Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Дудек, О классе слабо полуабелевых полиадических групп, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 40–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:45:47

О классе слабо полуабелевых полиадических групп

© 1996 г. В. А. Дудек

Работа посвящена изучению m -полуабелевых n -арных групп Дёрнте. Изучаются свойства таких групп и находятся необходимые и достаточные условия, при которых n -арная группа является слабо m -полуабелевой. Доказывается, что для всех $m \geq 3$ существуют первообразные (т.е. неприводимые) слабо полуабелевые n -арные группы.

Рассматривается класс слабо m -полуабелевых n -арных групп, являющихся обобщением n -арных групп Дёрнте [1], m -полуабелевых в смысле Поста [2]. Находятся необходимые и достаточные условия, при которых данная n -арная группа является слабо m -полуабелевой. В классе слабо m -полуабелевых n -арных групп строятся первообразные (т.е. неприводимые) n -арные группы.

Все основные обозначения и понятия взяты из книги [3]. Их можно также найти в цитированных ниже работах автора.

Буквами m и n всегда будем обозначать натуральные числа такие, что $n \geq 3$ и $m - 1$ делит $n - 1$.

Определение. Будем говорить, что n -арный группоид $\langle G, f \rangle$ слабо m -полуабелев, если для всех $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ на нем выполнено тождество

$$f(x_1^{i-1}, y, x^{(m-1)}, x_i^{n-m}) = f(x_1^{i-1}, x^{(m-1)}, y, x_i^{n-m}). \quad (1)$$

Здесь и далее x_1^k обозначает последовательность $x_1, \dots, x_k$, а $x^{(k)}$ — последовательность $x, \dots, x$ с k элементами.

Для n -арных групп Дёрнте это определение равносильно следующему определению Гальмака (см. [4]): n -арная группа $\langle G, f \rangle$ называется слабо m -полуабелевой, если для всех $x, y \in G$ последовательности $y, x^{(m-1)}$ и $x^{(m-1)}, y$ эквивалентны в смысле Поста.

Слабо n -полуабелевые n -арные группоиды (группы) будут называться слабо полуабелевыми. Очевидно, что слабо 2-полуабелевые n -арные группоиды коммутативны.

В силу определения всякий m -полуабелев n -арный группоид (см. [5]) является слабо m -полуабелевым, а всякий слабо m -полуабелев — слабо полуабелевым.

Заметим еще, что из тождеств Дёрнте (см. [1, 6]) следует, что все идемпотентные n -арные группы слабо полуабелевы, но не все они полуабелевы. Это значит, что класс всех слабо m -полуабелевых n -арных групп шире класса всех

m -полуабелевых n -арных групп. Однако класс всех идемпотентных слабо полуабелевых 3-групп и класс всех идемпотентных полуабелевых 3-групп совпадают. Все выше указанные классы являются подмногообразиями многообразия n -арных групп. Систему тождеств, определяющих эти многообразия, легко вывести из системы тождеств, определяющих многообразия n -арных групп. Минимальная система таких тождеств приведена в [6].

Легко проверить, что всякая полиадическая группа $\langle G, g \rangle \langle c_2^n \rangle$ -производна (в смысле [7]) от слабо m -полуабелевой n -арной группы $\langle G, f \rangle$, т.е. полиадическая группа $\langle G, g \rangle$ с операцией

$$g(x_1^{t(n-1)+1}) = f(f(\dots f(f(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}), \dots, x_{(t-1)(n-1)+2}^{t(n-1)+1}), c_2^n),$$

сама является слабо m -полуабелевой. Обратное утверждение не верно — n -арный ретракт $\text{ret}_{a_2^k} \langle G, h \rangle$ (см. [7]) слабо m -полуабелевой группы $\langle G, h \rangle$ арности $k(n-1)+1$ не всегда будет слабо m -полуабелевым.

Рассмотрим теперь множество

$$G_a = \{x \in G \mid f(x, a^{(n-1)}) = f(a^{(n-1)}, x)\},$$

где a — фиксированный элемент n -арной группы $\langle G, f \rangle$. Это множество в группе $\text{ret}_{a, \dots, a} \langle G, f \rangle$ (см. [7]) является централизатором элемента a . Поэтому оно всегда непусто. Кроме этого, $f(x_1^n) \in G_a$ для всех $x_1, \dots, x_n \in G_a$.

Действительно, если $x_1, \dots, x_n \in G_a$, то

$$\begin{aligned} f(f(x_1^n), a^{(n-1)}) &= f(x_1^{n-1}, f(x_n, a^{(n-1)})) = f(x_1^{n-1}, f(a^{(n-1)}, x_n)) \\ &= f(x_1^{n-2}, f(x_{n-1}, a^{(n-1)}), x_n) = \dots = f(a^{(n-1)}, f(x_1^n)). \end{aligned}$$

Одновременно,

$$\begin{aligned} &f(f(\bar{x}, a^{(n-1)}), f(x, a^{(n-1)}), \dots, f(x, a^{(n-1)})) \\ &= f(\bar{x}, f(f(a^{(n-1)}, x), a^{(n-1)}), f(x, a^{(n-1)}), \dots, f(x, a^{(n-1)})) \\ &= f_{(n)}(f(\bar{x}, x^{(n-1)}), a^{(n-1)}, \dots, a^{(n-1)}) = f_{(n)}(x, a^{(n-1)}, \dots, a^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} &f(f(a^{(n-1)}, \bar{x}), f(x, a^{(n-1)}), \dots, f(x, a^{(n-1)})) \\ &= f_{(n)}(a^{(n-1)}, f(\bar{x}, x^{(n-1)}), a^{(n-1)}, \dots, a^{(n-1)}) = f(x, a^{(n-1)}, \dots, a^{(n-1)}), \end{aligned}$$

откуда $f(\bar{x}, a^{(n-1)}) = f(a^{(n-1)}, \bar{x})$ для всех $x \in G_a$. Итак, с помощью результатов работы Дёрнте [1] мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. $\langle G_a, f \rangle$ является n -арной подгруппой в слабо m -полуабелевой n -арной группе $\langle G, f \rangle$.

Следствие 1. n -арная группа $\langle G, f \rangle$ слабо полуабелева тогда и только тогда, когда $G = G_a$ для всех $a \in G$.

Согласно теореме Глускина–Хоссу [3], всякая n -арная группа $\langle G, f \rangle$ есть $\langle \theta, b \rangle$ -производная от некоторой группы $\langle G, \cdot \rangle$, т. е. она имеет вид $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, b} \langle G, \cdot \rangle$ (см. [7]). Это значит, что на множестве G можно определить бинарную группу $\langle G, \cdot \rangle$ такую, что

$$f(x_1^n) = x_1 \cdot \theta x_2 \cdot \theta^2 x_3 \cdot \dots \cdot \theta^{n-1} x_n \cdot b, \quad (2)$$

где θ — автоморфизм группы $\langle G, \cdot \rangle$, b — некоторый фиксированный элемент из G , причем $\theta b = b$ и $\theta^{n-1} x = b x b^{-1}$ для всех $x \in G$. Как доказано в [7], достаточно принять

$$x \cdot y = f(x, a^{(n-1)}, y), \quad \theta x = f(\bar{a}, x, a^{(n-2)}), \quad b = f(\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a}),$$

где a — любой фиксированный элемент из G . Этот факт позволяет свести изучение n -арных групп к изучению соответствующих бинарных групп и их автоморфизмов.

Теорема 2. n -арная группа $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, b} \langle G, \cdot \rangle$ является слабо m -полуабелевой тогда и только тогда, когда выполняются тождества:

- (а) $\theta^{m-1} = \varepsilon$ (ε — тождественный автоморфизм),
- (б) $\theta(y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y) = y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y$,
- (с) $x \cdot y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y = y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot x$.

Доказательство. Если n -арная группа $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, b} \langle G, \cdot \rangle$ слабо m -полуабелева, то из (1) для $i = 1$, после применения теоремы Глускина–Хоссу и сокращения повторяющихся элементов, получаем, что

$$x \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot \theta^{m-1} y = y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot \theta^{m-1} x.$$

Отсюда для $y = e$ (e — единица группы $\langle G, \cdot \rangle$) вытекает условие (а), а для $x = e$ условие (б). Используя эти два условия и последнее равенство, получаем условие (с). В самом деле,

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-3} y \cdot \theta^{m-2} y &= x \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot \theta^{m-1} y \\ &= y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot \theta^{m-1} x = y \cdot \theta y \cdot \theta^2 y \cdot \dots \cdot \theta^{m-2} y \cdot x. \end{aligned}$$

Обратное утверждение очевидно.

Следствие 2. Бинарный ретракт слабо 3-полуабелевой n -арной группы имеет нетривиальный центр.

Доказательство. Как известно [7], все бинарные ретракты n -арной группы

$$\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, b} \langle G, \cdot \rangle$$

изоморфны группе $\langle G, \cdot \rangle$. Поэтому достаточно показать, что группа $\langle G, \cdot \rangle = \text{ret}_a \langle G, f \rangle$ имеет нетривиальный центр. Предположим обратное. Тогда из условия (с) теоремы 2 следует, что $y \cdot \theta y = e$, т.е. $\theta y = y^{-1}$ для всех $y \in G$, что противоречит нашему предположению. Следствие доказано.

Следствие 3 ([4]). Если n -арная группа слабо t -полуабелева и слабо k -полуабелева, то она слабо t -полуабелева, где $t - 1 = (t - 1, k - 1)$.

Напомним, что n -арная группа $\langle G, f \rangle$ называется t -полуабелевой, если $t - 1$ делит $n - 1$ и последовательности x, y_1^{m-2}, z и z, y_1^{m-2}, x эквивалентны в $\langle G, f \rangle$ для всех $x, y_1, \dots, y_{m-2}, z \in G$. Для того, чтобы n -арная группа $\text{der}_{\theta, b}\langle G, \cdot \rangle$ была t -полуабелевой, необходимо и достаточно [5], чтобы группа $\langle G, \cdot \rangle$ была коммутативна и чтобы $\theta^{m-1} = \varepsilon$. Очевидно, что всякая t -полуабелева n -арная группа слабо t -полуабелева. Так как все бинарные ретракты n -арной группы $\text{der}_{\theta, b}\langle G, \cdot \rangle$ изоморфны группе $\langle G, \cdot \rangle$, из теоремы 2 получаем следующее следствие.

Следствие 4. Слабо t -полуабелева n -арная группа t -полуабелева тогда и только тогда, когда она полуабелева, т.е. тогда и только тогда, когда она имеет коммутативный бинарный ретракт.

Таким образом, все n -арные группы порядка p и p^2 (p — простое число) полуабелевы. Минимально слабо t -полуабелевой, но не t -полуабелевой n -арной группой является $(6k + 1)$ -арная группа, производная от симметрической группы S_3 . Очевидно, что 6 должно делить $t - 1$, а $t - 1$ должно делить $6k$. В самом деле, все n -арные группы порядка, меньшего 6, имеют коммутативный ретракт и поэтому они полуабелевы. С другой стороны, n -арные группы 6-го порядка изоморфны [8] одной из n -арных групп, (θ, b) -производных от циклической группы 6-го порядка, либо n -арной группе $\langle S_3, f \rangle$, где $f(x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Все они (кроме последней) полуабелевы. Последняя слабо t -полуабелева только в случае, когда $t - 1$ делит $n - 1$ и для всех $y \in S_3$ элемент y^{m-1} принадлежит центру группы S_3 (условие (с) теоремы 2). Это имеет место только в случае $t = 6t + 1$, $n = 6k + 1$, где t делит k .

Этот пример подсказывает следующее предложение, справедливость которого легко проверить.

Предложение 1. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — некоммутативная группа экспоненты n . Если t делит k , то $(nk + 1)$ -арная группа $\text{der}_{\varepsilon, b}\langle G, \cdot \rangle$ слабо $(nt + 1)$ -полуабелева, но не $(nt + 1)$ -полуабелева.

Как известно, n -арную группу можно рассматривать как универсальную алгебру с двумя операциями: одной n -арной и одной унарной операцией — операцией $x \rightarrow \bar{x}$ взятия косого элемента. Эта последняя операция играет важную роль. Например, пользуясь этой операцией, доказано [6, 9], что класс медиальных n -арных групп совпадает с классом полуабелевых n -арных групп. Кроме того, в медиальных n -арных группах выполняется тождество

$$\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (3)$$

т.е. медиальные n -арные группы абелевы в смысле Куроша. Очевидно, класс медиальных n -арных групп намного шире класса коммутативных n -арных групп [10]. Однако существуют немедиальные n -арные группы, в которых тождество (3) выполняется [10]. Оно выполняется также в t -полуабелевых n -арных группах [5], но в слабо t -полуабелевых не имеет места.

Предложение 2. В слабо t -полуабелевых n -арных группах для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется тождество

$$\overline{f(y^{(i-1)}, x, y^{(n-i)})} = f(\bar{y}^{(i-1)}, \bar{x}, \bar{y}^{(n-i)}).$$

Доказательство. Легким, но длинным вычислением, пользуясь законом ассоциативности и тождествами Дёрнте, доказывается справедливость тождеств

$$f(f(y^{(i-1)}, x, y^{(n-i)}), \dots, f(y^{(i-1)}, x, y^{(n-i)}), f(\bar{y}^{(i-1)}, \bar{x}, \bar{y}^{(n-i)})) = f(y^{(i-1)}, x, y^{(n-i)}).$$

Отсюда следует, что $f(\bar{y}^{(i-1)}, \bar{x}, \bar{y}^{(n-i)})$ — косой элемент для $f(y^{(i-1)}, x, y^{(n-i)})$. Предложение доказано.

Для того, чтобы класс слабо t -полуабелевых n -арных групп был хорошо определенным, нужно доказать, что он содержит неприводимые собственно слабо t -полуабелевые n -арные группы, т.е. n -арные группы, которые не являются, во-первых, производными от групп меньшей арности [7], во-вторых, слабо k -полуабелевыми для $k < t$.

Для доказательства этого факта достаточно построить соответствующие примеры. Построим их на мультипликативной группе $T(3, P)$ матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $x, y, z \in P$, P — кольцо с единицей.

Теорема 3. Для всех $n \geq 3$ существуют неприводимые собственно слабо полуабелевы n -арные группы.

Доказательство. Пусть $G = T(3, C)$, где C — поле комплексных чисел. Тогда отображение

$$\theta \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha x & \alpha^2 y \\ 0 & 1 & \alpha z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где α — примитивный корень степени $n-1$ из единицы, является автоморфизмом группы $\langle G, \cdot \rangle$. Но так как $\alpha \neq 1$,

$$1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-2} = \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} = 0.$$

Поэтому $A \cdot \theta A \cdot \theta^2 A \cdot \dots \cdot \theta^{n-2} A$ принадлежит центру группы $\langle G, \cdot \rangle$ и

$$\theta(A \cdot \theta A \cdot \theta^2 A \cdot \dots \cdot \theta^{n-2} A) = A \cdot \theta A \cdot \theta^2 A \cdot \dots \cdot \theta^{n-2} A$$

для всех $A \in G$. Но так как группа $\langle G, \cdot \rangle$ некоммутативна и α — примитивный корень степени $n-1$, то $\theta^k \neq \varepsilon$ для $1 < k < n$. Отсюда n -арная группа $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, E} \langle G, \cdot \rangle$ (E — единичная матрица) собственно слабо полуабелева.

Докажем неприводимость. Если бы $\langle G, f \rangle$ была производной от бинарной группы, то она имела бы n -арную единицу [1, 3]. Значит, для некоторого $A \in G$ выполнялись бы тождества

$$X = f(X, A^{(n-1)}) = f(A, X, A^{(n-2)}),$$

из которых следует, что $X \cdot \theta A = A \cdot \theta X$. Принимая за X единичную матрицу, получаем, что $\theta A = A$, а это в силу определения автоморфизма θ доказывает, что матрица A принадлежит центру группы $\langle G, \cdot \rangle$. Таким образом, $X \cdot A = A \cdot \theta X = \theta X \cdot A$ влечет $\theta X = X$ для всех $X \in G$, что не имеет места. Поэтому $\langle G, f \rangle$ не может быть производной от бинарной группы.

Если бы $\langle G, f \rangle$ была производной от k -арной, $3 \leq k < n$, группы $\langle G, g \rangle$, то имели бы место тождества

$$f(X_1^n) = g_{(s)}(X_1^k, X_{k+1}^{2k-1}, \dots, X_{(s-1)(k-1)+1}^{s(k-1)+1}), \quad (4)$$

$$X = f(\bar{A}, A^{(k-2)}, X, A^{(k-2)}, \bar{A}, A^{(k-2)}, \bar{A}, \dots, A^{(k-2)}, \bar{A}), \quad (5)$$

$$X = f(A, \bar{A}, A^{(k-3)}, X, A^{(k-2)}, \bar{A}, A^{(k-2)}, \bar{A}, \dots, A^{(k-2)}, \bar{A}), \quad (6)$$

где $(n-1) = s(k-1)$, $s \geq 2$ и $\bar{A}$ обозначает косой элемент в k -арной группе $\langle G, g \rangle$. Из определения n -арной операции f и тождеств (5), (6) вытекает равенство

$$\bar{A} \cdot \theta A = A \cdot \theta \bar{A}.$$

Отсюда для $A = E$ получаем, что $\theta \bar{E} = \bar{E}$. Так как α — примитивный корень степени $n-1 = s(k-1) \geq 4$, последнее равенство влечет $\bar{E} = E$. Таким образом, из (4) для $A = E$ следует равенство $X = \theta^{k-1}X$, которое, очевидно, не имеет места.

Полученное противоречие доказывает, что построенная нами n -арная группа не может быть производной от группы меньшей арности. Теорема доказана.

Теорема 4. Для всех $n \geq 3$ существуют неприводимые собственно слабо m -полуабелевы n -арные группы.

Доказательство. Пусть $G = T(3, K)$,

$$\theta \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha x & y \\ 0 & 1 & \beta z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где K — поле ненулевой характеристики p , α — примитивный корень степени $n-1$ из единицы, $\alpha\beta = 1, p \nmid m-1, 3 \leq m < n$.

Таким же образом, как в доказательстве предыдущей теоремы, проверяем, что $\langle G, f \rangle = \text{der}_{\theta, B} \langle G, \cdot \rangle$, где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

является собственно слабо m -полуабелевой группой арности $n = p(m-1) + 1$. Так как $\langle G, f \rangle$ не имеет n -арной единицы, она не может быть производной от бинарной группы [1, 3].

Если бы $\langle G, f \rangle$ была производной от какой-либо k -арной группы $\langle G, g \rangle$, где $(n-1) = s(k-1)$, $k \geq 3$, $s \geq 2$, то в ней выполнялись бы тождества (4), (5), (6). Из последних двух тождеств вытекает равенство $\bar{A} \cdot \theta A = A \cdot \theta \bar{A}$, из которого, в частности, получаем, что

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя тождества Дёрнте для k -арной группы $\langle G, g \rangle$ к тождеству (4), находим, что

$$E = f(A^{(k-2)}, \bar{A}, E, E^{(k-2)}, \bar{E}, E^{(k-2)}, \bar{E}, E^{(k-2)}, \dots, E^{(k-2)}, \bar{E}).$$

Отсюда

$$0 = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-2} = \frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha},$$

т. е. $\alpha^{k-1} = 1$, что в силу примитивности α влечет равенства $k-1 = t(n-1)$ и $p(m-1) = st(m-1)$. Таким образом, (5) для $X = A = E$ принимает вид $E = (\bar{E})^p B$, откуда $px + 1 = 0$, что не имеет места. Теорема доказана.

Список литературы

1. Dörnte W. Untersuchungen über verallgemeinerten Gruppenbegriff. *Math. Leitschr.* (1928) **29**, 1–19.
2. Post E. L. Polyadic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1940) **48**, 208–350.
3. Белоусов В. Д. *n*-арные квазигруппы. Штиинца, Кишинев, 1972.
4. Гальмак А. М. Абелевы *n*-арные группы и их обобщения. *Вопросы алгебры* (1987) №3, 86–93.
5. Дудек В. А. *m*-полуабелевые *n*-арные группы. *Известия АН Молдовы. Математика* (1990) **1**, №2, 66–70.
6. Dudek W. A. Remarks on *n*-groups. *Demonstratio Math.* (1980) **13**, 165–181.
7. Dudek W. A., Michalski J. On a generalization of Hosszú theorem. *Demonstratio Math.* (1982) **15**, 783–805.
8. Glazek K., Michalski J. Note on polyadic groups on sets with at most 7 elements. *Beiträge Alg. und Geom.* (1987) **24**, 151–158.
9. Glazek K., Gleichgewicht B. Abelian *n*-groups. In: *Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai. Esztergom*, 1977, pp. 321–329.
10. Dudek W. A. Medial *n*-groups and skew elements. *Proc. V Universal Algebra Symp.* Singapore, 1989, 55–80.

Статья поступила 11.07.94.