Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Соловьев, Структура распределения информации
в бесконечной последовательности, *Дискрет. матем.*,
1996, том 8, выпуск 2, 97–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:16:19

Структура распределения информации в бесконечной последовательности

© 1996 г. В. Д. Соловьев

Ставится задача изучения структуры распределения информации в бесконечных последовательностях. Для ее решения предложен подход, основанный на восстановлении последовательности по ее подпоследовательности. Для реализации этого подхода вводится необходимый инструментарий, в частности, понятия жесткой и плотно упакованной последовательностей, характеризующие степень дублирования информации в последовательности. Рассматривается автоматная модель, в рамках которой доказано существование плотно упакованных и жестких последовательностей и установлен ряд их свойств, в частности, связь со сложностью предсказания очередного элемента последовательности.

Продемонстрирована возможность применения полученных результатов к изучению структуры степеней автоматных преобразований, доказано, что любое конечное частично упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами изоморфно начальному сегменту структуры степеней автоматных преобразований последовательностей в алфавите $\{0,1\}$. В статье обсуждается отношение полученных результатов к теории информации и кодирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-16004.

Рассмотрим произвольную бесконечную последовательность символов некоторого конечного алфавита и поставим вопрос о характере распределения информации в этой последовательности. Например, в какой мере она дублирована, насколько равномерно распределена.

Примем следующий подход к изучению структуры распределения информации в бесконечной последовательности. Выбираем некоторую подпоследовательность и стираем информацию в этой подпоследовательности, скажем, заменяя все символы в этой подпоследовательности на 0. Затем пытаемся, используя оставшуюся часть исходной последовательности, восстановить стертую информацию. В зависимости от успешности восстановления можно судить об уникальности информации, содержащейся в подпоследовательности, степени дублирования информации в исходной последовательности.

Априорно можно ожидать существование последовательностей со следующими противоположными свойствами. Приведем неформальные определения таких последовательностей.

Последовательность называется жесткой, если никакая ее собственная подпоследовательность не содержит полной информации, необходимой для восстановления всей исходной последовательности.

Последовательность называется плотно упакованной, если существуют сколь угодно редкие подпоследовательности, содержащие всю информацию исходной последовательности.

Для получения конкретных результатов необходимо уточнить, какие последовательности рассматриваются и какие средства используются для восстановления стертой информации. Настоящая статья посвящена автоматной модели.

В автоматной модели рассматриваются периодические подпоследовательности, а восстановленная последовательность получается на выходе некоторого конечного автомата при подаче на его вход частично стертой последовательности.

Доказано существование как жесткой, так и плотно упакованной последовательностей. Получена характеристика плотно упакованных последовательностей в терминах предсказания очередных символов последовательности. Введенные понятия могут быть применены к изучению структуры степеней автоматных преобразований бесконечных последовательностей: с использованием плотно упакованных последовательностей описаны конечные начальные сегменты степеней $(0, 1)$ -последовательностей.

1. Приведем необходимые определения.

Под конечным автоматом будет пониматься конечный инициальный автомат Мили $T = \langle X, S, Y, \delta, \lambda, s_0 \rangle$ с начальным состоянием $s_0 \in S$, функцией переходов $\delta: S \times X \rightarrow S$ и функцией выходов $\lambda: S \times X \rightarrow Y$. Если слово U на входе автомата T преобразуется в слово W , то пишем $T(U) = W$.

Конечный автомат может рассматриваться и как преобразователь бесконечных последовательностей. Если при подаче на вход автомата T последовательности A на выходе получается последовательность B (может быть с конечной задержкой), то будем писать $B \leq A$ и говорить, что последовательность B сводится к последовательности A (автоматом T).

Для данной бесконечной последовательности A множество последовательностей $\{B \mid B \leq A \text{ \& } A \leq B\}$ называется степенью автоматных преобразований последовательности A и обозначается $\deg(A)$. Сводимость последовательностей индуцирует частичный порядок и на множестве степеней.

Структура степеней автоматных преобразований, обозначаемая буквой V , была введена Рейна [1]. Он показал, что эта структура обладает наименьшим элементом, состоящим из периодических (с предпериодом) последовательностей и обозначаемым 0 , а также атомами, то есть такими степенями a , что

$$a > 0 \text{ \& } \neg \exists b (0 < b < a)$$

Для последовательности A символ $A(i)$ обозначает i -й по счету элемент последовательности A . Начинается последовательность A с элемента $A(0)$.

Определение 1. Пусть A — произвольная бесконечная последовательность в алфавите X и α — периодическая $(0, 1)$ -последовательность, т.е. периодическая

последовательность в алфавите $\{0, 1\}$. Последовательность B , для которой

$$B(i) = \begin{cases} A(i), & \text{если } \alpha(i) = 1, \\ 0, & \text{если } \alpha(i) = 0, \end{cases}$$

называется α -прореженной из A . Последовательность называется α -прореженной, если она α -прорежена из A для некоторой A .

Легко видеть, что для любой периодической $(0, 1)$ -последовательности α существует конечный автомат, преобразующий произвольную последовательность A в α -прореженную из A последовательность. Другими словами, если B — α -прореженная из A последовательность, то $\deg(B) \leq \deg(A)$.

Если α — периодическая $(0, 1)$ -последовательность, то $\bar{\alpha}$ будет обозначать последовательность, получающуюся из α заменой 0 на 1 и наоборот; $|\alpha|$ означает долю единиц в периодической последовательности α .

Определение 2. Последовательность A называется жесткой, если для любой периодической $(0, 1)$ -последовательности α , содержащей бесконечное число 0, α -прореженная из A последовательность имеет строго меньшую степень, чем A .

Определение 3. Последовательность A называется плотно упакованной, если существует совокупность периодических $(0, 1)$ -последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, обладающая следующими свойствами:

- (1) $\forall i (|\alpha_i| \leq 2^{-i})$,
- (2) $\forall i (\alpha_i\text{-прореженная из } A \text{ последовательность имеет ту же степень, что и } A)$.

Определение 4. Пусть для некоторой последовательности α последовательность A является α -прореженной, а последовательность B является $\bar{\alpha}$ -прореженной. Тогда последовательность C , для которой

$$C(i) = \begin{cases} B(i), & \text{если } \alpha(i) = 0, \\ A(i), & \text{если } \alpha(i) = 1, \end{cases}$$

называется нормальным сочленением (относительно α) последовательностей A и B .

Легко видеть, что степень последовательности C является наименьшей верхней гранью степеней последовательностей A и B .

Теорема 1. Любой атом структуры степеней автоматных преобразований состоит только из плотно упакованных последовательностей.

Доказательство. Пусть A — произвольная последовательность из степени, являющейся атомом структуры V степеней автоматных преобразований. Построим совокупность периодических $(0, 1)$ -последовательностей $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, обладающую требуемыми в определении 3 свойствами. Параллельно с $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ строим совокупность $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ бесконечных последовательностей.

Положим

$$\alpha'_1(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Либо α'_1 -прореженная из A , либо $\overline{\alpha'_1}$ -прореженная из A последовательность имеет ту же степень, что и A , так как в противном случае, если бы обе эти последовательности были периодическими (то есть имели строго меньшую степень, чем последовательность A), то и A , будучи нормальным сочленением относительно α'_1 этих последовательностей, была бы периодической, вопреки предположению о том, что последовательность A принадлежит атому. Допустим, что α'_1 -прореженная из A последовательность имеет ту же степень, что и A . Тогда положим $\alpha_1 = \alpha'_1$ и в качестве A_1 выбираем α'_1 -прореженную из A последовательность, в противном случае положим $\alpha_1 = \overline{\alpha'_1}$ и в качестве A_1 выбираем $\overline{\alpha'_1}$ -прореженную из A последовательность.

Пусть α_i и A_i уже определены и A_i имеет ту же степень, что и A . Пусть $k_1, k_2, \dots$ — номера единиц последовательности α_i . Положим

$$\alpha'_{i+1}(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i(j) = 0, \\ 0, & \text{если } j = k_{2s+1}, s \geq 0, \\ 1, & \text{если } j = k_{2s}, s > 0. \end{cases}$$

Либо α'_{i+1} -прореженная из A_i , либо $\overline{\alpha'_{i+1}}$ -прореженная из A_i последовательность имеет ту же степень, что и A_i (а значит и A), так как A_i является нормальным сочленением относительно α'_{i+1} этих двух последовательностей. Если ту же степень, что и A_i имеет α'_{i+1} -прореженная из A_i последовательность, то полагаем $\alpha_{i+1} = \alpha'_{i+1}$ и в качестве A_{i+1} выбираем α'_{i+1} -прореженную из A_i последовательность, в противном случае полагаем $\alpha_{i+1} = \overline{\alpha'_{i+1}}$ и в качестве A_{i+1} выбираем $\overline{\alpha'_{i+1}}$ -прореженную из A_i последовательность.

Из построения ясно, что выполняются свойства 1, 2 из определения 3 и, таким образом, последовательность A плотно упакована. Теорема доказана.

Интуитивно ясно, что в случайной последовательности никакая ее регулярным образом выделенная часть не может быть восстановлена по оставшейся части случайной последовательности. И таким образом, естественно ожидать, что случайные последовательности, определяемые как, например, в формализации Мартин-Лефа, будут жесткими. Перед доказательством этого утверждения приведем определение случайной последовательности.

В пространстве $\Phi(0, 1)$ -последовательностей стандартным образом определяется мера p на основе равенства

$$p(\{A \mid A(0) = a_0 \& \dots \& A(n-1) = a_{n-1}\}) = 2^{-n}$$

для всех $a_0, \dots, a_{n-1}$. Множество слов K называется секвенциальным, если оно содержит вместе с каждым своим словом и все слова, содержащие данное слово в качестве начальной части. Для множества слов K символ $[K]$ означает следующее множество бесконечных последовательностей: $\{B \mid \text{некоторая начальная часть последовательности } B \text{ содержится в } K\}$.

Определение 5 ([2]). Тестом называется эффективная последовательность $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ рекурсивно перечислимых множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$ такая, что

- (1) $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$,
- (2) $\forall i (K_i \text{ секвенциально})$,
- (3) $\forall i (p(K_i) \leq 2^{-i})$.

Случайной называется последовательность A такая, что

$$A \in \Phi - \bigcap_i [K_i]$$

для любого теста $\{K_i\}_{i=1}^\infty$.

Предложение 1. *Любая случайная последовательность является жесткой.*

Доказательство. Пусть A является случайной последовательностью в смысле определения 5 (такие, как известно [2], существуют) и B — α -прореженная из A последовательность для некоторой периодической $(0, 1)$ -последовательности α , содержащей бесконечно много 0. Докажем, что степень B строго меньше степени A , что и означает, что A жесткая.

Предположим противное, пусть $A \leq B$ посредством автомата T . Построим тест $\{K_i\}_{i=1}^\infty$. В этом тесте K_i соответствует i -му 0 последовательности α . Пусть в $(0, 1)$ -последовательности α цифра 0 встречается на местах с номерами $t_1, \dots, t_n, \dots$. Положим $K_i = \{Q \mid \exists U, W (U \text{ — слово длины } t_i, \text{ имеющее 0 на местах с номерами } t_1, \dots, t_i \text{ \& } T(U) = W \text{ \& } W \text{ — начальная часть слова } Q)\}$.

Выполнение условий 1–3 из определения 5 с $p(K_i) = 2^{-i}$ для всех i очевидно по построению последовательности $\{K_i\}_{i=1}^\infty$. Последовательность $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ рекурсивно перечислима и, значит, $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ — тест. Также очевидно, что

$$\forall i (A \in [K_i]),$$

то есть

$$A \in \bigcap_i [K_i],$$

и A не случайна. Получено противоречие, что и завершает доказательство предложения.

2. В этом разделе мы охарактеризуем плотно упакованные последовательности в терминах предсказаний элементов последовательности по предшествующим.

Определение 6. Пусть A произвольная бесконечная последовательность, T — конечный автомат и T преобразует A в последовательность B . Периодическую $(0, 1)$ -последовательность α_T назовем показателем предсказуемости последовательности A автоматом T , если из $\alpha_T(i) = 0$ следует, что $B(i) = A(i + 1)$.

Теорема 2. *Последовательность A плотно упакована тогда и только тогда, когда для любого числа k найдется конечный автомат T такой, что $|\alpha_T| \leq 2^{-k}$.*

Доказательство. Предположим, что A плотно упакована, α_k периодическая $(0, 1)$ -последовательность такая, что $|\alpha_k| \leq 2^{-k}$, и C — α_k -прореженная из A последовательность, и следовательно, имеет ту же степень, что и A .

Пусть m — период последовательности α_k и $0 \leq m_1 < \dots < m_p < m$ — номера единиц последовательности α_k . По предположению $p/m \leq 2^{-k}$.

Пусть T — конечный автомат, сводящий A к C , и s_0 — его начальное состояние. Определим автомат T' следующим образом.

Входной и выходной алфавиты T' те же, что и у автомата T (это алфавит, в котором задана последовательность A).

Состояниями автомата T' будут тройки $t = \langle s, s', i \rangle$, где s, s' — состояния автомата T , i — целое число в интервале $[0, m-1]$.

Функции переходов $\delta_{T'}$ и выходов $\lambda_{T'}$ автомата T' следующие:

$$\delta_{T'}(\langle s, s', i \rangle, a) = \langle s', \delta_T(s', 0), i+1 \pmod{m} \rangle,$$

если $i \neq m_1 \& \dots \& i \neq m_p$ и

$$\delta_{T'}(\langle s, s', i \rangle, a) = \langle \delta_T(s, a), \delta_T(\delta_T(s, a), 0), i+1 \pmod{m} \rangle$$

в противном случае,

$$\lambda_{T'}(\langle s, s', i \rangle, a) = \lambda_T(s', 0),$$

если $i \neq m_1 \& \dots \& i \neq m_p$, и

$$\lambda_{T'}(\langle s, s', i \rangle, a) = \lambda_T(\delta_T(s, a), 0)$$

в противном случае.

Начальным состоянием автомата T' является состояние $t_0 = \langle s_0, \delta_T(s_0, 0), 0 \rangle$.

Пусть $\alpha_{T'}$ — функция, являющаяся показателем предсказуемости последовательности A автоматом T' .

Из определения функции $\delta_{T'}$ видно, что при подаче на вход автомата T' последовательности A последовательность проходимых состояний

$$t_0 = \langle s_0, s'_0, 0 \rangle, t_1 = \langle s_1, s'_1, 1 \rangle, \dots$$

будет обладать следующими свойствами: $s'_0 = \delta_T(s_0, 0)$ и $\forall i (i \neq m_1 - 1 \pmod{m} \& \dots \& i \neq m_p - 1 \pmod{m} \rightarrow s_i$ — состояние, в которое перейдет автомат T при подаче на вход первых $i-1$ символов последовательности C , а s'_i — состояние, в которое перейдет автомат T при подаче на его вход i символов последовательности C).

Но тогда, по определению функции $\lambda_{T'}$, при $i \neq m_1 - 1 \pmod{m}, \dots, i \neq m_p - 1 \pmod{m}$ выход автомата T' при подаче на вход первых i символов последовательности A будет совпадать с выходом автомата T при подаче на его вход первых $i+1$ символов последовательности C , т. е. с $(i+1)$ -м символом последовательности A (так как автомат T по предположению преобразует C в A).

Следовательно, $\alpha_{T'}(i)$ может быть равна 1 только при

$$i = m_1 - 1 \pmod{m} \vee \dots \vee i = m_p - 1 \pmod{m}$$

и, значит, $|\alpha_{T'}| \leq p/m \leq 2^{-k}$.

Предположим обратное. Пусть последовательность A такова, что для любого k найдется автомат T такой, что $|\alpha_T| \leq 2^{-k}$, где α_T — периодическая $(0, 1)$ -последовательность.

Если для заданного числа k автомат T таков, что α_T — периодическая $(0, 1)$ -последовательность с периодом m и $|\alpha_T| \leq 2^{-k}$, то пусть C — α_T -прореженная из A последовательность и $0 \leq m_1 < \dots < m_p < m$ — номера единиц последовательности α_T .

Определим автомат T' следующим образом. Состояниями автомата T' будут тройки $\langle u, s, i \rangle$, где u — либо символ выходного алфавита T , либо символ u_0 , не входящий в этот алфавит, s — состояние автомата T , i — число в интервале $[0, m - 1]$.

Входной и выходной алфавиты автомата T' те же, что и у автомата T . Начальное состояние автомата T' равно $\langle u_0, s_0, 0 \rangle$, где s_0 — начальное состояние автомата T .

Функция выходов определяется следующим образом:

$\lambda_{T'}(\langle u_0, s_0, 0 \rangle, a) = A_0$ — первый элемент последовательности A ,

$\lambda_{T'}(\langle u, s, i \rangle, a) = \lambda_T(s, u)$, если $i > 0 \& i \neq m_1 + 1 \pmod{m} \& \dots \& i \neq m_p + 1 \pmod{m}$,

$\lambda_{T'}(\langle u, s, i \rangle, a) = a$, если $i = m_1 + 1 \pmod{m} \vee \dots \vee i = m_p + 1 \pmod{m}$.

Функция переходов определяется следующим образом:

$$\delta_{T'}(\langle u, s, i \rangle, a) = \langle \lambda_{T'}(\langle u, s, i \rangle, a), \delta_T(s, u), i + 1 \pmod{m} \rangle$$

при $i > 0$ и

$$\delta_{T'}(\langle u_0, s_0, 0 \rangle, a) = \langle \lambda_{T'}(u_0, s_0, 0), \delta_T(s_0, A(1)), 1 \rangle.$$

Методом индукции легко показывается, что при подаче на вход автомата T' последовательности C на выходе получается последовательность A . Таким образом, A сводится к C и эти две последовательности имеют одинаковую степень, так как сводимость C к A следует из того, что C — α_T -прореженная из A последовательность.

Теорема доказана.

3. Покажем, как концепция плотно упакованных последовательностей может быть применена к изучению структуры степеней автоматных преобразований.

Определение 7. Степень a называется неразложимой, если

$$\neg \exists b, c (b < a \& c < a \& \forall d (b < d \& c < d \rightarrow a < d))$$

(то есть степень a не является наименьшей верхней гранью никаких отличных от нее двух степеней).

Обозначим G множество степеней

$$\{a \mid \{b \mid b \leq a\} \text{ конечно}\}.$$

Предложение 2. Если степень неразложима, то она содержит $(0, 1)$ -последовательность.

Доказательство. Пусть A — последовательность в алфавите $\{a_1, \dots, a_n\}$, $n > 2$, содержащем наименьшее число символов среди всех последовательностей, принадлежащих неразложимой степени a . Пусть k , $k \geq 1$, — такое число, что $k^2 < n \leq (k+1)^2$. Символы алфавита $\{a_1, \dots, a_n\}$ можно рассматривать как коды пар (не обязательно всех) символов $\langle t_1, t_2 \rangle$ из алфавита, содержащего не более $k+1 < n$ символов.

Построим две новые последовательности A_1 и A_2 следующим образом: если символ $A(i)$ является кодом пары $\langle t_1, t_2 \rangle$, то $A_1(i) = t_1$ и $A_2(i) = t_2$. Так как конечный код может быть представлен в памяти конечного автомата, степени последовательностей A_1 и A_2 меньше или равны степени последовательности A , которая является наименьшей верхней гранью этих степеней. В силу предположения о неразложимости степени последовательности A , либо A_1 , либо A_2 принадлежат той же степени, что и A , но каждая из них в алфавите из меньшего числа символов, чем в алфавите последовательности A . Полученное противоречие доказывает предложение 2.

Определение 8. Назовем степень автоматных преобразований плотно упакованной, если она содержит плотно упакованную последовательность.

Предложение 3. Любая плотно упакованная степень состоит только из плотно упакованных последовательностей.

Доказательство. Пусть A — плотно упакованная последовательность, и B — произвольная последовательность, входящая в ту же степень, что и A . Тогда существуют такие конечные автоматы T_1 и T_2 , что $T_1(A) = B$ и $T_2(B) = A$ (конечной задержкой можно пренебречь). По теореме 2 для последовательности A и любого числа k найдется такой автомат T , что для последовательности α_T из определения 6 справедлива оценка $|\alpha_T| \leq 2^{-k}$.

Тогда автомат $T_1 \circ T \circ T_2$, являющийся последовательной композицией автоматов T_2, T и T_1 , предсказывает элементы последовательности B и, очевидно, $|\alpha_{T_1 \circ T \circ T_2}| \leq 2^{-k}$. Таким образом, B плотно упакована по теореме 2. Предложение доказано.

Предложение 4. Любая неразложимая степень автоматных преобразований является плотно упакованной.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Любая степень из G содержит плотно упакованную $(0, 1)$ -последовательность.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу элементов множества $\{b \mid b \leq a\}$. Если степень a неразложима (в том числе атом), то по предложению 2 она содержит некоторую $(0, 1)$ -последовательность A . Согласно предложению 4 эта последовательность является плотно упакованной.

Если степень a разложима, то пусть a является наименьшей верхней гранью степеней b и c , строго меньших a . По индуктивному предположению b и c содержат плотно упакованные $(0, 1)$ -последовательности B и C соответственно. Пусть

$\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ — совокупности периодических $(0, 1)$ -последовательностей, существующие, согласно определению 3, для последовательностей B и C соответственно.

Рассмотрим периодическую последовательность β_1 . Ее можно представить в виде

$$\beta_1(x) = 1 \leftrightarrow x \in \{k_1 + nl \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \dots \cup \{k_q + nl \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad k_1, \dots, k_q < l.$$

По предположению $|\beta_1| \leq 2^{-1}$, поэтому $q \leq l/2$.

Последовательность γ_1 может быть представлена аналогичным образом. Без ограничения общности можно, выбрав некоторое общее кратное периодов последовательностей β_1 и γ_1 , перейти к другим представлениям обеих последовательностей, но уже с одинаковым периодом.

Пусть γ_1 имеет вид

$$\gamma_1(x) = 1 \leftrightarrow x \in \{m_1 + nl \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \dots \cup \{m_t + nl \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad m_1, \dots, m_t < l, \quad t \leq l/2$$

и $h_1, \dots, h_{l-q}$ — все элементы множества $\{[0, l-1] - \{k_1, \dots, k_q\}\}$. Пусть перестановка $\varepsilon: [0, l-1] \rightarrow [0, l-1]$ такова, что $\varepsilon(m_1) = h_1, \dots, \varepsilon(m_t) = h_t$. Такая перестановка найдется, так как $t \leq l/2 \leq l-q$.

Определим последовательности γ'_1 и C' следующим образом: для $x = i + nl$

$$\begin{aligned} C'(x) &= C(\varepsilon^{-1}(i) + nl), \\ \gamma'_1(x) &= \gamma_1(\varepsilon^{-1}(i) + nl). \end{aligned}$$

Конечность перестановки ε позволяет реализовать ее конечным автоматом, и тем самым последовательность C' имеет ту же степень, что и C , и также является плотно упакованной. Кроме того

$$\forall x (\beta_1(x) = 1 \rightarrow \gamma'_1(x) = 0).$$

Отсюда следует, что существует нормальное сочленение относительно β_1 последовательностей β_1 -прореженной из B и γ_1 -прореженной из C' . Обозначим эту последовательность A . Очевидно, что A является $(0, 1)$ -последовательностью степени a . Покажем, что A плотно упакована.

Определим совокупность периодических $(0, 1)$ -последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ следующим образом.

Для всех j и для $x = i + nl$ положим

$$\gamma'_{j+1}(x) = \gamma_{j+1}(\varepsilon^{-1}(i) + nl),$$

и пусть

$$\alpha_j(x) = 1 \leftrightarrow \beta_{j+1}(x) = 1 \vee \gamma'_{j+1}(x) = 1.$$

Тогда

$$|\alpha_j| \leq |\beta_{j+1}| + |\gamma'_{j+1}| \leq 2^{-(j+1)} + 2^{-(j+1)} = 2^{-j}$$

и α_j -прореженная из A последовательность является нормальным сочленением (относительно β_1) последовательностей, являющихся β_{j+1} -прореженной из B и γ'_{j+1} -прореженной из C' . Так как степени последних двух последовательностей есть b и c , степень α_j -прореженной из A последовательности есть a .

Согласно определению 3 A плотно упакована и теорема 3 доказана.

Следствие 1. Любая степень из G состоит только из плотно упакованных последовательностей.

Доказательство следует непосредственно из предложения 3 и теоремы 3.

В теории алгоритмов общим подходом к изучению различных структур степеней является описание начальных сегментов этих структур. Для структуры V наиболее сильный результат получен С. С. Марченковым [3]. Согласно ему любое конечное частично упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами является начальным сегментом V .

Обозначим через V_2 структуру степеней $(0, 1)$ -последовательностей, определяемую аналогично V . Доказательство результата Марченкова существенным образом использует последовательности в алфавитах из более чем двух символов и, таким образом, не дает информации о начальных сегментах V_2 .

Так как все конечные начальные сегменты содержатся в множестве степеней G , из теоремы 3 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 2. Любое конечное частично упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами является начальным сегментом V_2 .

Таким образом, в данной работе показано существование бесконечных последовательностей с существенно различными структурами распределения информации в них. В последовательностях, названных жесткими, полностью отсутствует дублирование информации, любая часть жесткой последовательности несет уникальную информацию. В противоположность этому, плотно упакованные последовательности являются как бы бесконечными матрешками: сколь угодно малые части этих последовательностей содержат полную информацию исходных последовательностей. То есть здесь имеет место специфическим образом организованное бесконечное дублирование информации.

Аналог теоремы 2 для конечных слов хорошо известен в теории информации и кодирования [4]: чем точнее можно предсказывать символы текста, тем в большей степени он может быть сжат.

Подход, развиваемый в данной работе, отличается от классической теории кодирования следующими двумя главными аспектами:

- (1) мы рассматриваем кодирование бесконечных последовательностей символов, в то время как в теории кодирования изучается кодирование конечных текстов,
- (2) мы допускаем возможность массированных ошибок, например, может быть уничтожено 99,99% символов, в то время как в теории кодирования ошибки считаются редким явлением.

Суммируя, можно сказать, что развиваемый подход является предельным по отношению к теории кодирования. В некотором смысле он относится к теории кодирования так же, как Блюмовская теория сложности вычислений [6] к традиционной теории сложности.

Хотя результаты получены лишь в рамках автоматной модели, но, вероятно, обнаруженные эффекты носят устойчивый характер и могут быть получены и для других моделей при использовании для восстановления информации конечных преобразователей Гинсбурга [5] (ими являются кодеры и декодеры) или произвольных алгоритмов.

Список литературы

1. Рейна Г. Степени автоматных преобразований. *Киберн. сборник* (1977) **14**, 95–106.
2. Martin-Löf P. The definition of random sequences. *Information and Control* (1966) **9**, 61–66.
3. Марченков С. С. Конечные начальные сегменты верхней полурешетки конечно-автоматных степеней. *Дискретная математика* (1989) **1**, №3, 96–103.
4. Хэмминг Р. В. *Теория кодирования и теория информации*. Радио и связь, Москва, 1983.
5. Ginsburg S. Examples of abstract machines. *IEEE Trans. Electron. Computers* (1962) **11**, 132–135.
6. Блюм М. Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций. *Пробл. матем. логики* (1970).

Статья поступила 29.03.94.