) + u) = \dim I(v) + \dim u > \dim v + \dim u = n$. Получили противоречие.

Лемма 7. Каждый простой оператор $\bar{R}$ -замыкания в $\text{Lin}(v)$ равен $J_{=\bar{1}}$ или $J_{\bar{1}}$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по $n = \dim U$. Для $n = 1$, $n = 2$ справедливость леммы проверяется непосредственно.

Пусть $n \geq 3$, I — простой оператор $\bar{R}$ -замыкания в $\text{Lin}(U)$.

Если существует одномерное подпространство u такое, что $I(u) = \bar{1}$, то для любого подпространства v , $I(u)RI(v)$, $I(u) \leq I(v)$, $I(v) = \bar{1}$. Поэтому $I = J_{=\bar{1}}$.

Если для любого одномерного пространства u справедливо равенство $I(u) = u$, то, по лемме 7, $I(v) = v$ для всех $v \in \text{lin}(U)$. Поэтому $I = J_{\bar{1}}$.

Предположим теперь, что существует одномерное подпространство u такое, что $1 < \dim I(u) < n$. Рассмотрим два случая.

Пусть существует одномерное подпространство $v \not\leq I(u)$ такое, что $I(v) = v$. Пусть $w \in {}^\perp v$. Тогда $w = I(w)$, $\dim w = n - 1$. Так как

$$\dim(I(u) \cap w) = \dim I(u) + \dim w - \dim(I(u) + w) \geq \dim I(u) - 1 > 0,$$

то $I(u)Rw$ и по лемме 7 $I(u) \leq w$. Сужение оператора I на $[\bar{0}, w]_{\leq}$ снова является оператором $\bar{R}$ -замыкания. По индукционному предположению $I(u) = w$. Таким образом, v имеет единственное дополнение, равное $I(u)$. Получили противоречие.

Пусть теперь $1 > I(v) > v$ для любого одномерного пространства $v \not\leq I(u)$. Для фиксированного v такого, что $I(v) > v$, $v \not\leq I(u)$, выберем $w \in {}^{\perp}(I(u))$ такое, что $v \leq w$. Поэтому $I(v) \leq w$ и, по индукционному предположению, примененному к интервалу $[\bar{0}, w]_{\leq}$, справедливо равенство $I(v) = w$. Отсюда следует, что различные дополнения $I(u)$ попарно не пересекаются. Поэтому каждое одномерное подпространство v либо содержится в $I(u)$, либо содержится в одном из его дополнений. Положим $k = \dim I(u)$, тогда

$$k = n - \dim w = n - \dim I(v) < n - 1.$$

Используя вышесказанное, подсчитаем число всех одномерных подпространств пространства U двумя способами. Ясно, что

$$\frac{q^k - 1}{q - 1} + q^{k(n-k)} \frac{q^{n-k} - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Отсюда следует, что $k = n - 1$. Получили противоречие.

Теорема 8. *Каждый оператор $\bar{R}$ -замыкания решетки $(L, \leq)$ тривиален.*

Доказательство. Если I есть простой оператор $\bar{R}$ -замыкания, то он тривиален.

Пусть I — оператор $\bar{R}$ -замыкания, не являющийся простым. Положим

$$c = \bigvee I(a),$$

где $\bigvee$ берется по всем атомам $a \in P(I)$. Из леммы 5 следует, что $c < \bar{1}$.

Если $c = \bar{0}$, то $I = J_{\bar{0}}$ есть тривиальный оператор.

Пусть $\bar{0} < c < \bar{1}$. Сужение I на $[\bar{0}, c]_{\leq}$ есть простой оператор $\bar{R}$ -замыкания. Из леммы 7 следует, что возможны два случая. В первом случае $I(a) = a$ для всех $a \in P(I)$. Поэтому $I(z) = c \wedge z$ для всех $z \in L$ и $I = J_c$ есть тривиальный оператор.

Пусть теперь $I(a) = c$ для всех $a \in P(I)$. В этом случае $I(z) = c$, если $c \wedge z \neq \bar{0}$, и $I(z) = \bar{0}$, если $c \wedge z = \bar{0}$. Поэтому $I = J_{=c}$ есть тривиальный оператор.

4. Сингулярность отношений накрытия и дополнения

Пусть $(L, \leq)$ — конечная верхняя полурешетка, S — отношение накрытия на L . Сингулярность отношения S над F определяется лемма 1 (двойственная форма).

Из леммы 1 (двойственная форма) следует, что для конечных геометрических решеток $(L, \leq)$ отношение накрытия S несингулярно на L над $F(0)$.

4.1. Обобщенное неравенство Доулинга–Вильсона

Пусть $(L, \leq)$ — конечная верхняя полурешетка, S — отношение накрытия на L . Положим

$$L_F(S) = \{a \mid a \in L, \mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0\}.$$

Теорема 9. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n . Тогда для $k \in \{0, \dots, n\}$

$$|L_F(S) \cap \text{bot}_k| \leq |L_F(S) \cap \text{top}_{n-k}|. \quad (13)$$

Доказательство. Из теоремы 3 (двойственная форма) следует, что существует биекция $\varphi: L_F(S) \rightarrow L_F(S)$ такая, что $a \vee \varphi(a) = \tilde{1}$ для $a \in L_F(S)$. Если $\rho(a) \leq k$, то из полумодулярного неравенства для ранга следует, что $\rho(\varphi(a)) \geq n - k$. Отсюда следует (13).

Если $(L, \leq)$ — геометрическая решетка, то (13) совпадает с неравенствами Доулинга–Вильсона [11].

Следствие 6. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n . Тогда

$$|\{a \mid a \in W_1, \mu_{\leq}(a, \tilde{1}) = \tilde{0}\}| \geq |W_1| - |W_{n-1}| - 1;$$

если $\mu_{\leq}(\tilde{0}, \tilde{1}) \neq 0$, то

$$|\{a \mid a \in W_1, \mu_{\leq}(a, \tilde{1}) = 0\}| \geq |W_1| - |W_{n-1}|.$$

Следствие 7. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда $|\text{bot}_k| \leq |\text{top}_{n-k}|$ для $k \in \{0, \dots, n\}$. В частности, $|W_1| \leq |W_{n-1}|$.

Следствие 8 ([12]). Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная геометрическая решетка ранга n . Тогда $|W_k| = |W_{n-k}|$ для $k \in \{0, \dots, n\}$.

Доказательство. Рассматривая двойственную решетку, получаем, что $|\text{bot}_k| = |\text{top}_{n-k}|$ для $k \in \{0, \dots, n\}$. Отсюда следует нужное утверждение.

4.2. Пример

Пусть F — поле характеристики, не равной p , H — конечная группа порядка p^n , p — простое число, $n \in \mathbb{N}$, $(L, \leq)$ — решетка подгрупп группы H , $\bar{R}$ — отношение пересечения в решетке $(L, \leq)$. Известно, [13, с. 231], что $(L, \leq)$ — полумодулярная снизу решетка ранга n . Докажем, что для решетки $(L, \leq)$

$$\mu_{\leq}(\tilde{0}, \tilde{1}) = \begin{cases} (-1)^n p^{\binom{n}{2}}, & \text{если } H \text{ — элементарная абелева группа,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Пусть H не является элементарной абелевой группой. По теореме Бернсайда о базисе [14] группа H/D есть элементарная абелева группа, где D — пересечение всех максимальных подгрупп группы H . Поэтому $D \neq \emptyset$ и по теореме Холла [6, с. 201] $\mu_{\leq}(\bar{0}, \bar{1}) = 0$. Иным способом (14) доказано в [15].

Поэтому $L_F(\bar{R})$ есть множество всех элементарных абелевых подгрупп группы H . Теоремы 9, 3, 5 можно интерпретировать как теоремы о свойствах элементарных абелевых подгрупп группы H .

Из теоремы 9 (двойственная форма) следует, что для $k \in \{0, \dots, n\}$

$$|L_F(\bar{R}) \cap \text{top}_{n-k}| \leq |L_F(\bar{R}) \cap \text{bot}_k|.$$

Поэтому справедливы следующие утверждения.

Для $k \in \{0, \dots, n\}$ число всех элементарных абелевых подгрупп группы H ранга, не превосходящего k , не меньше числа всех элементарных абелевых подгрупп группы H ранга, не меньшего $n - k$.

Если H не является элементарной абелевой группой, то число подгрупп ранга $n - 1$ группы H , не являющихся элементарными абелевыми группами, не менее $|W_{n-1}| - |W_1| - 1$.

4.3. Нулевые значения функции Мебиуса отношения накрытия в полумодулярных решетках

Теорема 10. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k \in \{0, \dots, n\}$, S — отношение накрытия на L , S несингулярно над F . Если $|\text{bot}_k| = |\text{top}_{n-k}|$, то $\mu_S(a, b) = 0$ для всех $a, b \in L$ таких, что $\rho(a) \geq n - k$, $\rho(b) > k$.

Доказательство. Перенумеруем элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ по рангу. Если $\rho(a) \leq k$, $\rho(b) < n - k$, то из полумодулярного неравенства для ранга следует, что

$$\rho(a \vee b) \leq \rho(a) + \rho(b) - \rho(a \wedge b) < n,$$

то есть $(a, b) \notin S$. Поэтому матричное представление ζ_S есть блочная матрица

$$m(\zeta_S, L, L) = \begin{pmatrix} 0 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где m_2 — квадратная матрица порядка $r = |\text{bot}_k|$, m_3 — квадратная матрица порядка $|L| - r$. Обращая блочную матрицу (15), находим [10, с. 52–59], что

$$m(\mu_S, L, L) = \begin{pmatrix} -m_3^{-1} m_4 m_2^{-1} & m_3^{-1} \\ m_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует нужное утверждение.

Следствие 9. Пусть $(L, \leq)$ — конечная модулярная геометрическая решетка ранга n . Тогда $\mu_s(a, b) = 0$ для всех $k \in \{0, \dots, n\}$ и всех $a, b \in L$ таких, что $\rho(a) \geq n - k$, $\rho(b) > k$.

Следствие 10 ([11, 16]). Пусть $(L, \leq)$ — конечная геометрическая решетка ранга n . Следующие утверждения равносильны:

$(L, \leq)$ — модулярная решетка;

$|\text{bot}_k| = |\text{top}_{n-k}|$ для $k \in \{1, \dots, n-1\}$;

$|\text{bot}_k| = |\text{top}_{n-k}|$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n-1\}$;

$|W_1| = |W_{n-1}|$;

$|W_k| = |W_{n-k}|$ для $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что из третьего утверждения следует первое. Если $|\text{bot}_k| = |\text{top}_{n-k}|$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n-1\}$, то из леммы 1 (двойственное утверждение) и теоремы 10 следует, что для $a, b \in L$ таких, что $\rho(a) = n-k$, $\rho(b) = k+1$,

$$\mu_s(a, b) = \sum_{z \in L, z \leq a \wedge b} \mu_{\leq}(z, a) \mu_{\leq}(z, b) / \mu_{\leq}(z, \bar{1}) = 0.$$

Если $a \wedge b = \bar{0}$, то $\mu_{\leq}(\bar{0}, a) \mu_{\leq}(\bar{0}, b) / \mu_{\leq}(\bar{0}, \bar{1}) = 0$. Получили противоречие. Поэтому $a \wedge b > \bar{0}$ для $a, b \in L$ таких, что $\rho(a) = n-k$, $\rho(b) = k+1$. Из леммы 2 статьи [11] следует, что $(L, \leq)$ — модулярная решетка.

4.4. Сингулярность отношения дополнения

Пусть $(L, \leq)$ — конечная решетка, $d_0, d_1 \in \text{bin}_F(L)$ и для $a, b \in L$

$$d_0(a, b) = e(a, b) \mu_{\leq}(\bar{0}, b), \quad d_1(a, b) = e(a, b) \mu_{\leq}(a, \bar{1}).$$

Лемма 8. Пусть функция $\bar{f} \in \text{bin}_F(L)$ определена равенством

$$\bar{f} = \zeta_{\leq} * d_1 * \zeta_{\geq} * d_0 * \zeta_{\leq}.$$

Если $\bar{f}(a, b) \neq 0$, то $a \leq b$.

Доказательство. Из теоремы 3 (двойственное утверждение) следует, что

$$\bar{f}(a, b) = (\zeta_S * d_0 * \zeta_{\leq})(a, b) = \sum_{z \in L, a \vee z = \bar{1}, z \leq b} \mu_{\leq}(\bar{0}, z).$$

Если $a \vee b \neq \bar{1}$, то $\bar{f}(a, b) = 0$. Аналогично доказывается, что если $a \wedge b \neq \bar{0}$, то $\bar{f}(a, b) = 0$.

Следствие 11 ([17]). Если $\mu_{\leq}(\bar{0}, a) \mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$, то существует биекция $\varphi: L \rightarrow L$ такая, что $a \leq \varphi(a)$ для $a \in L$.

Доказательство. Матрица $m(\bar{f}, L, L)$ обратима. Ненулевой член в разложении $\det m(\bar{f}, L, L)$ дает нужную биекцию.

Теорема 11. Пусть $(L, \leq)$ — конечная решетка, такая, что ${}^\perp a = \emptyset$ или ${}^\perp a$ есть $\leq$ -антицепь для $a \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}\zeta_C * d_0 &= \zeta_{\leq} * d_1 * \zeta_{\geq} * d_0 * \zeta_{\leq}, \\ d_1 * \zeta_C &= \zeta_{\leq} * d_1 * \zeta_{\geq} * d_0 * \zeta_{\leq}.\end{aligned}$$

Если $\mu_{\leq}(\bar{0}, a)\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$, то C несингулярно на L над F ,

$$\mu_C = d_0 * \mu_{\leq} * d_0^{-1} * \mu_{\geq} * d_1^{-1} * \mu_{\leq} = \mu_{\leq} * d_0^{-1} * \mu_{\geq} * d_1^{-1} * \mu_{\leq} * d_1.$$

Если $\mu_{\leq}(\bar{0}, a)\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$, то

$$\det m(\zeta_C, L, L) = \prod_{z \in L} \mu_{\leq}(\bar{0}, z) = \prod_{z \in L} \mu_{\leq}(z, \bar{1}).$$

Доказательство. Для $a \in C$, $\bar{f}(a, b) = \mu_{\leq}(\bar{0}, b)$. Отсюда следует, что $\bar{f} = \zeta_C * d_0$.

Из теоремы 11 следует, что в конечных модулярных геометрических решетках $(L, \leq)$ отношение C несингулярно на L над $F(0)$.

В теореме 12 приведены некоторые признаки несингулярности C на L над F .

Теорема 12. Пусть $(L, \leq)$ — конечная градуированная решетка ранга n , C несингулярно на L над F . Тогда

- если $(L, \leq)$ — полумодулярная решетка, то $|\text{bot}_k| \leq |\text{top}_{n-k}|$ для $k \in \{0, \dots, n\}$, в частности, $|W_1| \leq |W_{n-1}|$;
- если $(L, \leq)$ — модулярная решетка, то $|W_k| = |W_{n-k}|$ для $k \in \{0, \dots, n\}$.

Теорема 13 (обращение Мебиуса для отношения дополнения). Пусть $(L, \leq)$ — конечная решетка такая, что ${}^\perp a = \emptyset$ или ${}^\perp a$ есть $\leq$ -антицепь для $a \in L$; $\mu_{\leq}(\bar{0}, a)\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$; $f, g: L \rightarrow F$. Если для $a \in L$

$$g(a) = \sum_{z \in L, zCa} f(z),$$

то для $a \in L$

$$\begin{aligned}f(a) &= \sum_{z_1, z_2, z_3 \in L} g(z_1)\mu_{\leq}(\bar{0}, z_1) \frac{\mu_{\leq}(z_1, z_2)\mu_{\leq}(z_3, z_2)\mu_{\leq}(z_3, a)}{\mu_{\leq}(\bar{0}, z_2)\mu_{\leq}(z_3, \bar{1})} \\ &= \sum_{z_1, z_2, z_3 \in L} g(z_1)\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \frac{\mu_{\leq}(z_1, z_2)\mu_{\leq}(z_3, z_2)\mu_{\leq}(z_3, a)}{\mu_{\leq}(\bar{0}, z_2)\mu_{\leq}(z_3, \bar{1})},\end{aligned}$$

и наоборот.

5. Ранги некоторых комбинаторных матриц

5.1. Ранги некоторых подматриц матрицы отношения накрытия

Лемма 9. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rank}_F m(\zeta_S, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k}) &= |\text{bot}_k|; \\ \text{rank}_F m(\zeta_S, \text{bot}_k - \{\bar{0}\}, \text{top}_{n-k} - \{\bar{1}\}) &= |\text{bot}_k| - 1; \\ \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_{n-k}) &= |W_k|. \end{aligned}$$

Доказательство. Перенумеруем элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ по рангу. Из полумодулярного неравенства для ранга следует, что матричное представление ζ_S есть блочная матрица

$$m(\zeta_S, L, L) = \begin{pmatrix} 0 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix},$$

где $m_2 = m(\zeta_S, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k})$.

Следствие 12. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $k + l \leq n$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l) = |W_k|.$$

Доказательство. Из полумодулярного неравенства для ранга следует, что

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l) = \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_{n-k}) = |W_k|.$$

Следствие 13. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда существует инъекция $\varphi: \text{bot}_k - \{\bar{0}\} \rightarrow \text{top}_{n-k} - \{\bar{1}\}$ такая, что $z \vee \varphi(z) = \bar{1}$ для $z \in \text{bot}_k - \{\bar{0}\}$.

Теорема 14. Пусть $(L, \leq)$ — конечная модулярная геометрическая решетка ранга n , $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, W_{n-k}) = \text{rank}_F m(\zeta_C, W_k, W_{n-k}) = |W_k|. \quad (16)$$

Доказательство. Перенумеруем элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ по рангу. Из модулярного равенства для ранга следует, что матричное представление ζ_S есть блочная матрица

$$m(\zeta_S, L, L) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{0n} \\ 0 & \dots & m_{1n-1} & m_{1n} \\ & \dots & & \\ m_{n0} & \dots & m_{nn-1} & m_{nn} \end{pmatrix},$$

где $m_{ij} = m(\zeta_S, W_i, W_j)$ для $i + j \geq n$. Матрицы m_{in-i} есть квадратные матрицы для $i \in \{0, \dots, n\}$. Строки и столбцы m_{0n} линейно независимы. Отсюда следует, что $m(\zeta_S, L, L)$ строчечно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{0n} \\ 0 & \dots & m_{1n-1} & 0 \\ & \dots & & \\ m_{n0} & \dots & m_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому строки и столбцы m_{1n-1} линейно независимы, и т. д.

Так как $m(\zeta_C, W_k, W_{n-k}) = m(\zeta_S, W_k, W_{n-k})$, теорема доказана.

В частности, (16) выполнено для модулярных геометрических решеток $(L, \leq)$ над $F(0)$.

Следствие 14. Пусть $(L, \leq)$ — конечная модулярная геометрическая решетка ранга n , $k \in \{0, \dots, n\}$. Тогда существует биекция $\varphi: W_k \rightarrow W_{n-k}$ такая, что $a \leq \varphi(a)$ для $a \in W_k$.

Теорема 15. Пусть $(L, \leq)$ — конечная градуированная верхняя полурешетка ранга n , $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$ и для $a \in W_k$, $b \in \text{top}_l$, $a \leq b$, число решений системы

$$x \vee a = \tilde{1}, \quad \rho(x) = l, \quad x \leq b \quad (17)$$

зависит только от $k, l, \rho(b), n$, (т. е. не зависит от конкретного выбора a и b); для $a \in W_k$, $b \in \text{top}_l$, $a \leq b$,

$$h(k, l, \rho(b), n) \neq 0,$$

где $h(k, l, \rho(b), n)$ — число решений системы (17).

Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, W_l) = \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l). \quad (18)$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$m(\zeta_S, W_k, W_l) m(\zeta_{\leq}, W_l, \text{top}_l) = m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l) e(a, b) h(k, l, \rho(b), n)_{a, b \in \text{top}_l}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, W_l) &\leq \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l) \\ &= \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, W_l) m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) \\ &\leq \text{rank}_F m(\zeta_S, W_k, W_l). \end{aligned}$$

Следствие 15. Для решеток $\text{Bul}(n)$, $\text{Lin}(n, q)$ при $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $n \leq k + l$, справедливо равенство

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k, W_l) = \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l).$$

5.2. Ранги подматриц матрицы отношения $\leq$

Лемма 10. Пусть $(L, \leq)$ — конечная градуированная решетка ранга n , $l \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0$ для $a \in L$, $P \subseteq L$. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, P, \text{top}_l) = \text{rank}_F m(\zeta_S, P, \text{top}_l). \quad (19)$$

Доказательство. Из леммы 1 (двойственная форма) следует, что

$$\zeta_{\leq} = \zeta_S * \mu_{\geq} * d_1^{-1},$$

где $d_1(a, b) = e(a, b)\mu_{\leq}(b, \tilde{1})$ для $a, b \in L$. Поэтому для $a \in P$, $b \in \text{top}_l$

$$m(\zeta_{\leq}, P, \text{top}_l) = m(\zeta_S, P, \text{top}_l)m(f, \text{top}_l, \text{top}_l), \quad (20)$$

где $f(a, b) = \mu_{\geq}(a, b)/\mu_{\leq}(b, \tilde{1})$ для $a, b \in \text{top}_l$. Из (20) следует (19).

Теорема 16. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0$ для $a \in L$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k}) &= |\text{bot}_k|, \\ \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_{n-k}) &= |W_k|. \end{aligned}$$

Если

$$\sum_{z \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\tilde{0}, z) \neq 0, \quad (21)$$

то для $k \neq 0, n$

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k - \{\tilde{0}\}, \text{top}_{n-k} - \{\tilde{1}\}) = |\text{bot}_k| - 1, \quad (22)$$

и для $k \neq n$

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_{n-k} - \{\tilde{1}\}) = |W_k|.$$

Если $k + l \leq n$, $k \leq l$, то

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) = |W_k|.$$

Доказательство. Первые два равенства следуют из леммы 10 и леммы 9.

Докажем (22). Перенумеруем элементы $L = \{a_1, \dots, a_{|L|}\}$ по рангу. Тогда в первой строке и последнем столбце $m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k})$ расположены единицы. Выделяя первую строку, запишем $m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k})$ как блочную матрицу

$$m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & m' & \end{pmatrix},$$

где $m' = m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k - \{\tilde{0}\}, \text{top}_{n-k})$. Ясно, что $\text{rank}_F m' = |\text{bot}_k| - 1$, все элементы последнего столбца m' равны 1. Пусть $a \in \text{bot}_k - \{\tilde{0}\}$. По формуле Уэйснера

$$\sum_{y \in L, a \vee y = \tilde{1}} \mu_{\leq}(\tilde{0}, y) = e(\tilde{0}, a)\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) = 0.$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z \in \text{top}_{n-k} - \{\bar{1}\}} \zeta_{\leq}(a, z) \mu_{\leq}(z, \bar{1}) \sum_{y \in \text{top}_{n-k}, y \leq z} \mu_{\leq}(\bar{0}, y) \\
 &= \sum_{y \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, y) \sum_{a \vee y \leq z < \bar{1}} \mu_{\leq}(z, \bar{1}) = \sum_{y \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, y) (e(a \vee y, \bar{1}) - 1) \\
 &= \sum_{a \vee y = \bar{1}} \mu_{\leq}(\bar{0}, y) - \sum_{y \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, y) = - \sum_{y \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, y).
 \end{aligned}$$

Поэтому последний столбец m' есть линейная комбинация других столбцов m' . Отсюда следует (22).

Покажем, что (21) выполнено для геометрических решеток $(L, \leq)$ над $F(0)$. Определим оператор $I: L \rightarrow L$,

$$I(z) = \begin{cases} \bar{1}, & \text{если } \rho(z) \geq n - k, \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оператор I есть оператор $\leq$ -замыкания. Частично упорядоченное множество $(I(L), I(\leq))$ есть решетка, для функции Мебиуса которой

$$\mu_{I(\leq)}(\bar{0}, \bar{1}) = \sum_{z \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, z).$$

Так как решетка $(I(L), I(\leq))$ геометрическая, $\mu_{I(\leq)}(\bar{0}, \bar{1}) \neq 0$ над $F(0)$.

Поэтому (21) справедливо для геометрических решеток $(L, \leq)$ над $F(0)$.

Следствие 16. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда существует инъекция $\varphi: \text{bot}_k \rightarrow \text{top}_{n-k}$ такая, что $z \leq \varphi(z)$ для $z \in \text{bot}_k$.

Если

$$\sum_{z \in \text{top}_{n-k}} \mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0,$$

то существует инъекция $\varphi: \text{bot}_k - \{\bar{0}\} \rightarrow \text{top}_{n-k} - \{\bar{1}\}$ такая, что $z \leq \varphi(z)$ для $z \in \text{bot}_k - \{\bar{0}\}$.

Для геометрических решеток $(L, \leq)$ следствие 16 доказано в [11].

Следствие 17. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга $n > 1$, $\mu_{\leq}(a, \bar{1}) \neq 0$ для $a \in L$ и

$$\sum_{z \in \text{top}_{n-1}} \mu_{\leq}(\bar{0}, z) \neq 0.$$

Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_1, W_{n-1}) = |W_1|; \quad (23)$$

существует инъекция $\varphi: W_1 \rightarrow W_{n-1}$ такая, что $z \leq \varphi(z)$ для $z \in W_1$.

Для геометрических решеток $(L, \leq)$ следствие 17 доказано Грини [16, 6, с. 497]. Равенство (23) обобщает хорошо известный геометрический факт: ранг матрицы инцидентности на S всех точек и всех e -подпространств конечного d -мерного проективного или аффинного пространства равен числу точек геометрии, где $1 \leq e \leq d - 1$ [18, с. 20].

Теорема 17. Пусть $(P, \leq)$ — конечное градуированное частично упорядоченное множество ранга n , $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, и для $a \in W_k$, $b \in \text{top}_l$, $a \leq b$, число решений системы

$$a \leq z \leq b, \quad \rho(z) = l, \quad (24)$$

зависит только от $k, l, \rho(b), n$, (т.е. не зависит от конкретного выбора a и b); для $a \in W_k$, $b \in \text{top}_l$, $a \leq b$,

$$g(k, l, \rho(b), n) \neq 0,$$

где $g(k, l, \rho(b), n)$ — число решений системы (24).

Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) = \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l). \quad (25)$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) m(\zeta_{\leq}, W_l, \text{top}_l) = m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) (e(a, b) g(k, l, \rho(b), n))_{a, b \in \text{top}_l}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) &\leq \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) \\ &= \text{rank}_F (m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l)) \\ &\leq \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l). \end{aligned}$$

Отсюда следует (25).

Теорема 17 справедлива для решеток $\text{Bul}(n)$ и $\text{Lin}(n, q)$ при $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, над $F(0)$, для $\text{Aff}(n, q)$ при $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, над $F(0)$, для эйлеровой решетки $(L, \leq)$ ранга n , для которой $(L - \{\bar{1}\}, \leq)$ есть симплициальное частично упорядоченное множество, в частности, для решетки граней триангуляции Δ сферы с присоединенным элементом $\bar{1}$ [7, с. 202].

Следствие 18. Для решеток $\text{Bul}(n)$, $\text{Lin}(n, q)$, $\text{Aff}(n, q)$ при $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $k + l \leq n$,

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) = |W_k|. \quad (26)$$

Доказательство. Из теорем 16, 17 следует, что

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) = \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) = |W_k|.$$

Впервые, иным способом, следствие 18 доказано Кантором [19]. Равенство (26) вызывает большой интерес. Доказательства (26) для $\text{Bul}(n)$ имеются в [20–22].

Следствие 19. Для решеток $\text{Bul}(n)$ и $\text{Lin}(n, q)$ при $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $n \leq k + l$

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k, W_l) = |W_l|.$$

Доказательство. Последовательно применяя следствие 14, лемму 10, теорему 17 и следствие 18, получаем, что

$$\begin{aligned} \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k, W_l) &= \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k, \text{top}_l) \\ &= \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l) \\ &= \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) = |W_l|. \end{aligned}$$

5.3. Ранги некоторых подматриц матрицы отношения $\not\leq$

Теорема 18. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0$ для $a \in L$. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\not\leq}, \text{bot}_k - \{\tilde{0}\}, \text{top}_{n-k} - \{\tilde{1}\}) = |\text{bot}_k| - 1. \quad (27)$$

Доказательство. Перенумеруем элементы $\text{bot}_k \cup \text{top}_{n-k} = \{a_1, \dots, a_t\}$ по рангу. Выделяя в $m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k})$ первую строку и последний столбец, запишем ее как блочную матрицу

$$m(\zeta_{\leq}, \text{bot}_k, \text{top}_{n-k}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & m' & & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Производя элементарные преобразования над этой матрицей, получим (27).

Следствие 20. Пусть $(L, \leq)$ — конечная полумодулярная решетка ранга n , $\mu_{\leq}(a, \tilde{1}) \neq 0$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда существует инъекция $\varphi: \text{bot}_k - \{\tilde{0}\} \rightarrow \text{top}_{n-k} - \{\tilde{1}\}$ такая, что $z \not\leq \varphi(z)$ для $z \in \text{bot}_k - \{\tilde{0}\}$.

При $k = 1$ для геометрических решеток $(L, \leq)$ над $F(0)$, следствие 20 доказано Грини [16, 6, с. 497].

Следствие 21. Пусть $(L, \leq)$ — конечная геометрическая решетка ранга n , $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{\not\leq}, W_1, W_k) = |W_1|.$$

Существует инъекция $\varphi: W_1 \rightarrow W_k$ такая, что $z \not\leq \varphi(z)$ для $z \in W_1$.

Из следствия 19 следует следствие 21.

Следствие 22. Для решеток $\text{Bul}(n)$ и $\text{Lin}(n, q)$ при $0 < k \leq l < n$, $n \leq k + l$, существует инъекция $\varphi: W_l \rightarrow W_k$ такая, что $\varphi(z) \not\leq z$ для $z \in W_l$.

5.4. Ранговое свойство, ранг матрицы отношения $<$

Пусть $(P, \leq)$ — конечное градуированное частично упорядоченное множество ранга n .

Теорема 19. Пусть $(P, \leq)$ — конечное градуированное частично упорядоченное множество ранга n , $k \in \{0, \dots, n-1\}$, и для $a \in W_k$, $b \in \text{top}_{k+1}$, $a \leq b$, число решений системы

$$a \leq z \leq b, \quad \rho(z) = k+1, \quad (28)$$

зависит только от $k, \rho(b), n$ (т. е. не зависит от конкретного выбора a и b); для всех $a \in W_k$, $b \in \text{top}_{k+1}$, $a \leq b$,

$$g(k, \rho(b), n) \neq 0,$$

где $g(k, \rho(b), n)$ — число решений системы (28).

Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_<, P, P) = \text{rank}_F m(\zeta_<, P, P). \quad (29)$$

Доказательство. Из теоремы 20 следует, что

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, W_{k+1}) = \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_{k+1}). \quad (30)$$

Перенумеруем элементы $P = \{a_1, \dots, a_{|P|}\}$ по рангу. Матрица $m(\zeta_<, P, P)$ есть блочная матрица

$$m(\zeta_<, P, P) = \begin{pmatrix} 0 & m_{01} & m_{02} & \dots & m_{0n} \\ 0 & 0 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $m_{ij} = m(\zeta_{\leq}, W_i, W_j)$. С помощью элементарных преобразований столбцов матрицы $m(\zeta_<, P, P)$, учитывая (30), получаем $m(\zeta_<, P, P)$.

Равенство (29) справедливо для $\text{Bul}(n)$, $\text{Lin}(n, q)$, $\text{Aff}(n, q)$ над $F(0)$.

Будем говорить, что частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ обладает ранговым свойством над полем F , если

$$\text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_i, W_{i+1}) = \min\{|W_i|, |W_{i+1}|\}$$

для $i \in \{0, \dots, n-1\}$ (см. [23], с. 156). Если $(P, \leq)$ обладает ранговым свойством, то $(P, \leq)$ обладает паросочетательным свойством.

Лемма 11. Пусть частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ обладает унимодальным свойством и ранговым свойством над полем F . Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_<, P, P) = |P| - |W_m|,$$

где $|W_m| = \max\{|W_0|, \dots, |W_n|\}$.

Следствие 23. Пусть U — конечное множество, $|U| = n$. Тогда в $\text{Bul}(n)$

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{<}, 2^U, 2^U) = 2^n - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Следствие 24. Пусть U — n -мерное векторное пространство над $\text{GF}(q)$. Тогда в $\text{Lin}(U)$

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_{<}, \text{lin}(U), \text{lin}(U)) = \text{gal}(n, q) - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}_q.$$

5.5. Ранги некоторых комбинаторных матриц, определенных булеаном

Пусть $q = p^s$, где p — простое число, $s \in \mathbb{N}$. Пусть U — конечное множество, $|U| = n$. Для $k \in \{0, \dots, n\}$ обозначим

$$W_k(n) = W_k(\text{Bul}(U)), \quad \text{top}_k(n) = \text{top}_k(\text{Bul}(U)).$$

Лемма 12. Пусть $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$. Тогда

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) = \text{rank}_F m(\zeta_{\leq}, W_k(n), \text{top}_l(n)) = \min \left\{ \binom{n}{k}, \binom{n}{l} \right\}.$$

Доказательство. Докажем индукцией по n , что для $n \leq k + l$

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) \geq \binom{n}{l}. \quad (31)$$

Рассмотрим случай $k \leq l$, $n < k + l$. Пусть $a_n \in U$. Перенумеруем элементы $W_k(n) \cup \text{top}_l(n)$ следующим образом: сначала перенумеруем по рангу множества, не содержащие a_n , затем перенумеруем по рангу множества, содержащие a_n . При такой нумерации $m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n))$ есть блочная матрица

$$m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) = \begin{pmatrix} 0 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где

$$m_2 = (\zeta_S(a, b))_{a \in W_k, b \in \text{top}_l, a_n \notin a, a_n \in b},$$

$$m_3 = (\zeta_S(a, b))_{a \in W_k, b \in \text{top}_l, a_n \in a, a_n \notin b},$$

$$m_4 = (\zeta_S(a, b))_{a \in W_k, b \in \text{top}_l, a_n \in a, a_n \in b}.$$

Для булеана $\text{Bul}(U - \{a_n\})$

$$m_2 = m(\zeta_S, W_k(n-1), \text{top}_{l-1}(n-1)),$$

$$m_3 = m(\zeta_S, W_{k-1}(n-1), \text{top}_l(n-1)),$$

$$m_4 = m(\zeta_S, W_{k-1}(n-1), \text{top}_{l-1}(n-1)).$$

По индуктивному предположению

$$\text{rank}_F m_2 \geq \binom{n-1}{l-1}, \quad \text{rank}_F m_3 \geq \binom{n-1}{l}, \quad \text{rank}_F m_4 \geq \binom{n-1}{l-1}.$$

Рассмотрим линейно независимые столбцы m_3 и m_2 . Соответствующие столбцы $m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n))$ будут линейно независимыми. Поэтому

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) \geq \binom{n-1}{l} + \binom{n-1}{l-1} = \binom{n}{l}.$$

Неравенство (31) доказано.

Ясно, что

$$\text{rank}_F m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) \leq \text{rank}_{F(0)} m(\zeta_S, W_k(n), \text{top}_l(n)) = \binom{n}{l}.$$

Аналогично (см. [22]) доказывается теорема 20.

Теорема 20. Пусть $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $n \leq k + l$. Тогда

$$\text{rank}_{\text{GF}(q)} m(\zeta_S, W_k, W_l) = \sum_{j \in P_n(n-k, l)} \left(\binom{n}{j} - \binom{n}{j+1} \right), \quad (33)$$

где

$$P_n(k, l) = \left\{ j \mid j \in \mathbb{N}, j \leq n, p \nmid \binom{j-k}{l-k} \right\}.$$

Следствие 25. Пусть $k, l \in \{0, \dots, n\}$, $k \leq l$, $n \leq k + l$. Тогда

$$\text{rank}_{\text{GF}(q)} m(\zeta_{\leq}, W_k, W_l) = \sum_{j \in P_n(k, l)} \left(\binom{n}{j} - \binom{n}{j+1} \right). \quad (34)$$

Равенство (34) впервые доказано Вильсоном (доказательство не опубликовано). Линиэл и Ротшильд [24] доказали (34) для $q = 2$. Франкл [22] доказал (34), определив конструктивно базис пространства векторов столбцов матрицы $m(\zeta_{\leq}, W_k, \text{top}_l)$ для простых q .

Из следствия 25 выводится справедливость теоремы 21.

Теорема 21. Справедливо равенство

$$\text{rank}_{\text{GF}(q)} m(\zeta_{\leq}, 2^U, 2^U) = 2^n \left(1 - \frac{1}{q} \sum_{j=0}^p \left(\cos \frac{\pi j}{p} \right)^{n+\varepsilon(n)} \right),$$

где $\varepsilon(n) = 0$ для четных n , $\varepsilon(n) = 1$ для нечетных n .

5.6. Ранги некоторых подматриц матрицы отношения R

Пусть $F = \mathbb{C}$, $(L, \leq)$ — конечная нижняя полурешетка ранга n , $l \in \{0, \dots, n\}$. Будем считать, что $(L, \leq)$ определяет схему отношений $(W_l, \{T_0, \dots, T_l\})$ и алгебру Боуза-Меснера [25].

Теорема 22. Пусть сужение $\bar{R}$ на W_l несингулярно над $\mathbb{C}$ и не является единичным отношением. Тогда

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_R, W_l, W_l) = |W_l|. \quad (35)$$

Доказательство. Ясно, что

$$m(\zeta_R, W_l, W_l) = m(\zeta_{T_l}, W_l, W_l) = \sum_{j=0}^l p_l(j) E_j,$$

где $E_0, \dots, E_l$ — базис из ортогональных идемпотентов алгебры Боуза-Меснера. Так как матрица $m(\zeta_R, W_l, W_l)$ обратима, $p_l(j) \neq 0$ для $j \in \{0, \dots, l\}$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} m(\zeta_R, W_l, W_l) &= J - m(\zeta_R, W_l, W_l) = |W_l| E_0 - \sum_{j=0}^l p_l(j) E_j \\ &= (|W_l| - p_l(0)) E_0 - \sum_{j=1}^l p_l(j) E_j, \end{aligned}$$

где все элементы матрицы J равны 1. Так как T_l не является единичным отношением на W_l , то $p_0 < |W_l|$. Поэтому $m(\zeta_R, W_l, W_l)$ обратима над $\mathbb{C}$.

Из следствия 19 (двойственная форма) и теоремы 22 следует справедливость следствия 26.

Следствие 26. Для решеток $\text{Bul}(n)$ и $\text{Lin}(n, q)$ для $l \leq n/2$

$$\text{rank}_{F(0)} m(\zeta_R, W_l, W_l) = |W_l|.$$

Автор выражает глубокую признательность К. А. Рыбникову за поддержку и внимание к работе.

Список литературы

1. Finch P. D. On the Möbius-function of a non-singular binary relation. *Bull. Austral. Math. Soc.* (1970) 3, 155–162.
2. Стечкин Б. С. Бинарные функции на упорядоченных множествах (теоремы обращения). *Труды МИАН СССР* (1977) 143, 178–186.
3. Стечкин Б. С. *Об основаниях действительной Мебиус-теории*. Препринт ин-та физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, Красноярск, 1979.

4. Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* (1964) 2, 340–368.
5. Doubilet P., Rota G.-C., Stanley R. On the foundations of combinatorial theory VI: The idea of generating function. In: *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab., v. II, Probab. Theory*. Univ. California Press, Berkeley, pp. 267–318.
6. Айгнер М. *Комбинаторная теория*. Мир, Москва, 1982.
7. Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. Мир, Москва, 1990.
8. Doubilet P. On the foundations of combinatorial theory VII: Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy. *Studies Appl. Math.* (1972) 51, №4, 377–396.
9. Grapo H. H. The Möbius function of a lattice. *J. Combin. Theory* (1966) 1, 126–131.
10. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1988.
11. Dowling T., Wilson R.H. Whitney number inequalities for geometric lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1975) 47, 504–512.
12. Dilworth R. P. Proof of a conjecture on finite modular lattices. *Ann. Math.* (1954) 60, 359–364.
13. Бирхгоф Г. *Теория решеток*. Наука, Москва, 1984.
14. Холл М. *Теория групп*. ИЛ, Москва, 1962.
15. Шокуев В. *Гауссовы коэффициенты*. Кабардино-Балкарский ун-т, Нальчик, 1988.
16. Greene C. A rank inequality for finite geometric lattices. *J. Comb. Theory* (1970) 9, 357–364.
17. Dowling T. Complementing permutations in finite lattices. *J. Comb. Theory, Ser. B* (1977) 23, 223–226.
18. Dembowski P. *Finite Geometries*. Springer, Berlin, 1968.
19. Kantor W. M. On incidence matrices of finite projective and affine spaces. *Math. Z.* (1972) 124, 315–318.
20. Graver J. E., Jurkat W. B. The module structure of integral designs. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1973) 15, 75–90.
21. Wilson R. M. The necessary conditions for t -designs are sufficient for something. *Utilitas Math.* (1973) 4, 207–215.
22. Frankl P. Intersection theorems and mod p rank of inclusion matrices. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1990) 54, 85–94.
23. Stanley R. P. Some aspects of group acting on finite posets. *J. Comb. Theory, Ser. A* (1982) 32, 132–161.
24. Linial N., Rotschild B. L. Incidence matrices of subsets—a rank formula. *SIAM J. Alg. Discrete Math.* (1981) 2, 333–340.
25. Бавнаи Э., Ито Т. *Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений*. Мир, Москва, 1987.
26. Erdős P., Herzog M., Schönheim J. An extremal problem on the set of noncoprime divisors of a number. *Israel J. Math.* (1970) 8, 408–412.
27. Marica P. Orthogonal families of sets. *Canad. Math. Bull.* (1971) 14, 573–576.

Статья поступила 20.12.95.