Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степанов, О векторных инвариантах симметрической группы, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 2, 48–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:17:04

О векторных инвариантах симметрической группы

© 1996 г. С. А. Степанов

Цель работы состоит в том, чтобы дать доказательство анонсированных автором [7] в 1982 результатов об алгебраической независимости над полем k любой невырожденной системы mn различных базисных инвариантов в кольце $k[x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn}]$ относительно симметрической группы $G = S_n$. Результат статьи может быть обобщен на случай произвольной конечной группы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-01-01206-а.

1. Введение

Пусть m, n — положительные целые числа, k — поле характеристики 0 и

$$A_{mn} = k[x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn}]$$

— алгебра полиномов от mn переменных x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Симметрическая группа $G = S_n$ действует на алгебре A_{mn} как группа k -автоморфизмов в соответствии с правилом $gx_{ij} = x_{i,g(j)}$, $g \in G$. Обозначим A_{mn}^G подалгебру инвариантов алгебры A_{mn} относительно группы G и определим элементарные симметрические полиномы $u_{r_1, \dots, r_m} \in A_{mn}^G$ от векторных аргументов $(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{m1}, \dots, x_{mn})$ с помощью формального тождества

$$\prod_{j=1}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) = 1 + \sum_{1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}. \quad (1)$$

Полиномы $u_{r_1, \dots, r_m}$ образуют базис алгебры A_{mn}^G (см. [5], [1, А.IV, с. 62], [2, с. 9], [8, с. 37]). Другими словами, каждый элемент F алгебры A_{mn}^G можно представить в виде полинома от $u_{r_1, \dots, r_m}$ с коэффициентами из поля k . Этот базис содержит $\binom{m+n}{m} - 1$ элементов, связанных между собой различными алгебраическими соотношениями.

С другой стороны, согласно нормализационной теореме Нетер (см. [5] и [2, с. 17]) среди $u_{r_1, \dots, r_m}$ существует mn алгебраически независимых базисных инвариантов $u_1, \dots, u_{mn}$ таких, что A_{mn}^G конечно генерируема как модуль над $k[u_1, \dots, u_{mn}]$. Это означает, что степень трансцендентности A_{mn}^G над k равна mn (см. также [3, с. 68]). Поскольку любой инвариант $u \in A_{mn}^G$ алгебраически

зависит от $u_1, \dots, u_{mn}$, множество $\{u_1, \dots, u_{mn}\}$ можно рассматривать как базис другого типа в алгебре A_{mn}^G . Теорема Нетер утверждает лишь существование такого базиса. Цель настоящей работы — дать эффективный вариант результата Нетер.

Скажем, что система различных базисных инвариантов $u_{r_1, \dots, r_m}$ невырождена, если для любого положительного $\mu \leq m$ и любой последовательности целых чисел $(i_1, \dots, i_\mu)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_\mu \leq m$, она содержит не более μn элементов $u_{r_1, \dots, r_m}$ таких, что для каждого $i \in \{i_1, \dots, i_\mu\}$ по крайней мере одно $r_i \geq 1$ и для каждого $i \notin \{i_1, \dots, i_\mu\}$ все r_i равны нулю. Заметим, что любая подсистема невырожденной системы невырождена.

Теорема 1. Любые $s \leq mn$ элементов $u_{r_1, \dots, r_m}$ невырожденной системы различных базисных инвариантов алгебраически независимы над полем k .

В этой статье приводится также обобщение известных формул Варинга (см. [1, А.IV, с. 99])

$$\sum_{j=1}^n x_j^\sigma = \sum_{l_1+2l_2+\dots+nl_n=\sigma} c(l_1, \dots, l_n) u_1^{l_1} \dots u_n^{l_n}, \quad (2)$$

где $u_1, \dots, u_n$ — элементарные симметрические полиномы от вектора $(x_1, \dots, x_n)$,

$$c(l_1, \dots, l_n) = (-1)^{l_2+2l_3+\dots+(n-1)l_n} \frac{\sigma(l_1 + \dots + l_n - 1)!}{l_1! \dots l_n!},$$

и сумма в правой части берется по всем неотрицательным целым числам $l_1, \dots, l_n$, удовлетворяющим условию $l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma$, на случай произвольного числа $m \geq 1$ векторов $(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{m1}, \dots, x_{mn})$.

Теорема 2. Пусть $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_m$ фиксированы, $l_1, \dots, l_n; r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}; s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}$ — произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n &= l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma, \\ r_{1\mu} + r_{2\mu} + \dots + r_{m\mu} &= \nu, \quad 1 \leq \mu \leq l_\nu, \\ s_{1\nu} + s_{2\nu} + \dots + s_{m\nu} &= \nu l_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n, \end{aligned}$$

и пусть

$$v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} = \sum \prod_{\mu=1}^{l_\nu} u_{r_{1\mu}, \dots, r_{m\mu}},$$

где суммирование проводится по всем $r_{11}, \dots, r_{1l_\nu}; \dots; r_{m1}, \dots, r_{ml_\nu}$ таким, что $r_{i1} + \dots + r_{il_\nu} = s_{i\nu}$, $1 \leq i \leq m$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} = \frac{\sigma_1! \dots \sigma_m!}{\sigma!} \sum c(l_1, \dots, l_n) \sum \prod_{\nu=1}^n v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}},$$

где внутренняя сумма берется по всем $s_{11}, \dots, s_{1n}; \dots; s_{m1}, \dots, s_{mn}$ таким, что $s_{i1} + \dots + s_{in} = \sigma_i$, $1 \leq i \leq m$, а внешняя сумма берется по всем неотрицательным целым числам $l_1, \dots, l_n$, удовлетворяющим условию $l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma$.

Эти результаты позволяют перейти от mn переменных $x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn}$ к mn новым переменным $u_{r_1, \dots, r_m}$, которые могут быть выбраны из базисных инвариантов $u_{r_1, \dots, r_m}$ произвольным образом. Заметим также, что эти результаты могут быть легко перенесены на случай поля с положительной характеристикой $p > c(m, n)$.

2. Обозначения и леммы

Пусть $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$ — двоичная последовательность длины mn и $j_1, \dots, j_m$ — номера всех тех подпоследовательностей

$$\sigma = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{mj}), \quad 1 \leq j \leq n,$$

каждая из которых содержит хотя бы одну ненулевую компоненту. Пусть s_i , $1 \leq i \leq m$, равно числу тех j , $1 \leq j \leq n$, для которых $\sigma_{ij} = 1$, и пусть

$$w(\sigma) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}$$

— вес последовательности σ .

Для произвольного подмножества $\{l_1, \dots, l_s\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим $u_{r_1, \dots, r_m}^{(l_1, \dots, l_s)}$ элементарный симметрический полином от векторов

$$x_i = (x_{ij})_{1 \leq j \leq n, j \notin \{l_1, \dots, l_s\}}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

и положим

$$u_{r_1, \dots, r_m}^{(l_1, \dots, l_s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (r_1, \dots, r_m) = (0, \dots, 0), \\ 0, & \text{если } r_i < 0 \text{ хотя бы для одного } i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Лемма 1. Пусть $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$ — двоичная последовательность длины mn и $w(\sigma) = \nu$.

Если хотя бы одна подпоследовательность $\sigma_j = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{mj})$, $1 \leq j \leq n$, содержит по меньшей мере две компоненты $\sigma_{i_1 j} = 1$ и $\sigma_{i_2 j} = 1$, то

$$\frac{\partial^{w(\sigma)} u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}}} = 0.$$

Если любая подпоследовательность $\sigma_j = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{mj})$, $1 \leq j \leq n$, содержит самое большее одну компоненту $\sigma_{ij} = 1$, то

$$\frac{\partial^{w(\sigma)} u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}}} = u_{r_1 - s_1, \dots, r_m - s_m}^{(j_1, \dots, j_m)}.$$

Доказательство. Первое утверждение прямо следует из соотношения (1). Чтобы доказать второе утверждение, применим индукцию по весу $w(\sigma) \leq n$ последовательности σ . Для $w(\sigma) = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно при $w(\sigma) = \nu$, $0 \leq \nu < n$, и докажем его справедливость при $w(\sigma) = \nu + 1 \leq n$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$ — двоичная последовательность, обладающая указанным выше свойством, и $\{j_1, \dots, j_\nu\}, w(\sigma), \{s_1, \dots, s_m\}$ — соответствующие параметры этой последовательности. Если $w(\sigma) = \nu$, то в силу предположения индукции и определения $u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{j_1, \dots, j_\nu}$

$$\frac{\partial^{w(\sigma)} u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}}} = u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_\nu)}, \quad (3)$$

$$\prod_{\substack{i=1 \\ j \notin \{j_1, \dots, j_\nu\}}}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) = \sum u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_\nu)} z_1^{r_1-s_1} \dots z_m^{r_m-s_m}, \quad (4)$$

где сумма берется по всем $r_1, \dots, r_m$ таким, что

$$0 \leq (r_1 - s_1) + \dots + (r_m - s_m) \leq n - \nu.$$

Обозначим $j_{\nu+1}$ один из тех номеров $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых

$$\sigma_j = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{mj}) = (0, \dots, 0),$$

и применим оператор $\partial/\partial x_{ij_{\nu+1}}$ к обеим частям тождества (4). В результате получим, что

$$\begin{aligned} z_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \dots, j_{\nu+1}\}}}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) \\ = \sum_{0 \leq (r_1-s_1) + \dots + (r_m-s_m) \leq n-\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij_{\nu+1}}} u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_m)} \right) z_1^{r_1-s_1} \dots z_m^{r_m-s_m}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$\begin{aligned} z_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \dots, j_{\nu+1}\}}}^n (1 + x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m) \\ = z_i \left(\sum_{0 \leq (r_1-s_1) + \dots + (r_m-s_m) \leq n-\nu-1} u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_{\nu+1})} z_1^{r_1-s_1} \dots z_m^{r_m-s_m} \right) \\ = \sum_{0 \leq (r_1-s_1) + \dots + (r_m-s_m) \leq n-\nu} u_{r_1-s_1, \dots, r_i-s_i-1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_{\nu+1})} z_1^{r_1-s_1} \dots z_m^{r_m-s_m} \end{aligned}$$

и сравним его с предыдущим соотношением. В результате получим равенство

$$\frac{\partial u_{r_1-s_1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_\nu)}}{\partial x_{ij_{\nu+1}}} = u_{r_1-s_1, \dots, r_i-s_i-1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_{\nu+1})}$$

из которого в силу (3) следует, что

$$\frac{\partial^{w(\sigma)+1} u_{r_1, \dots, r_m}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}} \dots \partial x_{ij_{\nu+1}} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}}} = u_{r_1-s_1, \dots, r_i-s_i-1, \dots, r_m-s_m}^{(j_1, \dots, j_{\nu+1})}.$$

Лемма доказана.

Обозначим R_{mn} множество всех последовательностей $r = (r_1, \dots, r_m)$ неотрицательных целых чисел $r_1, \dots, r_m$, удовлетворяющих условию $1 \leq r_1 + \dots + r_m \leq n$, и рассмотрим подмножество M_s множества R_{mn} мощности s . Занумеруем элементы множества M_s числами $1, 2, \dots, s$, полагая $r = r(k)$, $1 \leq k \leq s$, и для заданного множества $N_s = \{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}$ различных пар целых чисел (i_l, j_l) , где $1 \leq i_l \leq m$, $1 \leq j_l \leq n$, $1 \leq l \leq s$, рассмотрим детерминант

$$\Delta_s = \det \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in N_s, 1 \leq k \leq s}.$$

Пусть $\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ — последовательность целых чисел длины mn с неотрицательными элементами и

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{ij}$$

— вес этой последовательности.

Для каждой пары целых чисел (i, j) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, рассмотрим множество всех последовательностей $k_{ij} = (k_{ij}^{(1)}, \dots, k_{ij}^{(\tau_{ij})})$ с взаимно различными элементами $k_{ij}^{(1)}, \dots, k_{ij}^{(\tau_{ij})} \in \{1, 2, \dots, s\}$ и положим $k_{ij} = \emptyset$ при $\tau_{ij} = 0$. Введем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(k) &= \begin{cases} 1 & \text{если } k \in \{k_{ij}^{(1)}, \dots, k_{ij}^{(\tau_{ij})}\}, \\ 0 & \text{если } k \notin \{k_{ij}^{(1)}, \dots, k_{ij}^{(\tau_{ij})}\}, \end{cases} \\ \sigma(k) &= (\sigma_{11}(k), \dots, \sigma_{1n}(k); \dots; \sigma_{m1}(k), \dots, \sigma_{mn}(k)), \\ w(\sigma(k)) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(k) \end{aligned}$$

и обозначим

$$\Delta_s(k_{11}, \dots, k_{1n}; \dots; k_{m1}, \dots, k_{mn})$$

детерминант, получаемый из Δ_s заменой элементов

$$\frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}}, \quad (i, j) \in N_s,$$

k -го столбца элементами

$$\frac{\partial^{w(\sigma(k))+1} u_{r(k)}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}(k)} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}(k)} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}(k)} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}(k)} \partial x_{ij}}, \quad (i, j) \in N_s.$$

Применяя к Δ_s известное правило дифференцирования детерминантов с функциональными элементами и замечая, что

$$\frac{\partial^{\sigma_{ij}} u_{r(k)}}{\partial x_{ij}^{\sigma_{ij}}} = 0$$

для всех $k = 1, 2, \dots, s$ и для всех (i, j) , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, таких, что $\sigma_{ij} > 1$, приходим к следующему результату.

Лемма 2. Для последовательности $\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ с целыми неотрицательными элементами

$$\frac{\partial^{w(\tau)} \Delta_s}{\partial x_{11}^{\tau_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau_{mn}}} = \sum_{(k_{11}, \dots, k_{mn})} \Delta_s(k_{11}, \dots, k_{1n}; \dots; k_{m1}, \dots, k_{mn}).$$

Для последовательности

$$\mathcal{M}_s = \{r(k) \in R_{mn} \mid 1 \leq k \leq s\}, \quad 1 \leq s \leq mn,$$

рассмотрим соответствующую систему

$$U_s = \{u_{r(k)} \mid r(k) \in \mathcal{M}_s, 1 \leq k \leq s\}$$

векторных инвариантов $u_{r(k)}$ и обозначим через

$$J_s = \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s}$$

Якобиан системы U_s .

Лемма 3. Для заданной невырожденной системы

$$U_s = \{u_{r(k)} \mid r(k) \in \mathcal{M}_s, 1 \leq k \leq s\}, \quad 1 \leq s \leq mn,$$

различных векторных инвариантов u_r , найдется последовательность

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}), \quad 1 \leq \tau_{ij} \leq s,$$

с целочисленными элементами и множество

$$\mathcal{N}_s = \{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}$$

различных пар целых чисел (i_l, j_l) , $1 \leq i_l \leq m, 1 \leq j_l \leq n, 1 \leq l \leq s$, такие, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{w(\tau)}}{\partial x_{11}^{\tau_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau_{mn}}} \det \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in \mathcal{N}_s, 1 \leq k \leq s} \\ = \tau_{11}! \dots \tau_{1n}! \dots \tau_{m1}! \dots \tau_{mn}! \det A_s, \end{aligned} \quad (5)$$

где A_s — двоичная $s \times s$ матрица ранга s , которая элементарными операциями над строками сводится к единичной $s \times s$ матрице

$$I_s = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по s , $1 \leq s \leq mn$. Пусть $u_r = u_{r_1, \dots, r_m}$ — произвольный элементарный симметрический полином m векторных переменных

$$(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

и $w(r) = r_1 + \dots + r_m$ — вес последовательности $r = (r_1, \dots, r_m)$.

Согласно лемме 1

$$\frac{\partial^{w(r)} u_r}{\partial x_{11} \dots \partial x_{1r_1} \partial x_{2, r_1+1} \dots \partial x_{2, r_1+r_2} \dots \partial x_{m, r_1+\dots+r_{m-1}+1} \dots \partial x_{m, r_1+\dots+r_m}} = u_{0, \dots, 0}^{(l_1, \dots, l_m)} = 1,$$

и для $s = 1$ утверждение справедливо.

Предположим, что утверждение верно для $s - 1 \geq 1$ и докажем его для $s \geq 2$. Пусть

$$\mathcal{M}_s = \{r(k) \in R_{mn} \mid 1 \leq k \leq s\}$$

— упорядоченное множество мощности s , состоящее из элементов $r = (r_1, \dots, r_m) \in R_{mn}$, и

$$U_s = \{u_{r(k)} \mid r(k) \in \mathcal{M}_s\}$$

— соответствующая невырожденная система различных векторных инвариантов $u_{r(k)}$, $1 \leq k \leq s$. Пусть

$$J_s = \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s}$$

— Якобиан системы U_s . Предположим, что множество $\mathcal{M}_s$ упорядочено так, что $w(r(1)) \leq w(r(2)) \leq \dots \leq w(r(s))$. Случай, когда все элементы системы $\mathcal{M}_s$ имеют вес 1, тривиален, поэтому без потери общности можно предположить, что хотя бы одна последовательность $r(k) = (r_1(k), \dots, r_m(k))$, $1 \leq k \leq s$, имеет вес $w(r(k)) \geq 2$. Таким образом, можно принять, что

$$\nu = w(r(s)) \geq 2.$$

По предположению индукции найдутся последовательность целых чисел

$$\tau' = (\tau'_{11}, \dots, \tau'_{1n}; \dots; \tau'_{m1}, \dots, \tau'_{mn}), \quad 1 \leq \tau'_{ij} \leq s-1,$$

и $(s-1) \times (s-1)$ матрица

$$H'_{s-1} = \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in N'_{s-1}, 1 \leq k \leq s-1}, \quad N'_{s-1} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{s-1}, j_{s-1})\}, \quad (6)$$

состоящая из первых $s-1$ столбцов и первых $s-1$ строк Якобиана J_s , такие, что детерминант $\Delta'_{s-1} = \det H'_{s-1}$ матрицы H'_{s-1} удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^{w(\tau')} \Delta'_{s-1}}{\partial x_{11}^{\tau'_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau'_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau'_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau'_{mn}}} = \tau'_{11}! \dots \tau'_{1n}! \dots \tau'_{m1}! \dots \tau'_{mn}! \det A'_{s-1}, \quad (7)$$

где A'_{s-1} — невырожденная двоичная $(s-1) \times (s-1)$ матрица, которая элементарными операциями над строками сводится к единичной матрице I_{s-1} .

Фиксируем теперь множество

$$N'_{s-1} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{s-1}, j_{s-1})\},$$

и последовательность

$$\tau' = (\tau'_{11}, \dots, \tau'_{1n}; \dots; \tau'_{m1}, \dots, \tau'_{mn})$$

с указанными выше свойствами и покажем, что существует пара целых чисел (i_s, j_s) , $1 \leq i_s \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, и последовательность целых чисел

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn}), \quad 1 \leq \tau_{ij} \leq s,$$

такие, что справедливо равенство (5) для детерминанта

$$\Delta_s = \det \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in N_s, 1 \leq k \leq s} \quad N_s = \{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}.$$

Опишем теперь индукционный процесс, используемый для построения требуемых пары (i_s, j_s) и последовательности $\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$. Пусть

$$N'_{s-1} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{s-1}, j_{s-1})\}, \quad \tau' = (\tau'_{11}, \dots, \tau'_{1n}; \dots; \tau'_{m1}, \dots, \tau'_{mn})$$

таковы, что детерминант Δ'_{s-1} матрицы (6) удовлетворяет соотношению (7). Пусть

$$\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$$

— такая двоичная последовательность с параметрами

$$\nu = w(\sigma) = w(r(s)) = r_1(s) + \dots + r_m(s), \quad (s_1, \dots, s_m) = (r_1(s), \dots, r_m(s)),$$

что любая ее подпоследовательность вида $\sigma_\rho = (\sigma_{1\rho}, \dots, \sigma_{m\rho})$, $1 \leq \rho \leq n$, сожержит не более одного элемента $\sigma_{i\rho} = 1$. Пусть $\rho_1, \dots, \rho_\nu$ — номера тех последовательностей $\sigma_\rho = (\sigma_{1\rho}, \dots, \sigma_{m\rho})$, $1 \leq \rho \leq n$, которые содержат ровно один элемент $\sigma_{i\rho} = 1$, и предположим, что $j_s \in \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$. Тогда по лемме 1

$$\frac{\partial^{w(\sigma)} u_{r(s)}}{\partial x_{11}^{\sigma_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\sigma_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\sigma_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\sigma_{mn}}} = u_{0, \dots, 0}^{(\rho_1, \dots, \rho_\nu)} = 1. \quad (8)$$

Обозначим

$$\omega = (\omega_{11}, \dots, \omega_{1n}; \dots; \omega_{m1}, \dots, \omega_{mn})$$

двоичную последовательность, получаемую из последовательности

$$\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn}),$$

заменой подпоследовательности $\sigma_{j'} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, начинающейся с j' нулей, на нулевую последовательность $(0, \dots, 0)$. Существует

$$L_s = \frac{n!}{r_1(s)! \dots r_m(s)! (n - r_1(s) - \dots - r_m(s))!}$$

различных последовательностей $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$, удовлетворяющих соотношению (8), и эти последовательности порождают

$$M_s = \sum_{i=1}^m \frac{n!}{r_1(s)! \dots (r_i(s) - 1)! \dots r_m(s)! (n - r_1(s) - \dots - r_m(s) + 1)!}$$

двоичных последовательностей $\alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}; \dots; \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$, с элементами

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{\partial^{w(\omega)} u_{r(s)}}{\partial x_{11}^{\omega_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\omega_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\omega_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\omega_{mn}}} \right),$$

соответствующих всем возможным последовательностям $\sigma = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n}; \dots; \sigma_{m1}, \dots, \sigma_{mn})$. Последовательности α не обязательно различны, но для любого заданного i , $1 \leq i \leq m$, они содержат в точности

$$N_s = \binom{n}{r_1(s) + \dots + r_m(s) - 1} = \binom{n}{\nu - 1}$$

различных последовательностей вида

$$\alpha = (0, \dots, 0; \dots; \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}; \dots; 0, \dots, 0),$$

где каждая последовательность $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ имеет ровно $r_1(s) + \dots + r_m(s) - 1$ нулей и $n - r_1(s) - \dots - r_m(s) + 1$ единиц. Таким образом, имеется большое число различных кандидатов на место последнего столбца матрицы A_s , соответствующих различным последовательностям целых чисел

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$$

вида

$$\tau = (\tau'_{11} + \omega_{11}, \dots, \tau'_{1n} + \omega_{1n}; \dots; \tau'_{m1} + \omega_{m1}, \dots, \tau'_{mn} + \omega_{mn}). \quad (9)$$

Мы используем этот факт позднее, а сейчас установим справедливость соотношения (5). Докажем индукцией по s , что для любой заданной пары целых чисел $(i_s, j_s) \notin N'_{s-1}$, $1 \leq i_s \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, и любой заданной последовательности целых чисел

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$$

вида (9) соотношение (5) выполняется для единственной двоичной $s \times s$ матрицы A_s . Эта матрица A_s строится следующим образом. Разлагая детерминант Δ_s по последнему столбцу, находим, что

$$\Delta_s = \sum_{(i,j) \in N_s, (i,j) = (i_l, j_l)} (-1)^{s+l} \frac{\partial u_{r(s)}}{\partial x_{ij}} \Delta_{i,j,s-1}.$$

Согласно предположению индукции

$$\frac{\partial^{w(\tau')} \Delta_{i,j,s-1}}{\partial x_{11}^{\tau'_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau'_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau'_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau'_{mn}}} = \tau'_{11}! \dots \tau'_{1n}! \dots \tau'_{m1}! \dots \tau'_{mn}! \det A_{i,j,s-1}$$

для единственной двоичной $(s-1) \times (s-1)$ матрицы $A_{i,j,s-1}$. Используя теперь известную формулу Лейбница, находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{w(\tau)} \Delta_s}{\partial x_{11}^{\tau_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau_{mn}}} \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in N_s \\ (i,j)=(i,j_i)}} (-1)^{s+l} \sum_{\nu_{11}=0}^{\tau_{11}} \dots \sum_{\nu_{mn}=0}^{\tau_{mn}} \binom{\tau_{11}}{\nu_{11}} \dots \binom{\tau_{mn}}{\nu_{mn}} \frac{\partial^{w(\nu)+1} u_{r(s)}}{\partial x_{ij} \partial x_{11}^{\nu_{11}} \dots \partial x_{mn}^{\nu_{mn}}} \\ & \quad \times \frac{\partial^{w(\tau)-w(\nu)-1} \Delta_{i,j,s-1}}{\partial x_{11}^{\tau_{11}-\nu_{11}} \dots \partial x_{mn}^{\tau_{mn}-\nu_{mn}}} \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in N_s \\ (i,j)=(i,j_i)}} (-1)^{s+l} \binom{\tau_{11}}{\omega_{11}} \dots \binom{\tau_{mn}}{\omega_{mn}} \omega_{11}! \dots \omega_{mn}! \tau'_{11}! \dots \tau'_{mn}! \det A_{i,j,s-1} \\ &= \tau_{11}! \dots \tau_{1n}! \dots \tau_{m1}! \dots \tau_{mn}! \det A_s. \end{aligned}$$

Покажем, что для любой пары целых чисел

$$(i_s, j_s) \notin N'_{s-1}, \quad 1 \leq i_s \leq m, \quad 1 \leq j_s \leq n,$$

можно подобрать последовательность целых чисел

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$$

вида (9), для которой последний столбец соответствующей матрицы A_s в равенстве (5) отличен от всех остальных столбцов. Для любого заданного l , $1 \leq l \leq s$, обозначим n_l число позиций (i_l, j) , $1 \leq j \leq n$, в которых последний столбец матрицы

$$H_s = \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in N_s, 1 \leq k \leq s}$$

содержит ровно n_l ненулевых элементов, и положим $p_s = n_1 + \dots + n_s$.

Если $p_s = 0$, то последний столбец матрицы A_s целиком состоит из нулей и, следовательно, отличается от остальных столбцов матрицы A_s . Предположим теперь, что $p_s \geq 1$. В силу приведенных выше соображений для любого $l = 1, 2, \dots, s$ такого, что $r_i(s) \geq 1$ при $i = i_l$, существует ровно

$$N_s = \binom{n}{\nu-1}$$

различных двоичных последовательностей $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$, состоящих из $\nu-1$ нулей и $n-\nu+1$ единиц. Если мы исключим все элементы вектора α_i в каких-либо произвольных $n-n_l$ позициях, то получим ровно

$$q_l = \sum_{\sigma=\nu_0-1-(n-n_l)}^{\nu_0-1} \binom{n_l}{\sigma}$$

различных двоичных последовательностей длины n_l , где $\nu_0 = \min(\nu, n - \nu + 2)$ и $\binom{n_l}{\sigma} = 0$ при $\sigma > n_l$ и при $\sigma < 0$.

Предположим, что $n_l \geq 1$ для некоторого $l = 1, 2, \dots, s$ и рассмотрим n_l строк матрицы A_s , занумерованных парами целых чисел $(i_l, j) \in N_s$ с заданным i_l . Пусть $k_1, \dots, k_\mu$, $1 \leq k_1 < \dots < k_\mu < s$, — номера тех столбцов матрицы A_s , которые пересекаются с рассматриваемыми строками по ненулевым двоичным векторам длины n_l , скажем $v_{k_1}, \dots, v_{k_\mu}$. Как следует из строения матрицы A_s , все остальные элементы соответствующих столбцов, расположенные вне выбранных n_l позиций, равны нулю. Матрица A'_{s-1} несингулярна и система U_s невырождена, поэтому

$$\mu \leq \lambda_l = \min(n_l, n - 1)$$

и, кроме того, векторы $v_{k_1}, \dots, v_{k_\mu}$ различны. Таким образом, для выбора последнего столбца матрицы A_s имеется q_l различных возможностей, при которых все элементы столбца, расположенные вне n_l выбранных позиций, равны нулю, и только $\mu \leq \lambda_l$ различных возможностей для выбора остальных столбцов с тем же свойством. Поскольку $q_l > \lambda_l$ для любого $n_l \geq 1$, последний столбец может быть выбран так, чтобы он отличался от всех остальных столбцов матрицы A_s . Более того, если $n_l > 1$, то можно выбрать последний столбец, удовлетворяющий указанному свойству, ненулевым. Действительно, если $\nu_0 = 2$, то множество $\{v_{k_1}, \dots, v_{k_\mu}\}$ содержит не более одного вектора веса 1 или $n_l - 1$, и имеется $n_l > 1$ вариантов выбора последнего столбца матрицы A_s в виде вектора того же веса. Теперь, если $\nu_0 > 2$, то $q_l > \lambda_l + 1$, и поэтому опять можно выбрать последний столбец матрицы A_s ненулевым.

Фиксируем последовательность целых чисел

$$\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$$

обладающую описанным свойством, и найдем пару целых чисел $(i_s, j_s) \notin N'_{s-1}$, $1 \leq i_s \leq m$, $1 \leq j_s \leq n$, обеспечивающую выполнение требования, состоящего в том, что матрица A_s в (5) может быть преобразована к единичной матрице I_s . Положим

$$N''_{s-1} = N_s \setminus \{(i_1, j_1)\}$$

и рассмотрим матрицу

$$H''_{s-1} = \left\| \frac{\partial u_{r(k)}}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in N''_{s-1}, 2 \leq k \leq s}$$

По предположению индукции найдется пара целых чисел (i_s, j_s) и последовательность целых чисел $\tau'' = (\tau''_{11}, \dots, \tau''_{1n}; \dots; \tau''_{m1}, \dots, \tau''_{mn})$, $1 \leq \tau''_{ij} \leq \tau_{ij}$, такие, что детерминант $\Delta''_{s-1} = \det H''_{s-1}$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^{w(\tau'')} \Delta''_{s-1}}{\partial x_{11}^{\tau''_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau''_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau''_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau''_{mn}}} = \tau''_{11}! \dots \tau''_{1n}! \dots \tau''_{m1}! \dots \tau''_{mn}! \det A''_{s-1}, \quad (10)$$

где A''_{s-1} — невырожденная двоичная $(s-1) \times (s-1)$ матрица, которая может быть преобразована элементарными операциями над строками к диагональной матрице I_{s-1} .

Фиксируем последовательность целых чисел

$$\tau'' = (\tau''_{11}, \dots, \tau''_{1n}; \dots; \tau''_{m1}, \dots, \tau''_{mn})$$

и пару целых чисел (i_s, j_s) , которые удовлетворяют соотношению (10), и покажем, что при сделанном выборе (i_s, j_s) и $\tau = (\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}; \dots; \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ матрица A_s в (5) обладает всеми свойствами, указанными в формулировке леммы. Действительно, из леммы 2 и соотношений (8) и (9) следует, что

$$\frac{\partial^{w(\tau)} \Delta_s}{\partial x_{11}^{\tau_{11}} \dots \partial x_{1n}^{\tau_{1n}} \dots \partial x_{m1}^{\tau_{m1}} \dots \partial x_{mn}^{\tau_{mn}}} = \tau_{11}! \dots \tau_{1n}! \dots \tau_{m1}! \dots \tau_{mn}! \det A_s,$$

где

$$A_s = \|a_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq s-1}$$

— двоичная $s \times s$ матрица, содержащая $(s-1) \times (s-1)$ подматрицы

$$A'_{s-1} = \|a_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq s-1}, \quad A''_{s-1} = \|a_{ij}\|_{2 \leq i, j \leq s}.$$

Поскольку матрицы A'_{s-1} и A''_{s-1} элементарными операциями над строками могут быть преобразованы в единичную матрицу I_{s-1} , сама матрица A_s аналогичными операциями может быть приведена к виду

$$\bar{A}_s = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1s} & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ c_{s1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \end{array} \right\|.$$

Поскольку столбцы матрицы A_s различны, столбцы $\bar{A}_s$ также различны. В таком случае $c_{1s}c_{s1} = 0$, и следовательно, матрица A_s эквивалентна единичной матрице I_s . Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Предположим, что существует невырожденная система, состоящая из $s \leq mn$ различных векторных инвариантов $u_r = u_{r_1, \dots, r_m}$, алгебраически зависимых над полем k , и покажем, что это предположение ведет к противоречию.

Пусть указанная выше система имеет вид

$$U_s = \{u_r \mid r \in \mathcal{M}_s\},$$

где $\mathcal{M}_s$ — подмножество мощности s множества R_{mn} , и пусть

$$T_s = \{t_r \mid r \in \mathcal{M}_s\}$$

— соответствующая система независимых переменных $t_r = t_{r_1, \dots, r_m}$. Из предположения об алгебраической зависимости векторных инвариантов u_r , $r \in \mathcal{M}_s$, над полем k следует, что существует такой полином $F \in k[T_s]$, что

$$F(U_s) = 0 \tag{11}$$

тождественно для всех $x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}$. Можно считать, что F — полином минимальной степени, удовлетворяющий равенству (11). Дифференцируя тождество (11) по x_{ij} , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, получаем систему mn линейных уравнений

$$\sum_{r \in \mathcal{M}_s} \frac{\partial F(U_s)}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial x_{ij}} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \tag{12}$$

относительно s полиномов $\partial F(U_s)/\partial u_r$, $r \in \mathcal{M}_s$. Поскольку F — полином минимальной степени, удовлетворяющий соотношению (11), $\partial F(U_s)/\partial u_r \neq 0$ по крайней мере для одной последовательности $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathcal{M}_s$. Поэтому, чтобы получить требуемое противоречие, достаточно установить существование множества $\mathcal{N}_s = \{(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)\}$, состоящего из s пар целых чисел (i_l, j_l) , $1 \leq l \leq s$, где $1 \leq i_l \leq m, 1 \leq j_l \leq n$, для которого детерминант

$$\Delta_s = \det \left\| \frac{\partial u_r}{\partial x_{ij}} \right\|_{(i,j) \in \mathcal{N}_s, r \in \mathcal{M}_s}$$

не равен нулю. Существование такого детерминанта Δ_s для любого s , $1 \leq s \leq mn$ следует из леммы 3. Это завершает доказательство.

4. Доказательство теоремы 2

В (2) положим $x_j = x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$(x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m)^\sigma = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m},$$

и

$$\sum_{j=1}^n (x_{1j}z_1 + \dots + x_{mj}z_m)^\sigma = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq n} \prod_{s=1}^{\nu} (x_{1j_s}z_1 + \dots + x_{mj_s}z_m) = \sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m}$$

и, следовательно, в силу (2)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \\ = \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma} c(l_1, \dots, l_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{r_1 + \dots + r_m = \nu} u_{r_1, \dots, r_m} z_1^{r_1} \dots z_m^{r_m} \right)^{l_\nu}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_m!} \left(\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \\ = \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma} c(l_1, \dots, l_n) \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{s_{1\nu} + \dots + s_{m\nu} = \nu l_\nu} v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} z_1^{s_{1\nu}} \dots z_m^{s_{m\nu}} \right) \\ = \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma} c(l_1, \dots, l_n) \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \left(\sum_{\substack{s_{i1} + \dots + s_{in} = \sigma_i \\ 1 \leq i \leq m}} \prod_{\nu=1}^n v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \\ = \sum_{\sigma_1 + \dots + \sigma_m = \sigma} \left(\sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma} c(l_1, \dots, l_n) \sum_{\substack{s_{i1} + \dots + s_{in} = \sigma_i \\ 1 \leq i \leq m}} \prod_{\nu=1}^n v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}} \right) z_1^{\sigma_1} \dots z_m^{\sigma_m} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^{\sigma_1} \dots x_{mj}^{\sigma_m} = \frac{\sigma_1! \dots \sigma_m!}{\sigma!} \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + nl_n = \sigma} c(l_1, \dots, l_n) \sum_{\substack{s_{i1} + \dots + s_{in} = \sigma_i \\ 1 \leq i \leq m}} \prod_{\nu=1}^n v_{s_{1\nu}, \dots, s_{m\nu}}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Bourbaki N. *Elements of Mathematics, Algebra II*, Springer, Berlin, 1990.
2. Benson D. J. *Polynomial Invariants of Finite Groups*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
3. Dieudonne J. A., Carrel J. B. *Invariant Theory, Old and New*. Academic Press, New York, 1971.
4. Mumford D. *Geometric Invariant Theory*. Springer, Berlin, 1993.
5. Noether E. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Math. Ann.* (1916) **77**, 89–92.
6. Springer T. A. *Invariant Theory*. Springer, Berlin, 1977.
7. Степанов С. А. Рациональные экспоненциальные суммы и L -функции Артина. *Докл. АН СССР* (1982) **265**, 39–42.
8. Weyl H. *The Classical Groups*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

Статья поступила 11.11.1995.