Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Ляпков, Б. А. Севастьянов, Предельное распределение вероятностей перманента случайной матрицы в поле $GF(p)$, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:25:53

Предельное распределение вероятностей перманента случайной матрицы в поле $GF(p)$

© 1996 г. Л. А. Ляпков, Б. А. Севастьянов

Показано, что перманент $\text{per}(A_{nm})$ случайной $n \times m$ матрицы A_{nm} с элементами из поля $GF(p)$ и независимыми строками имеет предельное при $n \rightarrow \infty$ распределение вероятностей $\{p_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$, вида

$$p_k = \rho_m \delta_{k0} + (1 - \rho_m)/p,$$

где δ_{k0} — символ Кронекера. Эти вероятности при каждом m совпадают с распределением вероятностей некоторой функции от независимых и равномерно распределенных на $GF(p)$ случайных величин.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-011-1443.

1. Постановка задачи

Перманент матрицы $A_{nm} = \|\alpha_{ij}\|$ с n строками и с m столбцами, $n \geq m$, определяется формулой

$$\text{per}(A_{nm}) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_m m}, \quad (1)$$

где сумма берется по всем наборам $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ попарно различных индексов. Мы будем предполагать, что α_{ij} являются элементами поля $GF(p)$. В этом случае перманент принимает значения $0, 1, 2, \dots, p-1$. Считая матрицу A_{nm} случайной, найдем предельное распределение вероятностей $\mathbf{P}\{\text{per}(A_{nm}) = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$, при $n \rightarrow \infty$ и постоянном m . Сначала введем некоторые определения и обозначения, которыми будем далее пользоваться. Знаки $+$ и $\sum$ будут, как правило, означать суммы по модулю p (т.е. суммы в поле $GF(p)$). Из контекста будет ясно, когда сумма понимается в обычном смысле. Мощность конечного множества B будем обозначать $|B|$. В лемме 1 устанавливается вспомогательный результат о числе связанных графов. В основной теореме 1 $\text{per}(A_{nm})$ выражается с помощью некоторых функций от сумм $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij_1} \alpha_{ij_2}, \dots$, $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij_1} \alpha_{ij_2} \dots \alpha_{ij_p}$. В лемме 2 устанавливается предельное распределение для

вспомогательной цепи Маркова. В теореме 2 в достаточно общих условиях доказывается, что вероятности

$$p_{mk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\text{рег}(A_{nm}) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1,$$

определяются распределением вероятностей некоторых функций от независимых и равномерно распределенных на $\text{GF}(p)$ случайных величин $\xi_{j_1}, \xi_{j_1 j_2}, \xi_{j_1 j_2 j_3}, \dots, \xi_{j_1 j_2 \dots j_p}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq m$.

2. Лемма о неразложимых графах

Обозначим M множество вершин графа $\Gamma(M)$, в частности, положим $M_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Через $G(M)$ будем обозначать множество всех неразложимых графов без петель и кратных ребер с помеченными вершинами из множества M . Число таких графов обозначим $g(M) = |G(M)|$; в частности, положим $g_k = g(M_k)$. Обозначим $G_0(M)$ ($G_1(M)$) множество всех неразложимых графов из $G(M)$ с четным (нечетным) числом ребер; в частности, положим $G_{ki} = G_i(M_k)$. Мощности этих множеств обозначим $g_i(M) = |G_i(M)|$, $g_{ki} = |G_{ki}|$; положим $\Delta g(M) = g_0(M) - g_1(M)$, $\Delta g_k = g_{k0} - g_{k1}$.

Лемма 1. Для любого $k \geq 2$

$$\Delta g_k = (-1)^{k-1} (k-1)! \quad (2)$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. При $k = 2$ существует только один связный граф, и равенство (2) выполняется. Предположим, что для всех $i \leq k$ равенство (2) выполняется, и докажем его справедливость для $k+1$. Разобьем доказательство на три этапа.

(а) Обозначим $G'_{k+1,0}$ ($G'_{k+1,1}$) множество таких неразложимых графов $\Gamma(M_{k+1})$ с четным (нечетным) числом ребер, подграфы $\Gamma(M_k)$ которых также неразложимы, и обозначим $g'_{k+1,i} = |G'_{k+1,i}|$. Имеет место равенство

$$g'_{k+1,0} - g'_{k+1,1} = -(g_{k0} - g_{k1}). \quad (3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g'_{k+1,0} - g'_{k+1,1} &= \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots \right) g_{k1} + \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \dots \right) g_{k0} \\ &\quad - \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots \right) g_{k0} - \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \dots \right) g_{k1} \\ &= g_{k1} - g_{k0}. \end{aligned}$$

(б) Пусть M' и M'' — разбиение множества M_k , т.е.

$$M_k = M' \cup M'', \quad M' \cap M'' = \emptyset.$$

Обозначим $G''(M_{k+1} \mid M', M'')$ множество всех таких графов $\Gamma(M_{k+1})$ с вершинами M_{k+1} , что никакая пара вершин $a \in M'$, $b \in M''$ не соединена ребром, а подграфы $\Gamma(M' \cup \{k+1\})$ и $\Gamma(M'' \cup \{k+1\})$ неразложимы. Обозначим $g_0''(M_{k+1} \mid M', M'')$ ($g_1''(M_{k+1} \mid M', M'')$) число графов из множества $G''(M_{k+1} \mid M', M'')$ с четным (нечетным) числом ребер, и

$$\Delta g''(M_{k+1} \mid M', M'') = g_0''(M_{k+1} \mid M', M'') - g_1''(M_{k+1} \mid M', M'').$$

Тогда

$$\Delta g''(M_{k+1} \mid M', M'') = \Delta g(M' \cup \{k+1\}) \Delta g(M'' \cup \{k+1\}). \quad (4)$$

Равенство (4) следует из очевидного соотношения

$$\begin{aligned} g_0''(M_{k+1} \mid M', M'') \\ = g_0(M' \cup \{k+1\}) g_0(M'' \cup \{k+1\}) + g_1(M' \cup \{k+1\}) g_1(M'' \cup \{k+1\}) \end{aligned}$$

и аналогичного соотношения для $g_1''(M_{k+1} \mid M', M'')$.

(с) В каждом графе $\Gamma(M_{k+1})$ из $G(M_{k+1})$ выделим вершины 1 и $k+1$. Обозначим M' содержащую вершину 1 компоненту подграфа, получающегося из графа $\Gamma(M_{k+1})$ при удалении вершины $k+1$ и всех инцидентных ей ребер. Пусть $|M'| = i$, $M'' = M \setminus M_k$, $|M''| = k-i$. Учитывая пункты (а) и (б) доказательства, в силу индукции при каждом i , равном $1, 2, \dots, k$, из равенства (4) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta g''(M_{k+1} \mid M', M'') &= \Delta g(M' \cup \{k+1\}) \Delta g(M'' \cup \{k+1\}) \\ &= -\Delta g(M') \Delta g(M'' \cup \{k+1\}) \\ &= -(-1)^{i-1} (i-1)! (-1)^{k-i} (k-i)!, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta g_{k+1} = (-1)^k \sum_{i=1}^k (i-1)! (k-i)! \binom{k-1}{i-1} = (-1)^k k!$$

Лемма доказана.

3. Основная теорема

Пусть $J = \{j_1, \dots, j_l\}$ — подмножество множества $M_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Положим

$$\xi(J, n) = \sum_{r=1}^n \alpha_{rj_1} \alpha_{rj_2} \dots \alpha_{rj_l};$$

иногда мы будем использовать обозначения

$$\xi(\{j_1, \dots, j_l\}, n) = \xi_{j_1, \dots, j_l}(n). \quad (5)$$

Обозначим $K = (K_1, \dots, K_r)$ разбиение множества $M_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $k_i = |K_i|$; пусть $\mathcal{K}_p = \{K\}$ — множество всех разбиений M_m , у которых $k_i \leq p$, $i = 1, \dots, r$.

Теорема 1. Если элементы перманента матрицы $A_{nm} = \|\alpha_{ij}\|$ принадлежат полю $\text{GF}(p)$, то

$$\text{per}(A_{nm}) = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} c(K) \xi(K_1, n) \xi(K_2, n) \dots \xi(K_r, n), \quad (6)$$

где $K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$ — разбиения множества M_m , $k_i = |K_i|$, $i = 1, \dots, r$, $c(K) = (-1)^{m-r} (k_1 - 1)! (k_2 - 1)! \dots (k_r - 1)!$.

Доказательство. Положим

$$\delta(i, j; k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$\text{per}(A_{nm}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_m m} \prod_{1 \leq k < l \leq m} (1 - \delta(i_k, i_l; k, l)). \quad (7)$$

Раскрывая скобки в (7), мы получаем $2^{\binom{m}{2}}$ сумм, т.е. ровно столько, сколько имеется графов с m помеченными вершинами. Сумму вида

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n (-1)^r \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_m m} \delta(i_{k_1}, i_{l_1}; k_1, l_1) \dots \delta(i_{k_r}, i_{l_r}; k_r, l_r) \quad (8)$$

обозначим $\xi(\Gamma, n)$, где Γ — граф с множеством вершин M_m , в котором вершины k_i и l_i , $i = 1, 2, \dots, r$, соединены ребрами. Если граф Γ состоит из связных компонент $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$, то

$$\xi(\Gamma, n) = \prod_{t=1}^s (-1)^{d(\Gamma_t)} \xi(v(\Gamma_t), n), \quad (9)$$

где $v(\Gamma_t)$ — множество вершин компоненты Γ_t , $d(\Gamma_t)$ — количество ребер графа Γ_t , $\xi(v(\Gamma_t), n)$ определены формулой (5). В самом деле, если $(k_1, l_1), \dots, (k_q, l_q)$ — все ребра компоненты Γ_t , то

$$\delta(i_{k_1}, i_{l_1}; k_1, l_1) \dots \delta(i_{k_q}, i_{l_q}; k_q, l_q) = 1$$

тогда и только тогда, когда $i_{k_1} = i_{l_1}, \dots, i_{k_q} = i_{l_q}$, а так как граф Γ_t связан, то отсюда следует, что все индексы i_{k_j}, i_{l_j} , $j = 1, 2, \dots, q$, равны друг другу. Поэтому та часть суммы (8), которая соответствует графу Γ_t суммируется отдельно и дает

$$\xi(v(\Gamma_t), n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{d(\Gamma_t)} \prod_{k \in v(\Gamma_t)} \alpha_{ik}. \quad (10)$$

В частности, при $v(\Gamma) = \{i\}$ и $v(\Gamma) = \{i, j\}$ имеем, соответственно, $\xi(v(\Gamma_t), n) = \xi_i(n)$ и $\xi(v(\Gamma_t), n) = \xi_{ij}(n)$. Отсюда вытекает (9). В равенстве

$$\text{per}(A_{nm}) = \sum_{\Gamma} \xi(\Gamma, n), \quad (11)$$

где суммирование ведется по всем графам на множестве вершин M_m , выделим часть суммы следующим образом. Разложим множество M_m на J и $M_m \setminus J$. Обозначим $H_m(\Gamma')$ множество всех графов Γ , которые состоят из связной компоненты Γ_1 с вершинами $v(\Gamma_1) = J$ и фиксированного подграфа Γ' с вершинами $v(\Gamma') = M_m \setminus J$. Для любого $\Gamma \in H_m(\Gamma')$

$$\xi(\Gamma, n) = \xi(J, n)\xi(\Gamma', n).$$

Рассмотрим часть суммы (11)

$$\sum_{\Gamma \in H_m(\Gamma')} \xi(\Gamma, n) = \xi(\Gamma', n) \sum_{\Gamma_1 \in G(J)} \xi(\Gamma_1, n),$$

где $G(J)$ — множество связных графов на вершинах J . В силу (10)

$$\xi(\Gamma_1, n) = (-1)^{d(\Gamma_1)} \xi(v(\Gamma_1), n).$$

Отсюда следует, что $\text{per}(A_{nm})$ равен сумме типа (6), когда суммирование ведется по всем разбиениям K множества M_n . Но так как $\text{per}(A_{nm})$ вычисляется в поле $\text{GF}(p)$, то все разбиения с $k_i > p$ дают коэффициенты $(-1)^{k_i-1} (k_i - 1)! = 0$ по модулю p , поэтому суммирование в (6) можно вести только по разбиениям $K \in \mathcal{K}_p$. Теорема доказана.

Замечание 1. Полученная формула не связана со случайностью матрицы A_{nm} и позволяет вычислять $\text{per}(A_{nm})$ в поле $\text{GF}(p)$. В частности, при $p = 3$

$$\text{per}(A_{n1}) = \xi_1(n),$$

$$\text{per}(A_{n2}) = \xi_1(n)\xi_2(n) - \xi_{12}(n),$$

$$\text{per}(A_{n3}) = \xi_1(n)\xi_2(n)\xi_3(n) - \xi_1(n)\xi_{23}(n) - \xi_2(n)\xi_{13}(n) - \xi_3(n)\xi_{12}(n) + 2\xi_{123}(n).$$

Замечание 2. Теорема 1 справедлива и для случая кольца вычетов по модулю m . В этом случае некоторые слагаемые в сумме (6) обратятся в нуль. Например, при $m = 6$ в сумму (6) войдут те слагаемые, в которых будут только случайные величины $\xi_i(n)$, $\xi_{ij}(n)$, $\xi_{ijk}(n)$, так как в слагаемом с сомножителем $\xi_{i_1 i_2 \dots i_l}(n)$ с $l > 3$ имеется коэффициент $(l - 1)! = 0 \pmod{6}$.

4. Лемма об эргодичности

Опишем класс случайных матриц A_{nm} , для которых будет доказана предельная теорема. Пусть R^m — векторное пространство размерности m ; векторы $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ имеют компоненты $x_i \in \text{GF}(p)$. Определим отображение S пространства R^m в R^{s_m} , где $s_m = \sum_{k=1}^p \binom{m}{k}$, полагая

$$S\vec{x} = (x_1, \dots, x_m, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_m, x_2x_3, x_2x_4, \dots, x_{m-1}x_m, \\ x_1x_2x_3, \dots, x_{m-p+1}x_{m-p+2} \dots x_m).$$

Здесь и ниже предполагается, что величины с неположительными индексами равны нулю.

Ниже мы будем рассматривать класс случайных матриц A_{nm} , у которых строки $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im})$ независимы и одинаково распределены. Для любого $\vec{a} \in R^m$ обозначим $q(\vec{a}) = \mathbf{P}\{\vec{\alpha}_i = \vec{a}\}$. Легко видеть, что распределение $q(\cdot)$ индуцирует распределение $q^*(\cdot)$ на R^{sm} : если $\vec{a} \in R^{sm}$ и $\vec{a} = S\vec{a}'$, где $\vec{a}' \in R^m$, то

$$q^*(\vec{a}) = \mathbf{P}\{S\vec{\alpha}'_i = \vec{a}\} = \mathbf{P}\{\vec{\alpha}_i = \vec{a}'\} = q(\vec{a}'); \quad (12)$$

В остальных случаях $q^*(\vec{a}) = 0$. Обозначим $\mathcal{A} = \{\vec{a} \in R^{sm} : q^*(\vec{a}) > 0\}$ и $L(\mathcal{A})$ линейную оболочку $\mathcal{A}$ в R^{sm} .

Лемма 2. Пусть в случайной матрице A_{nm} строки $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})$ независимы и одинаково распределены. Для того, чтобы вектор $\vec{\xi}(n) \in R^{sm}$, составленный из компонент $\xi_i(n)$, $\xi_{ij}(n)$, $\xi_{ijk}(n)$, $\dots$, $\xi_{m-p+1, m-p+2, \dots, m}(n)$, определенных (5), сходиллся по распределению к вектору

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{12}, \xi_{13}, \dots, \xi_{1m}, \xi_{23}, \dots, \xi_{2m}, \dots, \xi_{m-p+1, m-p+2, \dots, m}) \in R^{sm},$$

компоненты которого независимы и равномерно распределены на $\text{GF}(p)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$(1) L(\mathcal{A}) = R^{sm};$$

$$(2) \exists k \neq 0 \pmod{p} \text{ такое, что}$$

$$\sum_{i=1}^k \vec{a}(i) = \vec{0} \in R^{sm}, \quad \vec{a}(i) \in \mathcal{A}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Из (5) следует, что

$$\vec{\xi}(n) = \sum_{r=1}^n S\vec{\alpha}_r,$$

где $S\vec{\alpha}_r$ независимы и одинаково распределены с распределением

$$q^*(\vec{a}) = \mathbf{P}\{S\vec{\alpha}_r = \vec{a}\},$$

которое задано формулой (12) с помощью распределения $q(\cdot)$. Последовательность $\vec{\xi}(n)$ образует цепь Маркова с p^{sm} состояниями, представляющими собой все элементы из R^{sm} . Переходная вероятность $p(\vec{a}, \vec{b})$ цепи Маркова $\vec{\xi}(n)$ определяется равенством

$$p(\vec{a}, \vec{b}) = \mathbf{P}\{\vec{\xi}(n+1) = \vec{b} \mid \vec{\xi}(n) = \vec{a}\} = q^*(\vec{b} - \vec{a}), \quad \vec{a}, \vec{b} \in R^{sm}. \quad (13)$$

Так как

$$\sum_{\vec{a} \in R^{sm}} p(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{\vec{a} \in R^{sm}} q(\vec{b} - \vec{a}) = 1,$$

переходная матрица $\|p(\vec{a}, \vec{b})\|$ дважды стохастическая. Если мы докажем, что цепь Маркова $\vec{\xi}(n)$ эргодическая, то ее предельное распределение будет равномерным, т.е. для всех $\vec{a} \in R^{sm}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\vec{\xi}(n) = \vec{a}\} = \frac{1}{p^{sm}}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. Докажем эргодичность цепи. Из (13) следует, что переходная вероятность за t шагов $p^{(t)}(\vec{a}, \vec{b})$ будет положительной тогда и только тогда, когда найдутся векторы $\vec{a}(k) \in R^{sm}$, $k = 1, \dots, t$, такие, что $p^*(\vec{a}(k)) > 0$, т.е. $\vec{a}(k) \in \mathcal{A}$, и

$$\vec{b} = \vec{a} + \sum_{k=1}^t \vec{a}(k). \quad (14)$$

Поэтому для любых $\vec{a}, \vec{b} \in R^{sm}$ найдется такое t , что $p^{(t)}(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ тогда и только тогда, когда выполнено условие 1 леммы. Условие 2 леммы выполняется тогда и только тогда, когда цепь $\vec{\xi}(n)$ апериодична. Обозначим N_0 множество тех $t \geq 1$, для которых $p^{(t)}(\vec{0}, \vec{0}) > 0$. В силу условия 2 леммы и равенства (14) $k \in N_0$. Число p также принадлежит N_0 , так как $p\vec{a} = \vec{0}$ для любого $\vec{a} \in \mathcal{A}$. Поэтому общий наибольший делитель чисел из N_0 равен 1, т.е. цепь апериодична. Наоборот, если цепь апериодична, то условие 2 должно быть выполнено, иначе у цепи будет период p . Лемма доказана.

Следствие 1. Если распределение $q(\vec{a}) = \mathbb{P}\{\vec{\alpha} = \vec{a}\}$ таково, что все $q(\vec{a}) > 0$, то условия леммы 2 выполняются, и, следовательно, $\vec{\xi}(n)$ сходится по распределению к предельному вектору $\vec{\xi} \in R^{sm}$ с независимыми и равномерно распределенными компонентами. В частности, это утверждение справедливо, если все элементы α_{ij} матрицы A_{nm} независимы и $\mathbb{P}\{\alpha_{ij} = a\} = p_j > 0$ для любого $a = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Замечание 3. Если нарушено условие 1, а условие 2 выполнено, то предельное распределение $\vec{\xi}$ существует и равномерно на некотором подпространстве $L(\mathcal{A}) \subset R^{sm}$ меньшей размерности. В этом случае некоторые линейные комбинации компонент вектора $\vec{\xi}$ равны нулю. Например, если $m = 2$ и $q((1, 2)) = q((0, 1)) = q((0, 0)) = 1/3$, то при $p > 2$ $L(\mathcal{A})$ состоит из векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, x_{12}) \in R^3$, у которых $x_{12} = 2x_1$. Поэтому предельный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_{12})$ имеет независимые компоненты ξ_1, ξ_2 с $\mathbb{P}\{\xi_1 = a\} = \mathbb{P}\{\xi_2 = a\} = 1/p$ для $a = 0, \dots, p-1$ и $\mathbb{P}\{\xi_{12} = 2\xi_1\} = 1$.

5. Предельная теорема

С помощью леммы 2 можно доказать предельную теорему для распределения $\text{per}(A_{nm})$ при $n \rightarrow \infty$. Воспользуемся обозначениями §3. Пусть $\mathcal{K}_p$ — множество всех разбиений $K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$, $r \geq 1$, множества $M_m = \{1, 2, \dots, m\}$, для которых $k_i = |K_i| \leq p$, $i = 1, \dots, r$. Для любого подмножества $A \subseteq M_m$ обозначим $\xi(A)$ равномерно распределенную на $\text{GF}(p)$ случайную величину. Если $A = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, то будем обозначать также

$$\xi(A) = \xi_{i_1 i_2 \dots i_r}.$$

Будем полагать, что все случайные величины $\xi(A)$, $A \subseteq M_m$, независимы. Обозначим

$$\xi(K) = \xi(K_1)\xi(K_2)\dots\xi(K_r),$$

где разбиение $K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$, $r \geq 1$.

Теорема 2. В условиях леммы 2 существуют предельные вероятности вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\text{per}(A_{nm}) = k\} = p_k = \rho_m \delta_{k0} + (1 - \rho_m)/p, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (15)$$

где δ_{k0} — символ Кронекера. Это распределение совпадает с распределением случайной величины

$$\eta_m = \sum_{K \in \mathcal{K}_p} \xi(K). \quad (16)$$

Доказательство. Из формулы (6), теоремы 1 и леммы 2 следует, что предельное распределение $\text{per}(A_{nm})$ при $n \rightarrow \infty$ совпадает с распределением случайной величины

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_p} c(K) \xi(K_1) \xi(K_2) \dots \xi(K_r).$$

Поскольку $\xi(K_i)$ независимы и равномерно распределены, то их распределение совпадает с распределением $(-1)^{k_i-1} (k_i - 1)! \xi(K_i)$. Так как распределение случайной величины (16) инвариантно относительно ее умножения на любое $a \in \text{GF}(p)$, $a \neq 0$, отсюда следует утверждение теоремы.

В работе [1] теорема 2 доказана при $p = 2$. Там же на основе этой теоремы вычислено предельное распределение $\text{per}(A_{nm})$ при $n \rightarrow \infty$ и любом m . При $p \geq 3$ эти предельные вероятности удается вычислить только для $1 \leq m \leq p+2$.

Теорема 3. Параметр ρ_m в вероятностях (15) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_m &= 0 && \text{при } 1 \leq m \leq p, \\ \rho_m &= 1/p^\beta, \quad \beta = 2^p - 1, && \text{при } m = p+1, \\ \rho_m &= 1/p^\gamma, \quad \gamma = 2^{p+1} - p - 3, && \text{при } m = p+2. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть множество $M \subseteq M_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Если $M = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, то, согласно введенному ранее обозначению, $\xi(M) = \xi_{i_1 i_2 \dots i_r}$. Введем случайные величины $\varphi_r(M)$, где $r = |M|$, следующим рекуррентным соотношением:

$$\varphi_r(M) = \sum_{J \in D_l} \xi(J) \varphi_{r-|J|}(M \setminus J), \quad (17)$$

где D_l — множество таких подмножеств $J \subseteq M$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$l \in J \subseteq M, \quad |J| \leq p.$$

Полагая $\varphi_0(\emptyset) = 1$, последовательно получаем из (17)

$$\begin{aligned} \varphi_1(\{i\}) &= \xi_i, \\ \varphi_2(\{i, j\}) &= \xi_{ij} + \xi_i \xi_j, \\ \varphi_3(\{i, j, k\}) &= \xi_{ijk} + \xi_{ij} \xi_k + \xi_{ik} \xi_j + \xi_{jk} \xi_i + \xi_i \xi_j \xi_k, \end{aligned}$$

и т. д. Случайную величину η_m в (16) можно записать с помощью разложения (17) следующим образом:

$$\eta_m = \sum_{J \in D_1} \xi(J) \varphi_{m-|J|}(M_m \setminus J). \quad (18)$$

При $m \leq p$ в разложении (18) имеется слагаемое $\xi(M_m) = \xi_{12\dots m}$, поэтому случайная величина η_m равномерно распределена, т.е. $\rho_m = 0$. Если $m = p+1$, то нетрудно показать, что в сумме (18) все случайные величины $\xi(J)$ и $\varphi_{m-|J|}(M_m \setminus J)$ независимы и равномерно распределены, а число слагаемых равно $\beta = 2^p - 1$. Событие

$$B = \bigcap_{J \in D_1} \{\varphi_{m-|J|}(M_m \setminus J) = 0\}$$

имеет вероятность $P(B) = 1/p^\beta$. Для любого $a \neq 0$, $a \in \text{GF}(p)$, получаем, что

$$\begin{aligned} P\{\eta_m = a\} &= P\{B\}P\{\eta = a \mid B\} + P\{\bar{B}\}P\{\eta = a \mid \bar{B}\} \\ &= (1 - 1/p^\beta)/p. \end{aligned}$$

Если $m = p+2$, то в (18) все случайные величины $\xi(J)$ и $\varphi_{m-|J|}(M_m \setminus J)$, кроме $\varphi_{m-1}(M_m \setminus \{1\})$, независимы и равномерно распределены, а число слагаемых в (18) с $|J| > 1$ равно $\gamma = 2^{p+1} - p - 3$. Обозначим событие

$$B_r = \bigcap_{\substack{J \in D_1 \\ |J| \geq m-r}} \{\varphi_{m-|J|}(M_m \setminus J) = 0\}.$$

Докажем по индукции, что из события B_r , $1 \leq r \leq p$, следует, что для любых $2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m$

$$\xi_{j_1 j_2 \dots j_r} = (-1)^{r-1} (r-1)! \xi_{j_1} \xi_{j_2} \dots \xi_{j_r}. \quad (19)$$

При $r = 2$ из $\varphi_2(\{i, j\}) = \xi_{ij} + \xi_i \xi_j = 0$ следует, что $\xi_{ij} = -\xi_i \xi_j$, и (19) выполняется. Предположим, что при выполнении события B_{r_0} , $r_0 < p$, выполняются все

равенства (19) для $r \leq r_0$. Докажем, что тогда (19) справедливо и при $r = r_0 + 1$. Пусть $M = \{j_1, j_2, \dots, j_{r_0+1}\}$; из формулы (17) находим, что

$$\varphi_{r_0+1}(M) = \sum_{J \in D_{j_{r_0+1}}} \xi(J) \varphi_{r_0+1-|J|}(M \setminus J). \quad (20)$$

Из события B_{r_0+1} следует событие B_{r_0} . Поэтому при $1 \leq |J| \leq r_0 - 1$ все $\varphi_{r_0+1-|J|}(M \setminus J) = 0$, и (20) превратится в равенство

$$\varphi_{r_0+1}(M) = \xi_{j_1 j_2 \dots j_{r_0+1}} + \sum_{k=1}^{r_0} \xi_{j_1 \dots j_k - 1 j_{k+1} \dots j_{r_0+1}} \xi_{j_k}.$$

Из B_{r_0+1} следует, что $\varphi_{r_0+1}(M) = 0$; поэтому равенство (19) выполняется и при $r = r_0 + 1 \leq p$. Таким образом, если имеет место событие B_{m-2} , то равенства (19) выполняются для всех $2 \leq r \leq p$. Покажем теперь, что события B_{m-1} и B_{m-2} равносильны, т.е. из равенства $\varphi_{m-|J|}(M \setminus J) = 0$ при всех $J \in D_1$, $|J| \geq 2$, следует, что $\varphi_{m-1}(M_m \setminus \{1\}) = 0$. Рассуждения, аналогичные тем, которые привели к доказательству (19), имеют следствием следующее равенство в $\text{GF}(p)$:

$$\varphi_{m-1}(M_m \setminus \{1\}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-1} (p-1)! \xi_2 \xi_3 \dots \xi_m = 0.$$

Таким образом, при всех $a \in \text{GF}(p)$, $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_m = a\} &= \mathbf{P}\{\bar{B}_{m-1}\} \mathbf{P}\{\eta_m = a \mid \bar{B}_{m-1}\} + \mathbf{P}\{B_{m-1}\} \mathbf{P}\{\eta_m = a \mid B_{m-1}\} \\ &= \mathbf{P}\{\bar{B}_{m-2}\} \mathbf{P}\{\eta_m = a \mid \bar{B}_{m-2}\} = (1 - 1/p^\gamma)/p, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\rho_{p+2} = 1/p^\gamma$. Теорема доказана.

При $p = 3$ с помощью преобразований

$$\begin{aligned} \xi'_{ij} &= \xi_{ij} + \xi_i \xi_j, \\ \xi'_{ijk} &= \xi_{ijk} + \xi_i \xi_{jk} + \xi_j \xi_{ik} + \xi_k \xi_{ij} + \xi_i \xi_j \xi_k \end{aligned}$$

случайную величину η_6 в (18) можно представить в виде суммы двух независимых случайных величин

$$\eta_6 = \eta' + \eta'',$$

где

$$\begin{aligned} \eta' &= \xi'_{123} \xi'_{456} + \xi'_{124} \xi'_{356} + \xi'_{125} \xi'_{346} + \xi'_{126} \xi'_{345} + \xi'_{134} \xi'_{256} + \xi'_{135} \xi'_{246} + \xi'_{136} \xi'_{245} \\ &\quad + \xi'_{145} \xi'_{236} + \xi'_{146} \xi'_{235} + \xi'_{156} \xi'_{234}, \\ \eta'' &= \xi'_{12} (\xi'_{34} \xi'_{56} + \xi'_{35} \xi'_{46} + \xi'_{36} \xi'_{45}) + \xi'_{13} (\xi'_{24} \xi'_{56} + \xi'_{25} \xi'_{46} + \xi'_{26} \xi'_{45}) \\ &\quad + \xi'_{14} (\xi'_{23} \xi'_{56} + \xi'_{25} \xi'_{36} + \xi'_{26} \xi'_{35}) + \xi'_{15} (\xi'_{23} \xi'_{46} + \xi'_{24} \xi'_{36} + \xi'_{26} \xi'_{34}) \\ &\quad + \xi'_{16} (\xi'_{23} \xi'_{45} + \xi'_{24} \xi'_{35} + \xi'_{25} \xi'_{34}). \end{aligned}$$

Случайная величина η' имеет распределение вида (15) с $\rho' = 1/3^{10}$. На ПК вычислено значение $\rho'' = 1173/3^{10}$ распределения η'' . Таким образом, распределение η_6 определяется параметром $\rho_6 = \rho' \rho'' = 1173/3^{20}$.

Список литературы

1. Ляпков Л. А., Севастьянов Б. А. Распределение вероятностей перманента случайной булевой матрицы. *Дискретная математика* (1990) 2, №2, 138–144.

Статья поступила 17.10.95.