Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Предельные распределения числа деревьев заданного объема в случайном лесе, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 31–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:55:20

Предельные распределения числа деревьев заданного объема в случайном лесе

© 1996 г. Ю. Л. Павлов

Рассматриваются случайные леса с достаточно общими ограничениями на классы деревьев. Для таких лесов, состоящих из N корневых деревьев и содержащих n некорневых вершин, при $N, n \rightarrow \infty$ получены предельные распределения числа деревьев заданного объема. Частными случаями доказанных теорем являются полученные ранее результаты о лесах с помеченными вершинами, а также соответствующие результаты для лесов, составленных из плоских деревьев с висячими корнями и для лесов с ограничениями на кратности вершин.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-00036-а.

В работе [1] были получены предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе, состоящем из N корневых деревьев и содержащем n некорневых вершин, занумерованных числами от 1 до n , при этом корни имеют номера от 1 до N . Ряд других характеристик таких лесов изучался также в статьях [2–4]. Идеи доказательства результатов этих работ опираются на предложенные В. Ф. Колчиным (см., например, [5, 6]) вероятностные методы, связанные с использованием обобщенной схемы размещения и условных ветвящихся процессов. Эти же идеи использовались и в работе [7] при рассмотрении лесов с занумерованными вершинами при некоторых ограничениях на кратности вершин. В статьях [8, 9] установлена связь между лесами, составленными из плоских деревьев с висячими корнями и ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона с геометрическим распределением числа прямых потомков одной частицы.

Сходство методов получения названных результатов, а также сходство предельных распределений для основных характеристик случайных лесов различных типов позволяет предположить возможность получения общих результатов для достаточно широкого класса лесов. В настоящей статье такие результаты приводятся для числа деревьев заданного объема.

Опишем сначала класс объектов, который будет рассматриваться ниже. В статье В. А. Ватутина [10] при рассмотрении начинающегося с одной частицы процесса Гальтона-Ватсона в качестве пространства элементарных событий взято множество историй семейств и установлено соответствие между этим

множеством и двумя типами случайных корневых деревьев (деревья с занумерованными вершинами и плоские деревья с висячими корнями). Для изучения случайных лесов естественно использовать рассуждения, приведенные в [10], распространив их на процессы, начинающиеся с нескольких частиц. Ввиду очевидности такого обобщения мы лишь кратко укажем на возникающие при нескольких начальных частицах особенности, отсылая читателя за подробностями к статье [10].

Мы будем рассматривать процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся в момент времени $t = 0$ с N частиц, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. В момент времени $t = 1$ эти частицы погибают, одновременно порождая потомство, причем частица с номером 1 порождает $m_{(1)}$ потомков первого поколения, частица с номером 2 порождает $m_{(2)}$ потомков, а последняя частица нулевого поколения порождает $m_{(N)}$ потомков первого поколения. Частицы первого поколения, являющиеся потомками частицы с номером 1, обозначаются парами $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, m_{(1)})$ некоторым произвольным, но фиксированным образом. Потомки частицы с номером 2 помечаются символами $(2, 1), (2, 2), \dots, (2, m_{(2)})$. Аналогично помечаются и все остальные частицы первого поколения. Эти частицы живут до момента $t = 2$ и рожают частицы второго поколения и т.д. Если частица, обозначенная символом $(i, i_1, \dots, i_r)$ имеет $m_{(ii_1 \dots i_r)}$ потомков, то эти потомки помечаются символами $(i, i_1, \dots, i_r, 1), (i, i_1, \dots, i_r, 2), \dots, (i, i_1, \dots, i_r, m_{(ii_1 \dots i_r)})$. По аналогии с [10] можно дать следующее определение.

Определение. Историей N семейств w_N называется набор вида

$$w_N = (m_{(1)}, \dots, m_{(N)}; m_{(11)}, m_{(12)}, \dots, m_{(1m_{(1)})}, m_{(21)}, m_{(22)}, \dots, m_{(2m_{(2)})}, \dots, m_{(N1)}, m_{(N2)}, \dots, m_{(Nm_{(N)})}; m_{(111)}, \dots),$$

в котором величина $m_{(ii_1 \dots i_r)}$ равна числу непосредственных потомков частицы, занумерованной символом $(i, i_1, \dots, i_r)$.

С каждой историей N семейств w_N свяжем лес $G = G(w_N)$, состоящий из N корневых деревьев, дуги которых ориентированы от корней, а вершины помечены аналогично нумерации частиц рассматриваемого процесса Гальтона–Ватсона. Для $N = 1$ такая связь установлена в [10], а для $N > 1$, как легко видеть, эти рассуждения применимы с небольшими очевидными изменениями. Пусть теперь $\Omega_G = \{w_N\}$ — пространство элементарных событий и зададим на нем вероятностную меру при помощи производящей функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad (1)$$

где p_k — вероятность того, что произвольная частица процесса Гальтона–Ватсона породила ровно k потомков. В частности, если некоторая история N семейств w_N содержит $N + n$ частиц и среди них ровно m_r частиц имеют r потомков, $r = 0, 1, \dots, n$, то, обозначая $\mathbf{P}\{w_N\}$ вероятность элементарного события w_N , получим

$$\mathbf{P}\{w_N\} = p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n},$$

где $m_0 + m_1 + \dots + m_n = N + n$ и $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$. В дальнейшем мы будем отождествлять частицы с соответствующими им наборами $(i, i_1, i_2, \dots)$, истории N семейств — с соответствующими лесами, а построенное вероятностное пространство будем обозначать $(\Omega_G, \mathfrak{A}_G, \mathbf{P})$, где $\mathfrak{A}_G$ — σ -алгебра подмножеств Ω_G .

Рассмотрим леса, составленные из N плоских деревьев с висячими корнями. Следуя [11], будем называть вершины, смежные с корнями, главными узлами таких деревьев. Пусть $\Gamma_{N,n} = \{G_{N,n}\}$ — множество всех лесов, соответствующих рассмотренным выше процессам Гальтона–Ватсона, в каждом из которых содержится N начальных частиц, а общее число частиц равно $N + n$. Обозначим $\mathcal{F}'_{N,n}$ множество всех лесов, состоящих из N плоских деревьев с висячим корнем и содержащих n вершин, не являющихся корнями и главными узлами, то есть общее число вершин в таких лесах равно $2N + n$. В [10] показано, что при $N = 1$ между элементами множеств $\Gamma_{N,n}$ и $\mathcal{F}'_{N,n}$ существует взаимно однозначное соответствие. Очевидно, что такое соответствие существует и при $N > 1$, причем корням леса из $\Gamma_{N,n}$ соответствуют главные узлы леса из $\mathcal{F}'_{N,n}$. Такое соответствие обозначим $\delta: \Gamma_{N,n} \leftrightarrow \mathcal{F}'_{N,n}$. Если лесу $F'_{N,n} \in \mathcal{F}'_{N,n}$ соответствует лес $G_{N,n} \in \Gamma_{N,n}$, то будем писать $F'_{N,n} = \delta(G_{N,n})$. Пусть

$$\Omega_\delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{F'_{N,n} \in \mathcal{F}'_{N,n}\},$$

а $\mathfrak{A}_\delta$ — множество подмножеств Ω_δ . Вероятностная мера $\mathbf{P}$, заданная на $\mathfrak{A}_G$ с помощью (1), порождает меру $\mathbf{P}_\delta$ на $\mathfrak{A}_\delta$: $\mathbf{P}_\delta\{F'_{N,n}\} = \mathbf{P}\{\delta^{-1}(F'_{N,n})\}$. В частности, если $\nu = \nu(G)$ — число частиц в лесу G , а ν_δ — число некорневых вершин в лесу $F'_{N,n} = \delta(G_{N,n})$, то $\mathbf{P}_\delta\{\nu_\delta = N + n\} = \mathbf{P}\{\nu = N + n\}$. Зафиксируем некоторый лес $G_{N,n}$ из $\Gamma_{N,n}$ и пусть $G_{N,n}$ имеет m_r частиц, давших ровно r прямых потомков, $r = 0, 1, \dots, n$. В [10] показано, что

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid G \in \Gamma_{N,n}\} = \frac{p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}}{\mathbf{P}\{\nu = N + n\}}. \quad (2)$$

Если число потомков одной частицы имеет геометрическое распределение с некоторым параметром α , $0 < \alpha < 1$, то есть

$$p_k = \alpha^k(1 - \alpha), \quad k = 0, 1, \dots,$$

то

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n}\} = \alpha^n(1 - \alpha)^{N+n}.$$

Эта вероятность не зависит от выбора конкретного леса $G_{N,n}$ и, следовательно, такой процесс при помощи соответствия δ порождает равномерное распределение на $\mathcal{F}'_{N,n}$. Поэтому из (2) и теоремы 1 работы [8] следует, что

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\} = \left(\frac{N}{N + n} \binom{2n - N - 1}{n} \right)^{-1}.$$

Заметим, что последнее равенство может быть записано так:

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\} = \frac{|\delta(G_{N,n})|}{L(\delta(\Gamma_{N,n}))}, \quad (3)$$

где $|\delta(G_{N,n})| = 1$ — число лесов из $\mathcal{F}'_{N,n}$, соответствующих $G_{N,n}$ при отображении δ , а $L(\delta(\Gamma_{N,n}))$ — число образов всех лесов из $\Gamma_{N,n}$.

Рассмотрим теперь леса, состоящие из N корневых деревьев (корни занумерованы) с n занумерованными некорневыми вершинами и пусть $\mathcal{F}''_{N,n} = \{F''_{N,n}\}$ — множество всех таких различных лесов. В [10] установлено соответствие между $\Gamma_{N,n}$ и $\mathcal{F}''_{N,n}$ при $N = 1$. Ясно, что подобное соответствие можно установить и для $N > 1$ и рассматривать отображение $\Delta: \Gamma_{N,n} \rightarrow \mathcal{F}''_{N,n}$. Здесь, в отличие от предыдущего случая, каждому лесу из $\Gamma_{N,n}$ ставится в соответствие не один лес из $\mathcal{F}''_{N,n}$, а целый класс лесов. Обозначим $\Delta(G_{N,n})$ множество всех лесов из $\mathcal{F}''_{N,n}$, соответствующих $G_{N,n}$. Пусть

$$\Omega_{\Delta} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{G_{N,n}} \Delta(G_{N,n}),$$

а $\mathcal{A}_{\Delta}$ — множество подмножеств Ω_{Δ} . Как и выше, вероятностная мера $\mathbf{P}$ порождает меру $\mathbf{P}_{\Delta}$ на $\mathcal{A}_{\Delta}$ такую, что $\mathbf{P}_{\Delta}\{\Delta(G_{N,n})\} = \mathbf{P}\{G_{N,n}\}$. Пусть $\Delta(G) \in \Omega_{\Delta}$ и обозначим ν_{Δ} число вершин у элементов множества $\Delta(G)$.

Полагая

$$p_k = \alpha^k e^{-\alpha} / k!, \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и, учитывая, что $\mathcal{F}''_{N,n}$ состоит из $N(N+n)^{n-1}$ различных лесов, из (2) нетрудно получить (см. [1, 10]), что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid G \in \Gamma_{N,n}\} &= \frac{\mathbf{P}_{\Delta}\{\Delta(G) = \Delta(G_{N,n})\}}{\mathbf{P}_{\Delta}\{\nu_{\Delta} = N+n\}} \\ &= \frac{n!}{(\prod_{r=0}^n (r!)^{m_r}) N(N+n)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует по аналогии с (3), что

$$\mathbf{P}\{G = G_{N,n} \mid \nu = N+n\} = \frac{|\Delta(G_{N,n})|}{L(\Delta(\Gamma_{N,n}))}, \quad (4)$$

где $|\Delta(G_{N,n})|$ — число лесов из $\mathcal{F}''_{N,n}$, соответствующих $G_{N,n}$ при отображении Δ , а $L(\Delta(\Gamma_{N,n}))$ — общее число лесов в $\mathcal{F}''_{N,n}$.

Можно рассмотреть леса, состоящие из плоских деревьев с висячими корнями и с ограничениями на кратности вершин. Пусть R — множество целых неотрицательных чисел, содержащее 0 и не совпадающее с множеством $\{0, 1\}$. Предположим, что кратности вершин в рассматриваемых лесах могут принимать значения только из R , под кратностью вершины будем понимать число выходящих из этой вершины дуг, если дуги ориентированы от корней. Обозначим $\mathcal{F}'_{N,n}(R)$ множество таких лесов, содержащих N деревьев и n некорневых вершин. Ясно, что взаимно однозначное соответствие $\delta: \Gamma_{N,n} \leftrightarrow \mathcal{F}'_{N,n}(R)$ имеет место при $p_k = 0$ для всех $k \notin R$. Пусть число потомков одной частицы имеет распределение

$$p_k = \frac{\alpha^k (1-\alpha)}{P(R, \alpha)}, \quad k \in R, \quad (5)$$

где $0 < \alpha < 1$,

$$P(R, \alpha) = (1 - \alpha) \sum_{k \in R} \alpha^k.$$

Понятно, что в этом случае

$$P\{G = G_{N,n}\} = \alpha^n (1 - \alpha^{N+n}) P^{-(N+n)}(R, \alpha)$$

и, следовательно, распределение на $\mathcal{F}'_{N,n}(R)$, порождаемое соответствием δ , является равномерным. Отсюда видно, что и для $\mathcal{F}'_{N,n}(R)$ справедливо соотношение, аналогичное (3). Заметим еще частный случай порождения равномерного распределения на $\mathcal{F}'_{N,n}(R)$ при $R = \{0, 2\}$, возникающий при $p_0 = p_2 = 1/2$. Такое распределение не может быть задано соотношениями (5).

Аналогично можно рассмотреть множество $\mathcal{F}''_{N,n}(R)$, состоящее из лесов с занумерованными N корневыми и n некорневыми вершинами, кратности которых принимают значения только из множества R . Пользуясь результатами работ [10, 12], легко доказать, что и для $\mathcal{F}''_{N,n}(R)$ справедливо соотношение вида (4).

Теперь мы можем описать классы лесов, которые будут рассматриваться далее. Пусть $\mathcal{F}_{N,n}$ — множество лесов, состоящих из N корневых деревьев (корни занумерованы) с n некорневыми вершинами, помеченными некоторым способом, то есть $\mathcal{F}_{N,n} \subseteq \mathcal{F}''_{N,n}$. Легко видеть (см. [10]), что множества $\mathcal{F}'_{N,n}$, $\mathcal{F}''_{N,n}$, $\mathcal{F}'_{N,n}(R)$, $\mathcal{F}''_{N,n}(R)$ можно рассматривать как примеры множества $\mathcal{F}_{N,n}$. Множество $\mathcal{F}''_{N,n}$ состоит, как мы видели выше, из непересекающихся классов вида $\Delta(G_{N,n})$. Обозначим $\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$ классы лесов, образованных из $\Delta(G_{N,n})$ путем удаления лесов, не принадлежащих $\mathcal{F}_{N,n}$, и вместо отображения $\Delta: \Gamma_{N,n} \rightarrow \mathcal{F}''_{N,n}$ будем рассматривать отображение $\Delta_{\mathcal{F}}: \Gamma_{N,n} \rightarrow \mathcal{F}_{N,n}$. Если

$$\Omega_{\Delta_{\mathcal{F}}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{G_{N,n}} \Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$$

и $\mathfrak{A}_{\Delta_{\mathcal{F}}}$ — множество подмножеств $\Omega_{\Delta_{\mathcal{F}}}$, то, как и раньше, мера P индуцирует на $\mathfrak{A}_{\Delta_{\mathcal{F}}}$ меру $P_{\Delta_{\mathcal{F}}}$ такую, что $P_{\Delta_{\mathcal{F}}}(\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})) = P\{G_{N,n}\}$. Пусть $\Delta_{\mathcal{F}}(G) \in \Omega_{\Delta_{\mathcal{F}}}$. В дальнейшем мы будем изучать такие множества лесов $\mathcal{F}_{N,n}$, для которых выполняется соотношение

$$P\{G = G_{N,n} \mid \nu = N + n\} = \frac{P_{\Delta_{\mathcal{F}}}(\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n}))}{P\{\nu_{\Delta_{\mathcal{F}}} = N + n\}} = \frac{|\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})|}{L(\Delta_{\mathcal{F}}(\Gamma_{N,n}))}, \quad (6)$$

где, как и выше, $\nu_{\Delta_{\mathcal{F}}}$ — число вершин у элементов множества $\Delta_{\mathcal{F}}(G)$, $|\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})|$ — число лесов в множестве $\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$, а $L(\Delta_{\mathcal{F}}(\Gamma_{N,n}))$ — общее число лесов в $\mathcal{F}_{N,n}$. Ясно, что равенства (3) и (4) являются частными случаями соотношения (6).

Пусть $\tau = \tau(G_{N,n})$ — некоторая числовая характеристика лесов из $\Gamma_{N,n}$. Выберем случайно и равновероятно лес $F_{N,n}$ из множества $\mathcal{F}_{N,n}$. Существует лес $G_{N,n} \in \Gamma_{N,n}$ такой, что $F_{N,n} \in \Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$. Положим

$$\tau_{\Delta} = \tau_{\Delta}(F_{N,n}) = \tau(G_{N,n}).$$

Таким образом, случайная величина τ_{Δ} принимает одно и то же значение на всех элементах класса $\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$. Примерами таких случайных величин могут служить высота леса, максимальный объем дерева в лесе, число вершин заданной кратности.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\tau_{\Delta} = x\} = \mathbf{P}\{\tau = x \mid \nu = N + n\}.$$

Доказательство. Пусть $\chi(A)$ — индикатор события A . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_{\Delta} = x\} &= (L(\Delta_{\mathcal{F}}(\Gamma_{N,n})))^{-1} \sum_{G_{N,n} \in \Gamma_{N,n}} \sum_{F_{N,n} \in \Delta(G_{N,n})} \chi(\tau_{\Delta} = x) \\ &= (L(\Delta_{\mathcal{F}}(\Gamma_{N,n})))^{-1} \sum_{G_{N,n} \in \Gamma_{N,n}} |\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})| \chi(\tau = x). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6) следует утверждение леммы.

Пусть $\nu_i(F)$ означает объем дерева леса из $\Delta_{\mathcal{F}}(G_{N,n})$, корень которого имеет номер i , $1 \leq i \leq N$, то есть общее число частиц, существовавших в дереве с i -й начальной частицей леса $G_{N,n}$. Обозначим $\mu_r(N, n)$, $r = 0, 1, \dots, n$, случайные величины, равные числу деревьев объема r леса из $\mathcal{F}_{N,n}$.

Для изучения предельного поведения $\mu_r(N, n)$ рассмотрим вспомогательную величину ξ , имеющую дискретное распределение, задаваемое производящей функцией (1), то есть

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что распределение (7) имеет максимальный шаг d , а множество значений ξ , имеющих ненулевую вероятность, содержит 0 и не совпадает с $\{0, 1\}$. Кроме того, будем считать, что $\mathbf{M}\xi = 1$, $\mathbf{D}\xi = B$ и $F'''(1) < \infty$. Следуя [6], назовем допустимыми такие $\lambda > 0$, для которых определены $F(\lambda)$. Для допустимых λ рассмотрим начинающийся с N частиц ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, определяющий лес $G = G(\lambda)$, в котором число прямых потомков одной частицы имеет распределение

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Введенный ветвящийся процесс естественным образом распадается на N процессов $G^{(1)}, \dots, G^{(N)}$, каждый из которых начинается с одной частицы. Обозначим $\nu_1(G), \dots, \nu_N(G)$ общее число частиц, существовавших соответственно в процессах $G^{(1)}, \dots, G^{(N)}$, а $\nu(G) = \nu_1(G) + \dots + \nu_N(G)$ — общее число частиц, существовавших в процессе G за все время его эволюции. Из леммы 1 следует, что

$$\mathbf{P}\{\nu_1(F) = k_1, \dots, \nu_N(F) = k_N\} = \mathbf{P}\{\nu_1(G) = k_1, \dots, \nu_N(G) = k_N \mid \nu(G) = N + n\} \quad (9)$$

Обозначим $\nu_i^{(r)}(G)$, $r = 0, 1, \dots$, независимые случайные величины, распределение которых задается следующими вероятностями:

$$\mathbf{P}\{\nu_i^{(r)}(G) = k\} = \mathbf{P}\{\nu_i(G) = k \mid \nu_i(G) \neq r\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Обозначим также $\zeta_N^{(r)} = \nu_1^{(r)}(G) + \dots + \nu_N^{(r)}(G)$, $q_r(\lambda) = \mathbf{P}\{\nu_1(G) = r\}$. Аналогично доказательству леммы 2.1 книги [6], из (8), (9) и (10) нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Для любого допустимого λ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r(N, n) = k\} = \binom{N}{k} q_r^k(\lambda) (1 - q_r(\lambda))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu(G) = N + n\}}. \quad (11)$$

Лемма 2 будет использована далее для доказательства основных результатов статьи, сформулированных ниже в виде теорем 1–4.

Обозначим j наименьшее натуральное число, такое, что $p_j > 0$ и пусть s — наименьшее натуральное число, не кратное j и такое, что $p_{j+s} > 0$; если такого s не существует, положим $s = 0$.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, $N\lambda^{j+s} \rightarrow \infty$, где параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением

$$m = \frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (12)$$

Тогда при $r \geq 3$ и $r \neq j + 1$ для целых неотрицательных k

$$\mathbf{P}\{\mu_r(N, n) = k\} = \frac{1}{k!} (Nq_r(\lambda))^k e^{-Nq_r(\lambda)} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Nq_r(\lambda))/\sqrt{Nq_r(\lambda)}$ в любом конечном интервале.

Пусть $\varphi(u)$ означает характеристическую функцию случайной величины $\nu_1(G)$, $F_\lambda(z)$ — производящую функцию распределения (8) и B_λ — дисперсию этого распределения. Ясно, что при $\lambda = 1$ справедливы равенства $F_\lambda(z) = F(z)$, $B_\lambda = B$. Если $\lambda = \lambda(N, n)$ удовлетворяет соотношению (12), то, как нетрудно проверить, $\lambda < 1$. Для таких λ обозначим $a = \mathbf{M}\nu_1(G)$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\nu_1(G)$.

Согласно лемме 2.4.1 из [6], справедливой, как легко убедиться, и при $\lambda < 1$, выполняется равенство

$$\varphi(u) = e^{iu} F_\lambda(\varphi(u)). \quad (13)$$

Используя (13), нетрудно установить, что

$$a = 1/(1 - m), \quad \sigma^2 = B_\lambda/(1 - m)^3. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$\sigma_{rr}^2 = q_r(\lambda) \left(1 - q_r(\lambda) - \frac{(a - r)^2}{\sigma^2} q_r(\lambda) \right).$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \geq C > 0$, а параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определен соотношением (12). Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Nq_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r(N, n) = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

При $n^2/N \rightarrow \infty$ величины $q_r(\lambda)$ и σ_{rr}^2 можно заменить соответственно на $q_r(1)$ и $q_r(1)(1 - q_r(1))$.

Обозначим l наименьшее натуральное число такое, что $p_{j+l} > 0$, если такого l нет, то положим $l = 0$. Таким образом, l отличается от s тем, что может быть кратным j .

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определен соотношением (12), $Nq_r(\lambda) \rightarrow \infty$, $N\lambda^{w(r)} \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} w(1) &= 2j + s; \\ w(2) &= 3 && \text{при } j = 1; \\ w(2) &= \max(2j, j + s) && \text{при } j > 1; \\ w(r) &= j + s && \text{при } r \geq 3, r \neq j + 1; \\ w(j + 1) &= \max\{\min(2j, j + l), j + s\}. \end{aligned}$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 2.

Теорема 4. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$, $N\lambda^j \rightarrow \infty$, где параметр $\lambda = \lambda(N, n)$ определен соотношением (12). Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k - Nq_r(\lambda))/\sqrt{Nq_r(\lambda)}$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r(N, n) = k\} = \frac{1}{k!} (Nq_r(\lambda))^k e^{-Nq_r(\lambda)} (1 + o(1)).$$

При $n/N^2 \geq C > 0$ величины $q_r(\lambda)$ можно заменить на $q_r(1)$.

Далее, в леммах 3–12, мы рассмотрим поведение отдельных вероятностей, стоящих в правой части соотношения (11), а затем с помощью леммы 2 докажем теоремы 1–4. В леммах 3–6 получены предельные распределения случайной величины $\nu(G)$, а леммы 7–12 предназначены для описания асимптотического поведения $\zeta_{N-k}^{(r)}$. Доказательства всех этих лемм требуют проведения весьма громоздких выкладок, особенно при изучении $\zeta_{N-k}^{(r)}$. Поскольку получение предельных распределений $\zeta_{N-k}^{(r)}$ проводится по той же схеме, что и доказательство лемм для $\nu(G)$, отличаясь лишь техническими деталями, в настоящей статье подробные доказательства приводятся только для лемм 3–6.

Пусть $\varphi_N(u)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $(\nu(G) - Na)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow 0$, $N\lambda^j \rightarrow \infty$, где $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12). Тогда равномерно по u в любом конечном интервале

$$\varphi_N(u) \rightarrow e^{-u^2/2}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\varphi_N(u) = \exp\left\{-\frac{iNau}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

получаем, что

$$\ln \varphi_N(u) = -\frac{iNau}{\sigma\sqrt{N}} + N \ln \varphi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (15)$$

При достаточно малых u справедливо разложение

$$\begin{aligned} \ln \varphi(u) &= u \left(\frac{\partial \ln \varphi(u)}{\partial u} \right)_{u=0} + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(u)}{\partial u^2} \right)_{u=0} + \frac{u^3}{3!} Q(u) \\ &= iua - \frac{u^2 \sigma^2}{2} + \frac{u^3}{6} Q(u), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$|Q(u)| \leq 2 \max_{|\tau| \leq |u|} |(\ln \varphi(\tau))'''|. \quad (17)$$

Используя (12) и (14), нетрудно получить, что при $n/N \geq C_1 > 0$ справедливо неравенство $\sigma^2 \geq C_2 > 0$. Если же $n/N \rightarrow 0$, то $\sigma^2 \geq C_2 \lambda^j$, поэтому при выполнении условий леммы $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$. Отсюда и из (15), (16) следует, что при достаточно больших N , n и любом фиксированном u справедливо соотношение

$$\ln \varphi_N(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (18)$$

Из (17) следует, что

$$\left| \frac{u^3}{6\sigma\sqrt{N}} Q\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right) \right| \leq \frac{|u|^3}{3} Q_1(u), \quad (19)$$

где

$$Q_1(u) = \max_{|\tau| \leq |u|/(\sigma\sqrt{N})} |(\ln \varphi(\tau))'''| / (\sigma^3\sqrt{N}). \quad (20)$$

Используя (13), нетрудно выразить производную $(\ln \varphi(u))'''_u$ через функцию $F_\lambda(z)$ и ее производные и убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$|(\ln \varphi(u))'''_u| = \begin{cases} O((n/N)^5) & \text{при } n/N^2 \rightarrow 0, n/N \rightarrow \infty; \\ O(1) & \text{при } 0 < C_3 \leq n/N \leq C_4 < \infty; \\ O(\lambda^j) & \text{при } n/N \rightarrow 0, N\lambda^j \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (21)$$

Оценивая σ^3 с помощью (12) и (14), из (19), (20) и (21) получаем, что второе слагаемое в правой части равенства (18) стремиться к нулю, что и доказывает лемму 3.

Лемма 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow 0$, $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12), $N\lambda^{j+s} \rightarrow \infty$. Тогда для целых неотрицательных h , кратных d , равномерно относительно $(N(1-a) + h)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu(G) = N + h\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\{-(N(1-a) + h)^2/2\sigma^2 N\}.$$

Доказательство. Будем следовать обычной схеме доказательства локальных предельных теорем (см., например, теорему 1.4.2 книги [6]). Представим вероятность $\mathbf{P}\{\nu(G) = N + h\}$ в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\nu(G) = N + h\} = \frac{d}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}}^{d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izu} \varphi_N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{N}}\right) du, \quad (22)$$

где $z = (N(1 - a) + h)/(\sigma\sqrt{N})$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izu - u^2/2} du,$$

разность

$$R = 2\pi \left(d^{-1}\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\nu(G) = N + h\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} \right)$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A^A e^{-izu} \left(\varphi_N(u/(\sigma\sqrt{N})) - e^{-u^2/2} \right) du, \\ I_2 &= \int_{A < |u| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izu} \varphi_N(u/(\sigma\sqrt{N})) du, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |u| \leq d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izu} \varphi_N(u/(\sigma\sqrt{N})) du, \\ I_4 &= - \int_{A < |u|} e^{-izu - u^2/2} du, \end{aligned} \quad (23)$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Лемма будет доказана, если мы покажем, что выбором достаточно больших N, n разность R можно сделать сколь угодно малой. Для этого оценим интегралы $I_1, \dots, I_4$.

При выполнении условий леммы 4 справедлива лемма 3, поэтому, как нетрудно видеть, $I_1 \rightarrow 0$. Далее,

$$|I_4| \leq \int_{A < |u|} e^{-u^2/2} du, \quad (24)$$

следовательно, I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Теперь нам нужно оценить интегралы I_2 и I_3 . Ниже мы рассмотрим эти интегралы в наиболее простом случае, а именно, когда $N, n \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, а затем укажем на особенности оценки I_2 и I_3 в других случаях.

Из (17) и полученного с помощью (13) выражения для $(\ln \varphi(u))'''_u$ нетрудно установить, что при достаточно малом u выполняется неравенство $|Q(u)| \leq C_3$; здесь и далее символами $C_3, C_4, \dots$ обозначены некоторые положительные постоянные. Используя (14), отсюда получаем, что $\sigma^3 \leq C_4$, поэтому последнее

слагаемое в (18) стремится к нулю. Отсюда следует, что при $|u| < \varepsilon \sigma \sqrt{N}$ и достаточно малом ε

$$|\varphi_N(u)| \leq e^{-C_5 u^2} \quad (25)$$

и из (23) получаем оценку, подобную (24):

$$|I_2| \leq \int_{A < |u|} e^{-C_5 u^2} du.$$

Оценим интеграл I_3 . При $\varepsilon < |u| \leq \pi/d$ справедливо неравенство

$$|\varphi(u)| \leq e^{-C_6}, \quad (26)$$

поскольку максимальный шаг распределения случайной величины $\nu_1(G)$ равен d , характеристическая функция $\varphi(u)$ непрерывно зависит от λ и, как видно из (12), $0 < C_7 \leq \lambda \leq C_8 < 1$. Из (23) и (26) получаем, учитывая (14) и (15), что

$$|I_3| \leq 2\pi d^{-1} \sigma \sqrt{N} e^{-C_6 N} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Таким образом, лемма доказана для случая $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Далее мы рассмотрим поведение I_2 и I_3 для других случаев, для чего разобьем дальнейшее доказательство на четыре пункта.

1. Оценка интеграла I_3 при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, $n/N^2 \rightarrow 0$. Как и выше, легко показать, что в этом случае справедливо неравенство (26). Отсюда получаем соотношение, аналогичное (27):

$$|I_3| \leq C_{10} N^2 e^{-C_6 N} \rightarrow 0.$$

2. Оценка интеграла I_3 при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$. Если $p_1 > 0$, то, используя явный вид $\varphi(u)$, нетрудно получить оценку $|\varphi(u)| \leq \exp\{-C_{11} n/N\}$ и, следовательно (см. (15)),

$$|I_3| \leq C_{12} \sqrt{n} e^{-C_n} \rightarrow 0.$$

Если $p_1 = 0$, $p_j > 0$, $l = 0$, то, опять используя явный вид $\varphi(u)$, можно проверить, что

$$|\varphi(u)| \leq \exp\{-C_{13} \lambda^j (1 - \cos uj)\}, \quad (28)$$

и, учитывая, что $\varepsilon < |u| \leq \pi/d$ и справедливы неравенства $\varepsilon j \leq |uj| = |ud| \leq \pi$, получаем оценку $|\varphi(u)| \leq \exp\{-C_{14} \lambda^j\}$ и, следовательно,

$$|I_3| \leq \sigma \sqrt{N} e^{-C_{14} \lambda^j N} \leq C_{15} \sqrt{\lambda^j N} e^{-C_{14} \lambda^j N} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Пусть, наконец, $p_1 = 0$, $p_j > 0$, $l \neq 0$. Тогда

$$|\varphi(u)| \leq \exp\{-C_{16} \lambda^j (1 - \cos uj) - C_{17} \lambda^{j+l} (1 - \cos(u(j+l)))\}. \quad (30)$$

Предположим сначала, что $p_{j+v} > 0$ только для натуральных v , кратных j , то есть $s = 0$. Тогда $j = d$, $|uj| \leq \pi$ и мы получаем оценки, аналогичные случаю $l = 0$. Пусть $p_{j+s} > 0$. Разобьем интеграл I_3 на сумму двух интегралов $I'_3 + I''_3$, где области интегрирования I'_3 и I''_3 определяются следующим

образом. Предположим, что $j = 2dk$ для некоторого натурального k . Тогда область интегрирования I_3'' составлена из совокупности интервалов вида $[2j^{-1}i(\pi - \varepsilon)\sigma\sqrt{N}, 2j^{-1}i(\pi + \varepsilon)\sigma\sqrt{N}]$, $i = \pm 1, \dots, \pm L$, где L — наибольшее натуральное число такое, что $2j^{-1}L(\pi - \varepsilon) < \pi/d$, а область интегрирования I_3' дополняет перечисленные интервалы до $[\varepsilon\sigma\sqrt{N}, d^{-1}\pi\sigma\sqrt{N}]$. Если же $j = d(2k + 1)$, то области интегрирования I_3' и I_3'' составляются аналогично, только правые границы областей интегрирования I_3' и I_3'' равны соответственно $\pi\sigma\sqrt{N}/d$ и $2j^{-1}\sigma\sqrt{N}L(\pi - \varepsilon)$, очевидным образом меняются и левые границы.

В области интегрирования I_3' , как нетрудно видеть, справедлива оценка (28) с общей для всех интервалов константой C_{13} . Следовательно, для I_3' выполняется соотношение, аналогичное (29).

Оценим теперь I_3'' . Рассмотрим сначала часть этого интеграла $I_3''(1)$, соответствующую первому интервалу положительной области изменения аргумента, то есть

$$I_3''(1) = \int_{2j^{-1}(\pi - \varepsilon)\sigma\sqrt{N}}^{2j^{-1}(\pi + \varepsilon)\sigma\sqrt{N}} e^{-izu} \varphi_N(u/(\sigma\sqrt{N})) du.$$

Легко видеть, что

$$|I_3''(1)| \leq C_{18}\sigma\sqrt{N} \int_{-2\varepsilon/j}^{2\varepsilon/j} |\varphi(y + a\pi j^{-1})| dy. \quad (31)$$

Разлагая $1 - \cos uj$ в ряд в окрестности точки $u = 2\pi/j$, получим, что при $u \rightarrow 2\pi/j$ справедливо соотношение $1 - \cos uj = j(u - 2\pi/j)^2 + O((u - 2\pi/j)^3)$, откуда следует, что при достаточно малом ε и достаточно больших N, n

$$\exp\{-C_{16}\lambda^j(1 - \cos uj)\} \leq \exp\{-C_{19}\lambda^j(u - 2\pi/j)^2\}.$$

Отсюда и из (30) получаем, что

$$|\varphi(u)| \leq \exp\{-C_{20}\lambda^{j+s} - C_{19}\lambda^j(u - 2\pi/j)^2\},$$

поэтому из (31) следует, что

$$\begin{aligned} |I_3''(1)| &\leq C_{21}\sigma\sqrt{N}e^{-C_{22}\lambda^{j+s}N} \int_{-2\varepsilon/j}^{2\varepsilon/j} \exp\{-C_{23}\lambda^jNy^2\} \\ &\leq C_{24}\sqrt{\lambda^jN}e^{-C_{22}\lambda^{j+s}N} \int_{-2\varepsilon/j}^{2\varepsilon/j} \exp\{-C_{23}(y\sqrt{\lambda^jN})^2\} \\ &\leq C_{25}e^{-C_{22}\lambda^{j+s}N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C_{26}y^2} du. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогичные оценки можно получить и для других частей интеграла I_3'' . Поскольку L — конечное число и $\lambda^{j+s}N \rightarrow \infty$, из (32) следует, что $I_3'' \rightarrow 0$.

3. Оценка интеграла I_2 при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$. Легко видеть, что в этом случае остается справедливой оценка (25) и поэтому I_2 оценивается так же, как и выше.

4. Оценка интеграла I_2 при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty, n/N^2 \rightarrow 0$. Представим I_2 в виде суммы двух интегралов: $I_2 = I_2' + I_2''$, областями интегрирования которых являются множества $\{u: A < |u| \leq \varepsilon_1 N/\sqrt{n}\}$, $\{u: \varepsilon_1 N/\sqrt{n} < |u| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}$,

положительная постоянная ε_1 будет выбрана ниже. Оценим сначала I'_2 . Используя (15), (19) и (20) нетрудно получить, что при достаточно малом ε_1 в области интегрирования I'_2 справедлива оценка (25) и, следовательно, $|I'_2|$ можно сделать сколь угодно малым выбором A . Оценим, наконец, I''_2 . Из (14) нетрудно получить, аналогично лемме 2.4.4 книги [6], что при $u \rightarrow 0$

$$\varphi(u) = 1 - \sqrt{-2iu/B_\lambda}(1 + o(1)). \quad (33)$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε

$$|\varphi(u/(\sigma\sqrt{N}))| \leq \exp \left\{ -C_{27} \sqrt{|u|/(\sigma\sqrt{N})} \right\},$$

поэтому из (15) получаем, что

$$|I''_2| \leq 2 \int_{\varepsilon_1 N/\sqrt{n}}^{\infty} \exp\{-C_{27} \sqrt{|u|}(N^2/n)^{3/4}\} du \rightarrow 0,$$

что и завершает доказательство леммы 4.

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty$, $z = (N+h)BN^{-2}$, где h — натуральное число, кратное d , $\lambda = 1$. Тогда равномерно относительно z , $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$

$$B^{-1}N^2\mathbf{P}\{B\nu(G)/N^2 = z\} = d(2\pi)^{-1/2}z^{-3/2}e^{-1/2z}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Поскольку характеристическая функция случайной величины $\nu(G)$ равна $\varphi^N(u)$, из (33) получаем, что при любом фиксированном u

$$\varphi^N(uB/N^2) \rightarrow \exp \left\{ -\sqrt{|u|}(1 - iu/|u|) \right\}, \quad (34)$$

а последнее выражение является характеристической функцией устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$. Поскольку максимальный шаг распределения $\nu(G)$ равен d , отсюда следует, что для этой случайной величины справедлива локальная предельная теорема о сходимости к этому закону (см., например, теорему 4.2.1 из [13]). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $N \rightarrow \infty$, $z = B(N+h)/N^2 \rightarrow \infty$, где h — натуральное число, кратное d , $\lambda = 1$. Тогда

$$B^{-1}N^2\mathbf{P}\{B\nu(G)/N^2 = z\} = d(2\pi)^{-1/2}z^{-3/2}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1.3 из [6]

$$\mathbf{P}\{\nu(G) = N+h\} = \frac{N}{N+h} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N+h} = h\},$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_{N+h}$ имеют распределение (8). Отсюда и из теоремы 1.4.2 [6] с помощью леммы 2.1.4 [6] нетрудно получить, что при $i \rightarrow \infty$ (i — натуральные)

$$\mathbf{P}\{\nu_1(G) = id+1\} = \frac{d(1+o(1))}{(id+1)^{3/2}\sqrt{2\pi B}} \exp \left\{ -\frac{1}{2B(id+1)} \right\}.$$

Поскольку последнее выражение есть $O(i^{-3/2})$, из (34) следует, что для $\nu(G)$ выполнены условия теоремы 3 работы [14], из которой и следует справедливость утверждения леммы 6.

Далее нам нужно рассмотреть предельное поведение суммы $\zeta_{N-k}^{(r)}$, фигурирующей в правой части соотношения (11). Обозначим

$$\varphi^{(r)}(u) = \mathbf{M} \exp\{i u \nu_1^{(r)}(G)\} = \frac{\varphi(u) - q_r(\lambda) e^{i u r}}{1 - q_r(\lambda)}, \quad (35)$$

и, в случае $\lambda < 1$, обозначим также

$$a_r = \mathbf{M} \nu_1^{(r)}(G), \quad \sigma_r^2 = \mathbf{D} \nu_1^{(r)}(G).$$

Нетрудно проверить, что

$$a_r = \frac{a - r q_r(\lambda)}{1 - q_r(\lambda)}, \quad \sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1 - q_r(\lambda))^2} \left(1 - q_r(\lambda) - \frac{(a - r)^2}{\sigma^2} q_r(\lambda) \right). \quad (36)$$

Пусть $\varphi_S^{(r)}(u)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_S^{(r)} - S a_r) / (\sigma_r \sqrt{S})$.

Лемма 7. Пусть $r \geq 3$, $r \neq j + 1$, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow 0$, $N \lambda^j \rightarrow \infty$, где $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12). Тогда при $S = N(1 - q_r(\lambda))(1 + o(1))$ равномерно по u в любом конечном интервале

$$\varphi_S^{(r)}(u) \rightarrow e^{-u^2/2}.$$

Это утверждение остается справедливым при $r = 1, 2$, если $N \lambda^{2j} \rightarrow \infty$, а также при $r = j + 1$, если $N \lambda^w \rightarrow \infty$, где $w = \min(2j, j + 1)$.

Доказательство леммы 7 проводится аналогично доказательству леммы 3, при этом используются соотношения (35) и (36), а появление нового параметра r вызывает усложнение выкладок и дополнительные ограничения на поведение параметров N, n, λ при $r = 1, 2, j + 1$.

Лемма 8. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow 0$, $n/N \geq C > 0$, $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12). Тогда при $S = N(1 - q_r(\lambda))(1 + o(1))$ для целых неотрицательных h , кратных d , равномерно относительно $u_r = (N + h - S a_r) / (\sigma_r \sqrt{S})$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = N + h\} = \frac{d}{\sigma_r \sqrt{2\pi S}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Доказательство леммы 8 проводится с помощью леммы 7 по той же схеме, что и доказательство леммы 4.

Лемма 9. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 0$, $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12), $N\lambda^{w(r)} \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} w(1) &= 2j + s; \\ w(2) &= 3 && \text{при } j = 1; \\ w(2) &= \max(2j, j + s) && \text{при } j > 1; \\ w(r) &= j + s && \text{при } r \geq 3, r \neq j + 1; \\ w(r) &= \max\{w, j + s\} && \text{при } r \geq 3, r = j + 1, \end{aligned}$$

w определено в формулировке леммы 7. Тогда справедливо утверждение леммы 8.

Лемма 9 доказывается так же, как и лемма 8, при этом приходится отдельно рассматривать перечисленные в формулировке леммы 9 варианты значений $w(r)$.

Лемма 10. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N^2 \rightarrow \infty$, $N\lambda^j \rightarrow \infty$, где $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением (12). Тогда при $r \rightarrow \infty$ и $S = N(1 + o(1))$ справедливо утверждение леммы 8.

Доказательство леммы 10 аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 11. Пусть $N \rightarrow \infty$, $S = N(1 - q_r(1))(1 + o(1))$, $z = (N + h)BN^{-2}$, где h — натуральное число, кратное d , $\lambda = 1$. Тогда равномерно относительно z , $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$

$$B^{-1}N^2 \mathbf{P}\{B\zeta_S^{(r)}/N^2 = z\} = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi}} z^{-3/2} e^{-1/2z} (1 + o(1)).$$

Это равенство справедливо и при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\varphi_{S,r}(u)$ обозначает характеристическую функцию величины $B\zeta_S^{(r)}/N^2$. Из (33) и из равенства

$$\varphi_{S,r}(u) = \left(\frac{\varphi(uB/N^2) - q_r(1) \exp\{iurB/N^2\}}{1 - q_r(1)} \right)^S$$

нетрудно получить, что

$$\varphi_{S,r}(u) \rightarrow \exp\{-\sqrt{-2iu}\} = \exp\{-\sqrt{|u|}(1 - iu/|u|)\}$$

равномерно по u в любом конечном интервале. Как и при доказательстве леммы 5, отсюда непосредственно следует утверждение леммы 11 при фиксированном r . Если $r \rightarrow \infty$, то суммы $\zeta_S^{(r)}$ образуют схему серий, однако и в этом случае, как нетрудно проверить, доказательство локальной предельной теоремы сохраняет силу.

Лемма 12. Пусть $N \rightarrow \infty$, $S = N(1 - q_r(1))(1 + o(1))$, $z = B(N + h)N^{-2} \rightarrow \infty$, где h — натуральное число, кратное d , $\lambda = 1$. Тогда

$$B^{-1}N^2P\{B\zeta_S^{(r)}/N^2 = z\} = d(2\pi)^{-1/2}z^{-3/2}(1 + o(1)).$$

Это равенство справедливо и при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 12 при фиксированном r аналогично доказательству леммы 6. Если $r \rightarrow \infty$, то утверждение леммы 12 можно получить, следуя рассуждениям работы [14] (см. также доказательство леммы 4 статьи [3]).

Теперь мы можем доказать теоремы 1–4. Известно (см., например, равенство (2.3.9) из [5]), что если $q_r(\lambda) \rightarrow 0$, то для целых неотрицательных k

$$\binom{N}{k} q_r^k(\lambda)(1 - q_r(\lambda))^{N-k} = \frac{(Nq_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Nq_r(\lambda)}(1 + o(1)) \quad (37)$$

равномерно относительно $(k - Nq_r(\lambda))/\sqrt{Nq_r(\lambda)}$ в любом конечном интервале. Утверждение теоремы 1 нетрудно получить из лемм 2, 4, 8 и равенства (37).

Согласно нормальному приближению для биномиального распределения при $Nq_r(\lambda)(1 - q_r(\lambda)) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} q_r^k(\lambda)(1 - q_r(\lambda))^{N-k} \\ = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Nq_r(\lambda)(1 - q_r(\lambda))}} \exp \left\{ -\frac{(k - Nq_r(\lambda))^2}{2Nq_r(\lambda)(1 - q_r(\lambda))} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

равномерно относительно $(k - Nq_r(\lambda))/\sqrt{Nq_r(\lambda)(1 - q_r(\lambda))}$ в любом конечном интервале. Если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \geq C > 0$, $n/N^2 \rightarrow 0$, то утверждение теоремы 2 можно получить из лемм 2, 4, 8 и соотношения (38). Если $0 < C_1 \leq n/N^2 \leq C_2 < \infty$, то теорема 2 следует из лемм 2, 5, 11 и из (38). Пусть, наконец, $n/N^2 \rightarrow \infty$. Тогда утверждение теоремы 2 получаем с помощью (38) из лемм 2, 6 и 12.

Если выполнены условия теоремы 3, то ее утверждение несложно получить из (38) и лемм 2, 4, 9. Если $n/N^2 \rightarrow \infty$, то теорема 4 следует из (37) и лемм 2, 4, 10. Аналогично теорема 4 доказывается в случаях $0 < C_1 \leq n/N^2 \leq C_2 < \infty$ и $n/N^2 \rightarrow \infty$, для чего достаточно вместо леммы 10 использовать соответственно леммы 11 и 12.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе. *Матем. сб.* (1977) **103**, №3, 392–403.
2. Павлов Ю. Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **32**, №3, 523–533.
3. Павлов Ю. Л. Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе. *Матем. заметки* (1979) **25**, №5, 751–759.
4. Павлов Ю. Л. Предельные распределения высоты случайного леса. *Теория вероятностей и ее применения* (1983) **28**, №3, 449–457.

5. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
6. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
7. Калугин И. Б. Один класс случайных отображений. *Труды Матем. института АН СССР им. В.А.Стеклова* (1986) **177**, 75–104.
8. Земляченко В. Н., Павлов Ю. Л. Леса из плоских посаженных деревьев и ветвящиеся процессы. *Труды Петрозаводского университета, Сер. Прикладная математика и информатика* (1992) **1**, 130–135.
9. Павлов Ю. Л. Предельные распределения высоты случайного леса из плоских корневых деревьев. *Дискретная математика* (1994) **6**, №1, 137–154.
10. Ватутин В. А. Распределение расстояния до корня минимального поддеревя, содержащего все вершины данной высоты. *Теория вероятностей и ее применения* (1993) **38**, №2, 273–287.
11. Пойа Д. Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений. В кн.: *Перечислительные задачи комбинаторного анализа*. Мир, Москва, 1979, с. 36–138.
12. Калугин И. Б. Ветвящиеся процессы и случайные отображения конечных множеств. *Матем. заметки* (1983) **34**, №5, 757–771.
13. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. *Независимые и стационарно связанные величины*. Наука, Москва, 1965.
14. Ткачук С. Г. Локальные предельные теоремы, учитывающие большие отклонения в случае предельных устойчивых законов. *Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем.* (1973) **2**, 30–33.

Статья поступила 20.11.95.