Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Петров, Задачи поиска на графах правильных многогранников, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 108–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:20:47

Задачи поиска на графах правильных многогранников

© 1996 г. Н. Н. Петров

Изучается n -поисковое число графа, определяемое как минимальное число преследователей, обеспечивающих успешное завершение поиска движущегося объекта на связном графе при отсутствии ограничений на скорость (n характеризует необходимую близость к убегающему объекту). Вычислены n -поисковые числа для графов всех правильных многогранников.

1. В статье изучаются некоторые комбинаторные инварианты графов, имеющие простую теоретико-игровую интерпретацию. Под графом далее понимается конечный одномерный CW-комплекс [1, стр. 207]. Пусть Γ — связный граф. Введем на Γ метрику ρ , принимающую целочисленные значения. Для любого $x \in \Gamma$ положим $\rho(x, x) = 0$. Если $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$, то введем в рассмотрение множество $L(x, y)$ путей, соединяющих точки x и y , т. е. непрерывных отображений $l: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ таких, что $l(0) = x$, $l(1) = y$. Для всякого $l \in L(x, y)$ обозначим через $d(l)$ число ребер, имеющих непустое пересечение с $l([0, 1])$. Положим

$$\rho(x, y) = \min\{d(l) : l \in L(x, y)\}.$$

Легко проверяется, что ρ действительно является метрикой на Γ . На графе Γ рассматривается задача поиска группой преследователей $P_1, \dots, P_m$ движущегося объекта, именуемого в дальнейшем убегающим.

Произвольную совокупность Π непрерывных отображений

$$\{x_i: [0, \tau] \rightarrow \Gamma, i = 1, \dots, m\}, \quad \tau \in (0, \infty),$$

будем называть программой группы преследователей $P_1, \dots, P_m$. Отображения $x_i, i = 1, \dots, m$, интерпретируются как траектории преследователей. Цель поиска — приблизиться к убегающему на расстояние, не превосходящее n в метрике ρ , где n — некоторое фиксированное неотрицательное целое число, характеризующее требуемую близость к убегающему, по достижении которой поиск считается успешно завершенным. Программа

$$\Pi = \{x_i: [0, \tau] \rightarrow \Gamma, i = 1, \dots, m\}$$

называется выигрывающей, если для любого непрерывного отображения $y: [0, \tau] \rightarrow \Gamma$, которое интерпретируется как траектория убегающего, существует такое $t \in [0, \tau]$, что

$$\min_i \rho(x_i(t), y(t)) \leq n.$$

Для каждого связного графа Γ вводится в рассмотрение величина $s_n(\Gamma)$, равная минимальной численности группы преследователей, обладающей выигрывающей программой. Эту величину будем называть n -поисковым числом графа Γ . Величина $s_0(\Gamma)$ изучена достаточно хорошо (см. обзор в [2]). В литературе она называется поисковым числом графа Γ . Инвариант $s_1(\Gamma)$ рассматривался в работах [3–4], где он был назван l -поисковым числом графа Γ . Случай $n \geq 2$, насколько известно автору, ранее не рассматривался.

Можно показать, что если у графа Γ нет петель и кратных ребер, n -поисковое число определяется по его комбинаторной схеме. В этом случае величина $s_n(\Gamma)$ является комбинаторным инвариантом, а задача ее определения оказывается дискретной. Реализация выигрывающей программы, состоящей, как иногда говорят, в очищении графа Γ , сводится к выполнению конечного числа ходов, после каждого из которых очищенное множество меняется по определенным (довольно простым) правилам. Можно показать, что существует конечная процедура для определения n -поискового числа и соответствующей выигрывающей программы, однако их нахождение для конкретных графов, в особенности для графов с большими n -поисковыми числами, затруднительно. В связи с этим полезно рассмотреть некоторые частные случаи, в которых имеются различного рода упрощающие моменты (симметрия, однородность и т. п.).

В настоящей статье рассматриваются графы (т. е. одномерные остовы) правильных многогранников. Однако предложенный в работе способ рассуждения может быть использован в значительно более общей ситуации. Суть его состоит в следующем.

Известно, что наибольшие трудности возникают при доказательстве оценок n -поискового числа снизу, т. е. при доказательстве того, что некоторого числа преследователей недостаточно для успешного завершения поиска. При доказательстве от противного рассматривается гипотетическая выигрывающая программа Π и выбирается некоторая конечная совокупность B подмножеств графа Γ . В доказательстве теоремы 5, например, B состоит из всех пятиугольников графа додекаэдра. Далее рассматривается первый ход (с номером k) в программе Π , после которого какое-либо подмножество из этой совокупности, свободное от преследователей, оказывается очищенным. В некоторых случаях удается доказать, что ситуация в этот момент нелегальная, т. е. не может возникнуть при соблюдении всех правил игры. Иногда, чтобы убедиться в этом, необходимо провести ретроградный анализ, состоящий в рассмотрении всевозможных предыдущих ходов, подобно тому, как это делается в шахматной композиции. В других случаях ситуация после k -го хода оказывается легальной, но удается доказать, что последующие ходы приводят к повторению позиции и полное очищение графа невозможно. Заметим, что удачный выбор совокупности B может существенно упростить рассуждения.

Следующие теоремы содержат полную информацию об инвариантах s_n для графов правильных многогранников.

Теорема 1. Пусть T — граф тетраэдра. Тогда $s_0(T) = 4$, $s_1(T) = 2$, $s_n(T) = 1$ для $n \geq 2$.

Теорема 2. Пусть K — граф куба. Тогда $s_0(K) = 5$, $s_1(K) = s_2(K) = 2$, $s_n(K) = 1$ для $n \geq 3$.

Теорема 3. Пусть O — граф октаэдра. Тогда $s_0(O) = 5$, $s_1(O) = 2$, $s_n(O) = 1$ для $n \geq 2$.

Теорема 4. Пусть I — граф икосаэдра. Тогда $s_0(I) = 7$, $s_1(I) = 3$, $s_2(I) = 2$, $s_n(I) = 1$ для $n \geq 3$.

Теорема 5. Пусть D — граф додекаэдра. Тогда $s_0(D) = 7$, $s_1(D) = 4$, $s_2(D) = 3$, $s_3(D) = s_4(D) = 2$, $s_n(D) = 1$ для $n \geq 2$.

2. Прежде, чем перейти к доказательству теорем 1–5, введем некоторые определения и обозначения. Пусть Γ — связный граф и $V\Gamma$ — множество его вершин. Можно считать, что Γ вложен в трехмерное пространство, а его ребрами являются конечнозвенные ломаные линии. Программа

$$\Pi = \{x_i: [0, N] \rightarrow \Gamma, i = 1, \dots, m\}$$

называется простейшей, если N — натуральное число, для любого целого $\theta \in [0, N]$ и $i \in [1, m]$

$$x_i(\theta) \in V\Gamma$$

и на промежутке $(\theta, \theta + 1)$, $\theta \in [0, N - 1]$, ровно один из преследователей переходит из вершины в смежную вершину в то время, как остальные стоят. Можно показать, что если у группы преследователей существует выигрывающая программа, то у нее существует и простейшая выигрывающая программа. Для $n = 0$ это доказано в [2], для $n = 1$ в [4].

Пусть $\Pi = \{x_i: [0, N] \rightarrow \Gamma, i = 1, \dots, m\}$ — некоторая фиксированная простейшая программа. Введем некоторые определения, связанные с этой программой. Для каждого момента $\theta \in [0, N]$ введем в рассмотрение множество

$$A_\theta = \{z \in \Gamma: \text{существует траектория убегающего } y: [0, \theta] \rightarrow \Gamma \text{ такая, что} \\ y(\theta) = z \text{ и } \rho(y(t), x_i(t)) > n \text{ для всех } t \in [0, \theta], i = 1, \dots, m\}.$$

Это множество иногда называют множеством достижимости в момент θ .

Через A_θ^* будем обозначать дополнение этого множества до Γ . Ясно, что если программа Π выигрывающая, то существует такой момент $\theta \in [0, N]$, что $A_\theta^* = \Gamma$. Будем говорить, что вершина a является внутренней в момент $\theta \in [0, N]$, если в этой вершине нет преследователей и все инцидентные ей ребра лежат в A_θ^* . Подграф Γ' графа Γ будем называть внутренним в момент θ , если все вершины Γ' в этот момент являются внутренними.

Вершину a будем называть внешней в момент $\theta \in [0, N]$, если эта вершина вместе с инцидентными ей ребрами лежит в A_θ .

Будем говорить, что преследователь P_i контролирует в момент θ множество $S \subset \Gamma$, если $\rho(x_i(\theta), s) \leq n$ для всех $s \in S$.

Докажем теперь одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Если Γ — граф правильного многогранника в $\mathbb{R}^3$, отличного от тетраэдра, то $s_n(\Gamma) \geq 2$ тогда и только тогда, когда

$$n > D(\Gamma) = \max_{a, b \in V\Gamma} \rho(a, b).$$

Доказательство. Расположим граф Γ в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы Γ был центрально-симметричным относительно начала. Ясно, что если $n < D(\Gamma)$, то одного преследователя для успешного завершения поиска недостаточно. В самом деле, для произвольной простейшей программы $\Pi = \{x: [0, N] \rightarrow \Gamma\}$ одного преследователя в каждый целочисленный момент существует, по крайней мере, одна внешняя вершина. Нетрудно убедиться, что в этих условиях траекторией уклонения является $y(t) = -x(t)$, $t \in [0, N]$. С другой стороны, если $n \geq D(\Gamma)$, то из каждой вершины один преследователь контролирует весь граф. Это следует из того, что для всех $a \in V\Gamma$ существует ровно одна вершина $b = -a$, для которой $\rho(a, b) = D(\Gamma)$. Отсюда заключаем, что $s_n(\Gamma) = 1$.

3. Обратимся теперь к доказательству теорем 1–5. Заметим, что результаты, касающиеся инварианта s_0 , в основном получены П. А. Головачем [2]. И. Туре доказал, что $s_1(K) = 2$, $s_1(I) = 3$. Неравенство $s_2(I) \leq 2$ следует из того, что два преследователя, находящиеся в диаметрально противоположных вершинах икосаэдра, контролируют весь граф. Остальные утверждения теорем 1–4 легко доказываются с помощью леммы.

В теореме 5 утверждения, касающиеся $s_i(D)$ для $i \geq 3$ следуют из леммы и того факта, что два преследователя, находящиеся в противоположных вершинах додекаэдра, контролируют весь граф D . Перейдем к доказательству наиболее трудных утверждений теоремы 5 о том, что $s_1(D) = 4$ и $s_2(D) = 3$.

Предложение 1. *Справедливо равенство*

$$s_1(D) = 4.$$

Доказательство. Будем считать граф D центрально-симметричным относительно начала координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Для каждой вершины a графа D через a' будем обозначать вершину, диаметрально противоположную a (т. е. $a' = -a$). Связный подграф графа D будем называть пятиугольником, если он состоит из 5 вершин и 5 ребер. Ясно, что каждый пятиугольник лежит в плоскости некоторой (двумерной) грани додекаэдра.

Докажем сначала, что $s_1(D) \geq 4$. Предположим противное, тогда существуют простейшие выигрывающие программы для группы из трех преследователей, находящихся в начальный момент в одной из вершин графа D . Выберем из них программу Π , имеющую минимальное число ходов (т. е. программу наименьшей временной длительности). Так как программа Π выигрывающая, после некоторого хода с номером k (т. е. в момент k) на графе впервые появляется внутренний пятиугольник C . Пусть $a_1, \dots, a_5$ — вершины C , (a_i, a_{i+1}) , $i = 1, \dots, 4$, (a_5, a_1) — его ребра. Обозначим через b_i вершину D , смежную с a_i , но не лежащую на C . В момент $k - 1$ один из преследователей (скажем, P_1) находится в одной из вершин C (например, в a_1) и на k -ом ходу переходит в b_1 . Внутренний пятиугольник может появляться только таким образом. Заметим, что в момент $k - 1$ все вершины C за исключением a_1 являются внутренними и, кроме того, на D нет ни одного внутреннего пятиугольника.

Через вершины a_1, b_1 и начало координат проведем плоскость H , порождающую два открытых полупространства, H^- (содержащее a_2 и a_3) и H^+ (содержащее a_4 и a_5). Заметим, что каждое из этих полупространств в момент $k - 1$ должно содержать вершину, в которой находится один из преследователей. В

самом деле, если предположить, что в H^- нет преследователей, то нетрудно показать, что в H^- существует внутренний пятиугольник C^- , содержащий вершины a_2, a_3, b_3, b'_5, b_2 . Аналогично, если в H^+ нет преследователей, то внутренним будет пятиугольник C^+ , содержащий вершины a_5, b_5, b'_2, b_4, a_4 . Здесь и далее используется следующий простой факт: всякая вершина, смежная с внутренней, либо контролируется одним из преследователей, либо сама является внутренней. Пусть для определенности в момент $k - 1$ преследователь P_2 находится в H^- , а преследователь P_3 в H^+ . Далее, преследователь P_2 в этот момент не может находиться в вершинах a'_4, b'_4 и a'_5 , так как в противном случае пятиугольник C^- оказывается внутренним. По аналогичной причине преследователь P_3 не может находиться в вершинах b'_3, a'_3 и a'_2 . Далее, P_2 не может занимать вершину b_3 , так как в противном случае пятиугольник $b_2b'_5a'_5a'_4b'_4$ внутренний. Аналогично, P_3 не может находиться в b_4 . Наконец, P_2 не может занимать вершину b_2 , так как в противном случае внутренним оказывается пятиугольник $b_3b'_5a'_5a'_4b'_1$. По аналогичной причине P_3 не может находиться в b_5 . Следовательно, в момент $k - 1$ преследователь P_2 может находиться только в b'_5 , а P_3 только в b'_2 .

Рассмотрим теперь вершину b'_1 . В момент $k - 1$ она не может быть внутренней, так как пятиугольник $a_4b_4b'_1b_3a_3$ не является внутренним. Следовательно, вершина b'_1 и смежная с ней вершина a'_1 внешние. Рассмотрим теперь вершины a'_4, b'_4, a'_3, b'_3 . В момент $k - 1$ все они одновременно являются либо внутренними, либо внешними. Но если предположить, что они внутренние, то внутренней окажется и вершина b_1 , что невозможно, так как в этом случае внутренним оказывается пятиугольник $a'_4b'_4b'_1b'_3a'_3$. Таким образом, в момент $k - 1$ вершины a'_4, b'_4, b'_3, a'_3 внешние. В момент k на графе D остаются лишь 4 внешние вершины a'_3, a'_4, a'_1 и b'_1 , при этом ребра (b_5, b'_3) и (b_2, b'_4) лежат в A_k . Таким образом, при возникновении внутреннего пятиугольника после перехода P_1 из a_1 в b_1 в момент k позиция (т.е. расположение преследователей и множество A_k) определяется однозначно.

Рассмотрим теперь $(k + 1)$ -й ход в программе П. Нетрудно убедиться, что этот ход делает преследователь P_1 . В самом деле, любой ход P_2 или P_3 приводит к позиции, в которой отсутствуют внутренние пятиугольники. Это легко устанавливается по структуре множества A_k . Пусть $k + l$ есть следующий момент, когда снова появляется внутренний пятиугольник. Из предыдущего следует, что позиция в момент $k + l$ с точностью до поворота должна совпадать с позицией, реализовавшейся после k -го хода. Это, однако, противоречит свойству минимальности программы П.

Пусть на $(k + 1)$ -ом ходу преследователь P_1 переходит из b_1 в b'_3 . Вторая, симметричная возможность (переход из b_1 в b'_4) рассматривается аналогично. На $(k + 2)$ -ом ходу возможны лишь два продолжения: переход P_1 из b'_3 в b_1 и переход P_3 из b'_2 в b_4 . Остальные продолжения приводят к исчезновению (единственного) внутреннего пятиугольника. Заметим, однако, что обе позиции, которые могут реализоваться после $(k + 2)$ -го хода совпадают с точностью до поворота и зеркального отражения относительно некоторой плоскости, проходящей через начало. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $(k + 2)$ -й ход делает преследователь P_3 . Рассмотрим $(k + 3)$ -й ход. Переходы P_1 в b_5 , P_1 в a'_3 , P_3 в a_4 и любой ход P_2 невозможны, так как приводят к исчезновению внутреннего пятиугольника. Переход P_3 в b'_2 приводит к позиции, реализовавшейся после $(k + 1)$ -го хода. К той же позиции (с точностью до зеркального отражения) при-

водит переход P_3 в b'_1 . Таким образом переходы P_3 невозможны в силу свойства минимальности программы Π . Остается только одно продолжение: переход P_1 в b_1 . Покажем теперь, что $(k+4)$ -й ход невозможен. Переход P_1 в b'_3 приводит к позиции, реализовавшейся в момент $k+2$. К той же позиции (с точностью до поворота зеркального отражения) приводит переход P_3 в b'_2 . Оба эти перехода невозможны в силу упомянутого выше свойства программы Π . Остальные же продолжения, как нетрудно убедиться, приводят к исчезновению внутреннего пятиугольника. Это завершает доказательство неравенства $s_1(D) \geq 4$.

Для того, чтобы доказать противоположное неравенство, достаточно указать выигрывающую программу для четырех преследователей. Опишем одну из них. Пусть в начальный момент преследователь P_1 находится в b_1 , P_2 в b'_5 , P_3 в b'_2 , P_4 в b'_1 . Далее преследователи P_1, P_2 и P_3 остаются на своих местах, а P_4 совершает следующий обход:

$$b'_1 \rightarrow a'_1 \rightarrow a'_2 \rightarrow a'_3 \rightarrow a'_4 \rightarrow b'_4 \rightarrow b_2 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow b_5.$$

Нетрудно убедиться, что построенная программа является выигрывающей. Это завершает доказательство предложения 1.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$s_2(D) = 3.$$

Доказательство. Неравенство $s_2(D) \leq 3$ следует из того, что два преследователя, находящиеся в диаметрально противоположных вершинах додекаэдра, контролируют все вершины D . Докажем противоположное неравенство. Предположим противное, тогда существуют простейшие выигрывающие программы для группы из двух преследователей, находящихся в начальный момент в одной из вершин графа D . Выберем из них программу $\Pi = \{x_i: [0, N] \rightarrow D, i = 1, 2\}$, имеющую минимальное число ходов. В этой программе после некоторого хода с номером k на D впервые появляется внутренний пятиугольник C .

Пусть $a_1, \dots, a_5$ — его вершины, далее сохранены обозначения, принятые в доказательстве предложения 1. Будем считать, что граф D расположен центрально-симметрично относительно начала координат в пространстве $\mathbf{R}^3$. Предположим, что k -й ход делает преследователь P_1 . Заметим, что $x(k) \notin -C$, так как в противном случае нетрудно убедиться, что пятиугольник C был внутренним и в момент $k-1$. Поэтому существует такой номер $j \in \{1, \dots, 5\}$, что либо $x_1(k) = b_j$, либо $x_1(k) = b'_j$.

В силу симметрии достаточно рассмотреть два случая:

$$(1) \quad x_1(k) = b_1,$$

$$(2) \quad x_1(k) = b'_3.$$

В случае 1 возможен один из трех подслучаев:

$$(1.1) \quad x_1(k-1) = a_1,$$

$$(1.2) \quad x_1(k-1) = b'_3,$$

$$(1.3) \quad x_1(k-1) = b'_4.$$

Рассмотрим сначала случай 1.1. Ясно, что в этой ситуации вершины a_2 , a_3 , a_4 , a_5 являются внутренними (в момент $k-1$). Выясним теперь, где может находиться в этот момент преследователь P_2 . Если $x_2(k-1) \in H^+$, то в момент $k-1$ оказывается внутренним пятиугольник C^- , если $x_2(k-1) \in H^-$, то этим свойством будет обладать пятиугольник C^+ . Если же $x_2(k-1) = b_1$, то в момент $k-1$ внутренним оказывается и C^- , и C^+ . Таким образом, осталось рассмотреть две возможности:

$$(1.1.1) \quad x_1(k-1) = a_1, \quad x_2(k-1) = b'_1,$$

$$(1.1.2) \quad x_1(k-1) = a_1, \quad x_2(k-1) = a'_1.$$

Рассмотрим первую из них. Заметим сначала, что в момент $k-1$ вершины b_2 и b_5 внутренние, так как в противном случае в момент k пятиугольник C не будет внутренним. Далее, ребра (a'_2, b'_2) и (a'_5, b'_5) лежат в A_{k-1} . Иначе в момент $k-1$ один из пятиугольников C^+ , C^- окажется внутренним. Заметим, наконец, что вершины a'_3, a'_4 внешние (в момент $k-1$), иначе в этот момент пятиугольник $b_1 b'_4 a'_4 a'_3 b'_3$ окажется внутренним.

Покажем, что позиция в случае 1.1.1 нелегальна, т.е. не может возникнуть при реализации какой-либо простейшей программы. В самом деле, если предположить, что $(k-2)$ -й ход делал P_2 , то, используя отмеченное выше свойство ребер (a'_2, b'_2) и (a'_5, b'_5) , можно показать, что по крайней мере одна из вершин b_2, b_5 не является внутренней в момент $k-1$. Предположим теперь, что $(k-2)$ -й ход делал P_1 . Если $x_1(k-2) = b_1$, то так как в момент $k-2$ пятиугольник C не мог быть внутренним, по крайней мере одно из ребер (a_5, b_5) , (a_2, b_2) должно лежать в A_{k-2} . Следовательно, обе вершины b_2, b_5 не могут стать внутренними в момент $k-1$. То же утверждение справедливо и в случае, если $x_1(k-2) = a_5$ или $x_1(k-2) = a_2$, поскольку в момент $k-2$ вершины a'_3 и a'_4 внешние. Таким образом, случай 1.1.1 невозможен.

Обратимся теперь к случаю 1.1.2. Заметим сначала, что так же, как и выше, вершины b_2 и b_5 должны быть внутренними в момент $k-1$. Далее, ребра (b'_5, b_3) , (b'_2, b_4) должны лежать в A_{k-1} , так как в момент $k-1$ ни один из пятиугольников C^- , C^+ не является внутренним.

Рассмотрим теперь возможные позиции преследователей в момент $k-2$. Если $x_2(k-2) = b'_1$, то ребра (a'_2, b'_2) , (a'_5, b'_5) лежат в A_{k-2} . В противном случае один из пятиугольников C^- , C^+ оказывается внутренним в момент $k-2$. Но тогда вершины b_2 и b_5 не могут стать внутренними в момент $k-1$. Если же $x_2(k-2) = a'_2$ или $x_2(k-2) = a'_5$, то одна из вершин a_3, a_4 не будет внутренней в момент $k-1$. Рассмотрим теперь возможные ходы с номером $k-1$ преследователя P_1 . Так же, как и в случае 1.1.1, легко устанавливается, что $x_1(k-2) \neq b_1$. Оставшиеся две возможности симметричны, поэтому рассмотрим одну из них: $x_1(k-2) = a_2$, $x_2(k-2) = a'_1$. В этом случае можно утверждать, что ребра (b'_3, a'_3) , (b'_4, a'_4) лежат в A_{k-2}^* (иначе обе вершины b_2 и b_5 не могут стать внутренними в момент $k-1$) и $(a'_3, a'_4) \subset A_{k-2}$, так как пятиугольник $b'_3 b_1 b'_4 a'_4 a'_3$ не мог быть внутренним в момент $k-2$. Покажем, что рассматриваемая позиция нелегальна. В самом деле, если $x_1(k-3) = a_1$, то ситуация в момент $k-3$ оказывается идентичной ситуации в момент $k-1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что ребра (b'_4, b_2) и (b'_5, b_2) должны лежать в A_{k-3}^* . Если же $x_1(k-3) = b_2$ или $x_1(k-3) = a_3$, то ребро (b'_5, b_3) оказывается в A_{k-1}^* , что невозможно. Таким образом, $(k-2)$ -й ход

не может быть сделан преследователем P_1 . С другой стороны, поскольку ребра (b'_2, b_4) , (b'_5, b_3) и (a'_3, a'_4) лежат в A_{k-2} , преследователь P_2 также не мог сделать $(k-2)$ -го хода. Таким образом, случай 1.1.2 невозможен. Этим завершается рассмотрение случая 1.1.

Обратимся теперь к случаю 1.2. Нетрудно видеть, что по крайней мере одно из ребер (a_1, a_5) , (a_1, a_2) лежит в A_{k-1} . В противном случае пятиугольник C был бы внутренним уже в момент $k-1$. Если оба эти ребра лежат в A_{k-1} , то для того, чтобы пятиугольник C стал в момент k внутренним, необходимо, чтобы преследователь P_2 в момент $k-1$ находился на расстоянии 2 от вершин a_2 и a_5 , т. е. $x_2(k-1) = b_1$. Однако это противоречит тому, что ребра (a_1, a_5) , (a_1, a_2) лежат в A_{k-1} .

Далее будем различать два случая:

$$(1.2.1) \quad x_1(k-1) = b'_3, (a_1, a_5) \subset A_{k-1},$$

$$(1.2.2) \quad x_1(k-1) = b'_3, (a_1, a_2) \subset A_{k-1}.$$

В случае 1.2.1 в момент $k-1$ преследователь P_2 должен находиться на расстоянии 2 от вершины a_5 . Ясно, что $x_2(k-1)$ не может равняться ни b_1 , ни a_2 . Случай $x_2(k-1) = a_3$ невозможен, так как к моменту k пятиугольник C становится внутренним. Следовательно, $x_2(k-1)$ может равняться либо b'_3 , либо b'_2 , либо b_4 . Во всех этих случаях пятиугольник C^- оказывается внутренним в момент $k-1$, так как в этот момент в наших условиях вершины a_2 и a_3 внутренние. Следовательно, случай 1.2.1 невозможен.

В случае 1.2.2 преследователь P_2 в момент $k-1$ должен находиться на расстоянии 2 от вершины a_2 . Ясно, что $x_2(k-1)$ не может равняться ни b_1 , ни a_5 . Случай $x_2(k-1) = a_4$ также невозможен, так как к моменту k пятиугольник C становится внутренним. Следовательно, $x_2(k-1)$ может равняться либо b'_4 , либо b'_5 , либо b_3 . Во всех этих случаях пятиугольник C^+ оказывается внутренним в момент $k-1$, так как в этот момент в наших условиях вершины a_5 и a_4 внутренние. Следовательно, случай 1.2.2 также реализоваться не может. Таким образом, случай 1.2 невозможен. Нереализуемость случая 1.3 доказывается аналогично (ситуация симметрична). Итак, в результате предыдущих рассуждений случай 1, в котором $x_1(k) = b_1$, исключается.

Перейдем к рассмотрению случая 2, в котором $x_1(k) = b'_3$. В этой ситуации по крайней мере одно из ребер (a_1, b_1) , (a_5, b_5) лежит в A_{k-1} (иначе, пятиугольник C уже в момент $k-1$ был бы внутренним). Если оба эти ребра лежат в A_{k-1} (что возможно лишь при $x_1(k-1) = a'_3$), то преследователь P_2 в момент $k-1$ должен находиться на расстоянии 2 от вершин a_1 и a_5 . Следовательно, $x_2(k-1)$ должно равняться либо b'_3 , либо a_3 . Однако нетрудно видеть, что ни то ни другое в рассматриваемых условиях невозможно. Таким образом, лишь одно из вышеупомянутых ребер лежит в A_{k-1} . Для определенности будем считать, что $(a_1, b_1) \subset A_{k-1}$. Случай $(a_5, b_5) \subset A_{k-1}$ рассматривается аналогично. Далее будем различать два случая:

$$(2.1) \quad x_1(k-1) = a'_3,$$

$$(2.2) \quad x_1(k-1) = b_5.$$

Ясно, что $x_1(k-1) \neq b_1$.

В обоих случаях в момент $k - 1$ преследователь P_2 должен находиться на расстоянии 2 от вершины a_1 , а вершины a_2, a_3, a_4, a_5 должны быть внутренними. Как и выше, легко устанавливается, что $x_2(k - 1)$ может равняться либо b_5 , либо b_2 . Нетрудно убедиться теперь, что в случае 2.1 пятиугольник $a_4 b_4 b'_1 b_3 a_3$ является внутренним в момент $k - 1$ и, следовательно, этот случай невозможен. Если же в случае 2.2 $x_2(k - 1) = b_5$, то внутренним (в момент $k - 1$) оказывается пятиугольник C^- . Осталось рассмотреть случай $x_1(k - 1) = b_5$, $x_2(k - 1) = b_2$. Нетрудно видеть, что в этом случае в момент $k - 1$ вершина b'_1 внешняя, так как в противном случае в момент $k - 1$ пятиугольник $a_4 b_4 b'_1 b_3 a_3$ внутренний. Но тогда после k -го хода преследователя P_1 вершина a_4 не может стать внутренней в момент k . Таким образом, случай 2.2 также реализоваться не может. Это завершает доказательство предложения 2.

Список литературы

1. Масси У., Столлингс Дж. *Алгебраическая топология. Введение*. Мир, Москва, 1977.
2. Головач П. А. *Экстремальные задачи поиска на графах*. Дисс. канд. физ.-матем. наук, Ленинград, 1990.
3. Петров Н. Н., Туре И. Об одной задаче преследования на графе. *Вестник ЛГУ*, сер. 1 (1990), вып. 4 (№22), 12–18.
4. Петров Н. Н., Туре И. Определение минимальной численности группы поиска на графе. *Вестник ЛГУ*, сер. 1 (1991), вып. 2 (№8), 47–49.
5. Головач П. А., Петров Н. Н. K -поисковое число графов правильных многогранников. *Вестник СПбГУ*, сер. 1 (1995), вып. 3 (№15), 21–27.

Статья поступила 24.04.91.