Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. И. Галиев, Многократные упаковки и покрытия сферы, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 148–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:35:00

Многократные упаковки и покрытия сферы

© 1996 г. Ш. И. Галиев

Выявлены связи между многократными упаковками и покрытиями $(n-1)$ -мерной сферы S в E^n , $n \geq 4$, заданным числом сферических сегментов. Получены некоторые оценки радиусов сегментов, указаны некоторые экстремальные случаи многократных упаковок и покрытий сферы. На основе минимаксиминных моделей предложены алгоритмы численной оптимизации многократных упаковок и покрытий сферы.

Предложен критерий принадлежности точки выпуклому многограннику (многоугольнику) в E^n , $n \geq 2$.

1. Введение

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство, $n \geq 4$. Положим, что в E^n задана $(n-1)$ -мерная сфера S единичного радиуса, в дальнейшем сфера S . Пусть P — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость в E^n , пересекающая S . Следуя терминологии, используемой в E^3 , части S , лежащие по разные стороны от P , назовем (сферическими) сегментами.

Система из N открытых сегментов образует k -кратную, $1 \leq k \leq N$, упаковку на S , а система N замкнутых сегментов — k -кратное, $1 \leq k \leq N$, покрытие S , если каждая точка S принадлежит не более, чем k сегментам, и не менее, чем k сегментам, соответственно. Всюду в дальнейшем рассматриваются упаковки на S и покрытия S конгруэнтными сегментами.

Проблемы упаковок и покрытий S , как и всего E^n , исследуются давно. Важные результаты, а также подробные обзоры по этим проблемам содержатся в монографиях [1–4]. Однократные упаковки и покрытия сферы S в E^3 исследованы достаточно подробно. Для этих задач в E^3 получены оценки радиусов упаковываемых и покрывающих сегментов, для многих значений N указаны экстремальные расположения сегментов на S , предложены различные алгоритмы оптимизации упаковок и покрытий. Важные результаты по упаковкам в многомерных пространствах получены в работах К. Роджерса, В. М. Сидельникова, В. И. Левенштейна, Г. А. Кабатянского, Дж. Конвея, Н. Слоэна и других авторов (см., например, [3–8] и библиографию в них).

Для однократных упаковок сегментов на S в E^n , $n \geq 4$, получены оценки и асимптотические оценки, связывающие число сегментов и их радиусы, и указаны экстремальные упаковки для целого ряда значений числа упаковываемых сегментов (см. [3–8]). Для многократных упаковок N сегментов на S в E^n , $n \geq 4$,

в работе [9] получены оценки плоскостей k -кратных упаковок на S , когда радиус упаковываемых сегментов меньше $\pi/2$.

Для однократного покрытия S в E^n , $n \geq 9$, в работе [10] получены оценки числа сегментов заданного радиуса, обеспечивающих покрытие S .

Задачи упаковок и покрытий S исследуются отдельно. В работах [11,12] автора показано, что задачи многократных упаковок и покрытий S в E^3 — взаимосвязанные проблемы. В данной работе этот результат обобщается для сферы S в E^n , $n \geq 4$, именно, устанавливается следующее. Выявлены связи между многократными упаковками и покрытиями сферы в E^n , $n \geq 4$; получены некоторые оценки радиусов сегментов и указаны некоторые экстремальные случаи многократных упаковок и покрытий сферы. На основе минимаксиминных моделей этих задач предложены алгоритмы оптимизации многократных упаковок и покрытий на S в E^n , $n \geq 4$. Приведены полученные (приближенные) решения для k -кратных покрытий $((N - k)$ -кратных упаковок) N сегментами сферы S в E^4 при $1 \leq k \leq N - 1$. Для $k = N - 1$ использованы результаты, указанные в работе [13].

Предложен новый аналитический критерий принадлежности точки выпуклому многограннику (многоугольнику) в E^n , $n \geq 2$. Этот критерий используется для получения оценок радиусов двукратного покрытия S в E^n , $n \geq 4$.

2. Связь между упаковками и покрытиями на сфере

Пусть $(n - 1)$ -мерная гиперплоскость P пересекает сферу S в E^n . Сферический сегмент, лежащий по одну из сторон от P обозначим через K_1 , по другую — K_2 . Точку $a_i \in K_i$, $i = 1, 2$, отстоящую на наибольшее расстояние от P , назовем центром K_i (очевидно, что a_i для K_i определяется единственным образом). Пусть $\text{fr } K$ — граница сегмента K в топологии, индуцированной с E^n на S . Известно, что $\text{fr } K$ является $(n - 2)$ -мерной сферой. Положим $\bar{K}_1 = K_1 \cup \text{fr } K_1$, тогда $K_2 = S \setminus \bar{K}_1$. Ясно, что для K_1 и K_2 $\text{fr } K_1 = \text{fr } K_2$, $a_2 = -a_1$.

Пусть $\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x , y .

Определим угловой радиус $R(K)$ сегмента K с центром a , полагая $R(K) = \arccos \langle a, y \rangle$, $y \in \text{fr } K$. Очевидно, что $R(K)$ не зависит от выбора элемента y из $\text{fr } K$. Теперь легко видеть, что $R(S \setminus \bar{K}) = \pi - R(K)$.

Пусть $\mu(K)$ — площадь сегмента K как части сферы S . Плотностью k -кратной упаковки (покрытия) называется отношение сумм площадей упаковываемых (покрывающих) сегментов к площади всей сферы S . Угловой радиус конгруэнтных сегментов K_j , $1 \leq j \leq N$, образующих k -кратную упаковку на S , обозначим через $R_{N,k}^u$, а плотность этой упаковки через $P_{N,k}^u$. Аналогичные величины для покрытий обозначаем $R_{N,k}$ и $P_{N,k}$, опуская индекс u . Пусть $r_{N,k}^u = \sup R_{N,k}^u$, $r_{N,k} = \inf R_{N,k}$, $p_{N,k}^u = \sup P_{N,k}^u$, $p_{N,k} = \inf P_{N,k}$, где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным расположениям сегментов на S .

Покрытие (упаковку) назовем ε -оптимальной, если $R_{N,k} \leq r_{N,k} + \varepsilon$ ($R_{N,k}^u \geq r_{N,k}^u - \varepsilon$). При $\varepsilon = 0$ покрытие (упаковку) считаем оптимальной. Очевидно, имеют место тривиальные оценки

$$p_{N,k}^u \leq k \leq p_{N,k}. \quad (1)$$

Пусть в дальнейшем $\alpha(a, b)$ — угол, образованный радиусами сферы, направленными в точки a и b . Величину $\alpha(a, b)$ считаем (угловым) расстоянием между a и b . Для $N \geq 3$ имеют место следующие утверждения. Доказательство их получается дословным повторением доказательств, предложенных для E^3 в [11, 12].

Лемма 1. *Наименьший угловой радиус N конгруэнтных замкнутых сегментов с фиксированными положениями их центров $a_j \in S$, $1 \leq j \leq N$, k -кратно покрывающих единичную сферу S , $1 \leq k \leq N - 1$, равен угловому радиусу наибольшего открытого сегмента на S , содержащего не более $(k - 1)$ точек a_j , $1 \leq j \leq N$.*

Теорема 1. *Совокупность N замкнутых сегментов K_j , $1 \leq j \leq N$, углового радиуса α образуют k -кратное, $1 \leq k \leq N - 1$, покрытие сферы S тогда и только тогда, когда совокупность N открытых сегментов $S \setminus K_j$, $1 \leq j \leq N$, углового радиуса $\pi - \alpha$ образуют $(N - k)$ -кратную упаковку на S .*

Следствие 1. *Справедливы равенства*

$$R_{N,k}^u = \pi - R_{N,N-k}, \quad R_{N,k} = \pi - R_{N,N-k}^u, \quad P_{N,k} + P_{N,N-k}^u = N.$$

Лемма 2. *Наибольший угловой радиус N конгруэнтных открытых сегментов с центрами $a_j \in S$, $1 \leq j \leq N$, образующих k -кратную упаковку на S , равен угловому радиусу наименьшего замкнутого сегмента, содержащего не менее $k + 1$ точек a_j , $1 \leq j \leq N$.*

Всюду в дальнейшем при покрытии сегменты считаются замкнутыми, а при упаковке открытыми.

3. Критерий принадлежности точки многограннику

Одной из важных задач вычислительной геометрии является задача о принадлежности точки заданному множеству G , $G \subset E^n$, $n \geq 2$. Получим аналитический критерий принадлежности для случая, когда G — выпуклый многогранник (многоугольник), заданный как выпуклая оболочка множества точек $\{a_j, 1 \leq j \leq m\}$.

Пусть G — выпуклая оболочка множества точек $\{a_j, 1 \leq j \leq m\}$, $\text{int } G$ — внутренность множества G , $\text{fr } G$ — граница G в E^n , $\dim G$ — размерность G , а $\|x\|$ — норма вектора x в E^n . Для $s \in E^n$ и $g \in E^n$ введем функцию

$$\psi(s, g) = \min\{\langle s - a_j, g \rangle, 1 \leq j \leq m\}.$$

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая оболочка множества точек $A = \{a_j, 1 \leq j \leq m\}$ в E^n , $n \geq 2$, $\dim G = n$ и s — произвольная точка из E^n , $s \notin A$. Тогда*

- (1) $s \notin G$ тогда и только тогда, когда существуют вектор $g \in E^n$, $\|g\| = 1$, и число $b > 0$ такие, что $\psi(s, g) \geq b > 0$;
- (2) $s \in G$ тогда и только тогда, когда $\psi(s, g) \leq 0$ для любого $g \in E^n$, $\|g\| = 1$;
- (3) $s \in \text{int } G$ тогда и только тогда, когда существует такое $b > 0$, что для любого $g \in E^n$, $\|g\| = 1$, справедливо неравенство $\psi(s, g) \leq -b$.

Доказательство. Необходимость условий пункта 1 очевидным образом следует из известных результатов (см., например, [14]). Для доказательства достаточности условий пункта 1 построим гиперплоскость P_g с нормальным вектором g и пусть $s \in P_g$. Легко убедиться, что все a_j , $j = 1, \dots, t$, лежат в одном из полупространств, определенных P_g и $P_g \cap G = \emptyset$, поэтому $s \notin G$.

Утверждение пункта 2, очевидно, является следствием из пункта 1.

Докажем утверждение пункта 3. Пусть $s \in \text{int } G$, тогда существует окрестность Ω точки s такая, что $\Omega \subset G$; пусть Ω — шар радиуса b с центром в точке s , причем b — наибольшее возможное для данного s . Ясно, что точек касания Ω и граней G конечное число, обозначим их y_i , $1 \leq i \leq r$; эти точки обязательно принадлежат $(n-1)$ -мерной грани G , а не $(n-k)$ -мерной, $k > 1$.

Выберем произвольный вектор $g \in E^n$, $\|g\| = 1$, и пусть $s^* = s + bg$. Через s^* проведем гиперплоскость P_g с нормальным вектором g . Если $s^* = y_i$, $1 \leq i \leq r$, то P_g — опорная гиперплоскость для Ω и G , следовательно, найдется вершина a_j , $a_j \neq s^*$, принадлежащая P_g . Тогда $\langle s - a_j, g \rangle = \langle s^* - a_j - bg, g \rangle = -b$ и $\psi(s, g) \leq -b$. Если $s^* \neq y_i$, $1 \leq i \leq r$, то $s^* \in \text{int } G$ и по обе стороны от P_g есть вершины G . Положим, что вершина a_j и точка s лежат по разные стороны от P_g , и пусть a_j^* — проекция a_j на P_g . Тогда $s - a_j = s^* - a_j^* - \alpha g$, $\alpha \geq b$, и $\langle s - a_j, g \rangle = -\alpha$, откуда и следует, что $\psi(s, g) \leq -b$.

Обратно, пусть $s \in E^n$, $s \notin A$, и существует такое $b > 0$, что $\psi(s, g) \leq -b$ для всех g , $\|g\| = 1$. Из пункта 2 следует, что $s \in G$, причем s — не вершина G ($s \notin A$). Допустим, что $s \in \text{fr } G$. Построим опорную гиперплоскость P_g , проходящую через s , которая имеет нормальный вектор g , причем считаем, что g ориентирован в полупространство, не содержащее G . Тогда для любой точки $a_j \in A$ угол между $h_j = s - a_j$ и g не больше $\pi/2$, следовательно, $\psi(s, g) \geq 0$, что противоречит условию. Итак, $s \notin \text{fr } G$, поэтому $s \in \text{int } G$. Теорема доказана.

Условие $\dim G = n$ в теореме 2 можно исключить, вводя дополнительные условия.

Теорема 3. Пусть G — выпуклая оболочка множества точек $A = \{a_j, 1 \leq j \leq t\}$ в E^n , $n \geq 2$, L — подпространство E^n , являющееся линейной оболочкой векторов $\{a_j, 1 \leq j \leq t\}$, s — произвольная точка из L и $s \notin A$. Тогда имеют место утверждения пунктов 1, 2, и 3 теоремы 2, при условии, что $g \in L$, $\|g\| = 1$.

В теореме 3 уже не требуется совпадения размерностей G и E^n , но появилось ограничение $g \in L$. От этого ограничения можно избавиться, ослабив теорему и записав ее в следующем виде.

Теорема 4. Пусть G — выпуклая оболочка множества точек $A = \{a_j, 1 \leq j \leq t\}$ в E^n , $n \geq 2$, s — произвольная точка из E^n , $s \notin A$. Тогда

- (1) $s \notin G$ тогда и только тогда, когда существует вектор $g \in E^n$, $\|g\| = 1$, такой, что $\psi(s, g) > 0$;
- (2) $s \in G$ тогда и только тогда, когда $\psi(s, g) \leq 0$ для любого $g \in E^n$, $\|g\| = 1$.

Полученные теоремы 2–4 являются вариантами теоремы отделимости. Ясно, что использование этих вариантов возможно, когда известны вершины многогранника G . В дальнейшем для наших целей мы применяем теорему 2.

4. Некоторые оценки радиусов сегментов для многократных упаковок и покрытий

Обозначим через $[x]$ целую часть x .

Теорема 5. Пусть на единичной сфере S в E^n , $n \geq 3$, задано N конгруэнтных сегментов K_j с центрами $a_j \in S$, $1 \leq j \leq N$, $N = 2m$ или $N = 2m + 1$, $m \geq 2$, $l = [n/2]$. Тогда

- (1) $r_{N,k} > \pi/2$ для каждого $k \geq m + 1$;
- (2) если N четно, n любое ($n \geq 3$), то $r_{N,m-i} = \pi/2$ для каждого i такого, что $0 \leq i \leq l - 1$, $m - i \geq 1$;
- (3а) если N нечетно, n четно ($n \geq 4$), то $r_{N,m-i} = \pi/2$ для каждого i такого, что $0 \leq i \leq l - 2$, $m - i \geq 1$;
- (3б) если N нечетно, n нечетно ($n \geq 3$), то $r_{N,m-i} = \pi/2$ для каждого i такого, что $0 \leq i \leq l - 1$, $m - i \geq 1$.

Утверждение пункта 1 легко получить из (1). Доказательство утверждений остальных пунктов теоремы проводятся так же, как для E^3 [12].

Лемма 3. Пусть N конгруэнтных сегментов образуют k -кратное покрытие сферы S в E^n , $n \geq 3$, и $r_{N,k}(n)$ — наименьший возможный угловой радиус этих сегментов. Тогда для любого $k > [N/2]$

$$r_{N,k}(n+1) \leq r_{N,k}(n).$$

Доказательство. Рассмотрим n -мерную сферу S^* в E^{n+1} . Пусть n -мерная гиперплоскость P^* (например, $x_{n+1} = 0$) пересекает S^* и проходит через O — центр сферы S^* . При пересечении P^* и S^* получим $(n-1)$ -мерную сферу S с центром в точке O . На S расположим N ее сегментов K_j с центрами $a_j \in S$, $1 \leq j \leq N$, так, чтобы они образовывали оптимальное k -кратное покрытие S . Следовательно, радиус этих сегментов равен $r_{N,k}(n)$. Будем считать точки a_j центрами сегментов K_j^* , $1 \leq j \leq N$, образующих k -кратное покрытие S^* . Ясно, что наименьший радиус $R_{N,k}$ сегментов K_j^* не меньше $r_{N,k}(n)$, иначе не обеспечивалось бы k -кратное покрытие S ($S \subset S^*$).

Пусть K^* — наибольший открытый сегмент на S^* , содержащий не более $k-1$ точек a_j , $1 \leq j \leq N$, и P_k^* — гиперплоскость, отсекающая K^* от S^* . Радиус

K^* (по лемме 1) равен указанной выше величине $R_{N,k}$ и $R_{N,k} \geq r_{N,k}(n) > \pi/2$ (последнее неравенство следует из теоремы 5). Если бы гиперплоскость P_k^* не пересекалась с S , то K^* должен был бы целиком содержать S , т. е. на K^* лежали бы N точек a_j , $1 \leq j \leq N$, что не так. Итак, P_k^* пересекается с S , причем по одну из сторон от P_k^* лежат не более $k-1$ точек a_j , $1 \leq j \leq N$. Обозначим эту часть сферы S через K и пусть P_k — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, отсекающая K от S ; ясно, что $P_k \subset P_k^*$.

Предположим, что d_k — расстояние от O , центра сферы S , до P_k , а d_k^* — расстояние от O до P_k^* . Очевидно, что $d_k^* \leq d_k$. Допустим, что $d_k^* < d_k$. Тогда можно повернуть P_k^* относительно (оси) P_k так, чтобы расстояние до P_k^* стало больше d_k^* . Следовательно, увеличится радиус сегмента K^* , содержащего не более $k-1$ точек a_j , $1 \leq j \leq N$, что противоречит максимальной K^* . Таким образом, $d_k^* = d_k$, следовательно, центры сегментов K^* и K совпадают. Тогда получим, что $R_{N,k} = R(K) \leq r_{N,k}(n)$ и $r_{N,k}(n+1) \leq r_{N,k}(n)$, что и требовалось доказать.

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 4. Пусть S — сфера единичного радиуса в E^n , $n \geq 3$, и S покрывается $N \geq n+1$ конгруэнтными сегментами, тогда

$$r_{N,n} \leq r_{n+1,n} \leq \pi - \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{n} \right), \quad r_{N,1} \leq r_{n+1,1} \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{1}{n} \right).$$

Лемма 5. Пусть S — сфера единичного радиуса в E^n , $n \geq 3$, и S двукратно покрывается $N \geq 2n$ конгруэнтными сегментами, тогда $r_{N,2} < \pi/2$.

Доказательство. Ясно, что лемму достаточно доказать для $N = 2n$. Пусть $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ — сферические координаты (углы), определяющие положение точек на S . Предположим, что $\tilde{\psi}_1$, $-\pi/2 \leq \tilde{\psi}_1 \leq \pi/2$, равен некоторой величине $\tilde{\psi}$, $0 < \tilde{\psi} < \pi/2$. Пусть S^* — $(n-2)$ -мерная сфера, являющаяся сечением S , и каждая точка S^* имеет сферическую координату $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}$. Аналогично, S^{**} — такая $(n-2)$ -мерная сфера, что сферическая координата $\tilde{\psi}_1$ каждой точки из S^{**} равна $-\tilde{\psi}$. Построим в S^* вписанный $(n-1)$ -мерный симплекс и пусть $a_1, \dots, a_n$ — его вершины. Тогда, используя известные результаты [15], можно записать, что k -я, $1 \leq k \leq n$, декартова координата x_{jk} точки a_j представима в виде

$$x_{jk} = \begin{cases} 0, & k < j+1, \\ \sqrt{\frac{k(n-1)n}{k+1}} \frac{\cos \tilde{\psi}}{n-1}, & k = j+1, \\ -\sqrt{\frac{(n-1)n}{k(k+1)}} \frac{\cos \tilde{\psi}}{n-1}, & j \leq k < n, \\ \frac{\sin \tilde{\psi}}{n-1}, & k = n. \end{cases}$$

Выберем еще n точек a_{n+j} , $1 \leq j \leq n$, на S так, чтобы

$$\begin{aligned} x_{n+j,k} &= x_{jk}, & 1 \leq k \leq n-1, \\ x_{n+j,k} &= -x_{j,n}, & 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Следовательно, точки $a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ образуют $(n-1)$ -мерный симплекс, вписанный в S^{**} . Пусть точки a_j , $1 \leq j \leq 2n$, являются центрами сегментов K_j , двукратно покрывающих S . Покажем, что при этом расположении центров $R_{2n,2} < \pi/2$.

Так как рассматривается двукратное покрытие, по теореме 1 это равносильно рассмотрению $(2n-2)$ -кратной упаковки. Для нахождения радиуса кругов, образующих $(2n-2)$ -кратную упаковку, необходимо знать (лемма 2) радиус наименьшего замкнутого сегмента, содержащего не менее $(2n-1)$ точек a_j , $1 \leq j \leq 2n$. Таким образом, необходимо оценить наименьший радиус сегмента K^+ , содержащего либо все точки a_j , $1 \leq j \leq 2n$, либо не содержащего одну из них.

Для того, чтобы показать, что радиус K^+ больше $\pi/2$, можно доказать, что центр O сферы S является внутренней точкой для множества G , являющегося выпуклой оболочкой всех точек a_j , $1 \leq j \leq 2n$, и множества G_j , являющегося выпуклой оболочкой точек $a_1, \dots, a_{2n}$ без точки a_j , $1 \leq j \leq 2n$.

Для того, чтобы показать, что O является внутренней для указанных множеств, используем полученный выше критерий, теорему 2. Рассмотрим вектор

$$g = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1.$$

Для вычисления значения функции $\psi(s, g)$ в точке $s = O$ нужно найти все скалярные произведения $c_j = \langle s - a_j, g \rangle$, $1 \leq j \leq 2n$, и выбрать наименьшее из них. Обозначим $\beta = \cos \tilde{\psi}$, $\gamma = \sin \tilde{\psi}$. Выписав все c_j , находим, что

$$\begin{aligned} & \beta \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left[\frac{(n-1)n}{k(k+1)} \right]^{1/2} - \gamma \alpha_n = c_1, \\ & -\alpha_1 \beta \left[\frac{(n-1)n}{2} \right]^{1/2} + \beta \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k \left[\frac{(n-1)n}{k(k+1)} \right]^{1/2} - \gamma \alpha_n = c_2, \\ & -\alpha_2 \beta \left[\frac{2(n-1)n}{3} \right]^{1/2} + \beta \sum_{k=3}^{n-1} \alpha_k \left[\frac{(n-1)n}{k(k+1)} \right]^{1/2} - \gamma \alpha_n = c_3, \\ & \dots \\ & -\alpha_{n-2} \beta \left[\frac{(n-2)(n-1)n}{n-1} \right]^{1/2} + \beta \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-1)n}{(n-1)n} \right]^{1/2} - \gamma \alpha_n = c_{n-1}, \\ & -\beta \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-1)(n-1)n}{n} \right]^{1/2} - \gamma \alpha_n = c_n, \\ & -\beta \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-1)(n-1)n}{n} \right]^{1/2} + \gamma \alpha_n = c_{n+1}, \\ & -\alpha_{n-2} \beta \left[\frac{(n-2)(n-1)n}{n-1} \right]^{1/2} + \beta \alpha_{n-1} \left[\frac{(n-1)n}{(n-1)n} \right]^{1/2} + \gamma \alpha_n = c_{n+2}, \\ & \dots \\ & \beta \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k \left[\frac{(n-1)n}{k(k+1)} \right]^{1/2} + \gamma \alpha_n = c_{2n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Допустим, что $O \notin \text{int } G$, тогда существует вектор $g \in E^n$, $\|g\| = 1$, такой, что $\psi(O, g) \geq 0$, следовательно, все $c_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 2n$. Просуммировав первые n и отдельно последние n равенств в (2), получим соответственно

$$-n\gamma\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i, \quad n\gamma\alpha_n = \sum_{i=n+1}^{2n} c_i.$$

Эти равенства возможны только при $\alpha_n = 0$. Тогда, используя $(n-1)$ -е равенство из (2), затем $(n-2)$ -е и т. д., получим, что $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, что невозможно. Итак, $O \in \text{int } G$.

Теперь покажем, что $O \in \text{int } G_j$ при любом j , $1 \leq j \leq 2n$. Множество (многогранник) G_j получается как выпуклая оболочка точек $\{a_1, \dots, a_{2n}\} \setminus \{a_j\}$. Значение функции $\psi(s, g)$ в точке $s = O$ при выбранном g равно

$$\psi(O, g) = \min\{c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_{2n}\}.$$

Рассмотрим равенства (2), из которых отброшено j -е равенство. Вновь допустим, что $O \notin \text{int } G_j$. Пусть $j \leq n$. Суммируя сначала $(2n-j+1)$ -е и $n-1$ первых равенств из (2), а затем n последних равенств из (2), получим, что

$$-(n-2)\gamma\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i - c_j + c_{2n-j+1}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 3; \quad n\gamma\alpha_n = \sum_{i=n+1}^{2n} c_i.$$

Из этих соотношений вновь получаем, что $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, что невозможно. Случай, когда $j > n$, рассматривается аналогично.

Итак, $O \in \text{int } G$ и $O \in \text{int } G_j$, $1 \leq j \leq 2n$, следовательно, радиус сегмента K^+ больше $\pi/2$, тогда радиус сегментов, образующих двукратное покрытие S , меньше $\pi/2$. Лемма доказана.

Отметим, что если исключать две точки a_i, a_j , $i \neq j$ (т.е. два равенства из (2)), то не все $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

5. Численная оптимизация покрытия

Пусть на сфере S единичного радиуса в E^n , $n \geq 4$, расположено N сегментов K_j с центрами $a_j \in S$, $1 \leq j \leq N$. Положим, что указанные точки a_j , $j = 1, \dots, N$, не совпадают.

Определим k -кратную, $1 \leq k \leq N-1$, область (ячейку) Дирихле D_j^k множества точек $\{a_j, 1 \leq j \leq N\}$, полагая $D_j^k = D^k(a_j) = \{s \in S: \alpha(s, a_j) \leq \min_{i \in J_k} \alpha(s, a_i)\}$, $j = 1, 2, \dots, N$, где J_k — множество индексов $N-k+1$ точек a_i , которые отстоят от s не ближе, чем $k-1$ оставшихся точек a_i , $1 \leq i \leq N$. Иначе можно сказать, что D_j^k состоит из всех точек $s \in S$ таких, что самое большее $k-1$ точек a_i , $1 \leq i \leq N$, находятся ближе к s , чем точка a_j .

В работах [16, 17] исследованы области Дирихле D_j^k в E^n . Эти результаты выполняются и для D_j^k на S в E^3 и в E^n , $n \geq 4$. Повторяя почти дословно [17], приведем эти свойства.

$$(1) \bigcup D_j^k = S.$$

- (2) $\bar{D}_j^k = D_j^k, j = 1, \dots, N$.
- (3) $\{D_j^k, 1 \leq j \leq N\}$ покрывает точку $s \in S$ точно k -кратно, если s — внутренняя точка для областей D_j^k , которым она принадлежит, и s покрывается не менее чем k -кратно, если s принадлежит границе D_j^k .
- (4) Если сегменты K_j с центрами в $a_j, 1 \leq j \leq N$, образуют k -кратное покрытие S , то $D_j^k \subseteq K_j$, если же сегменты K_j с центрами в $a_j, 1 \leq j \leq N$, образуют k -кратную упаковку на S , то $K_j \subseteq D_j^k$.
- (5) Для любого $k, 1 \leq k \leq N-1$, выполняется равенство $D^k(a_j) = \overline{S \setminus D^{N-k}(a_j^*)}$, где a_j^* — точка, диаметрально противоположная a_j , и $D^{N-k}(a_j^*)$ — области Дирихле, построенные для совокупности точек $\{a_j^*, 1 \leq j \leq N\}$.

Задачи покрытия и упаковки, как известно, легко сводятся к минимакс-минным и максиминным моделям. Пусть $\psi_{ji}, 1 \leq i \leq n-1$, — сферические координаты центров $a_j, 1 \leq j \leq N$, сегментов на S в E^n ;

$$u = (\psi_{11}, \dots, \psi_{1,n-1}, \dots, \psi_{N1}, \dots, \psi_{N,n-1}),$$

а $\alpha(a, b)$, как и выше, угловое расстояние между $a, b \in S$. Задача однократного покрытия состоит в минимизации радиусов покрывающих кругов, следовательно, получаем задачу найти

$$\inf_u \sup_{s \in S} \min_{1 \leq j \leq N} \alpha(s, a_j). \quad (3)$$

Задача оптимизации k -кратного, $1 \leq k \leq N-1$, покрытия, следовательно, и $(N-k)$ -кратной упаковки, сводится к задаче (см., например, [11, 12]) найти

$$\inf_u \sup_{s \in S} \min_{j \in J_k(s, u)} \alpha(s, a_j), \quad (4)$$

где $J_k(s, u)$ — множество индексов, которое введено выше. Задачу однократной упаковки можно представить в более простом виде: найти

$$\sup_u \min_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \alpha(a_i, a_j). \quad (5)$$

Математические модели (3), (4) имеют один и тот же вид как для покрытия ограниченной части плоскости, так и для покрытий сферы S в E^3 и в $E^n, n \geq 4$, а модель (5) для упаковки на сфере одинакова в E^n при любом $n \geq 3$, различны только число координат, участвующих при определении величины угла α . С использованием моделей (3)–(5) и их свойств в работе [18] для плоского случая, а в [12] для сферы в E^3 , были предложены алгоритмы оптимизации многократных покрытий (и многократных упаковок на S). Так же, как и математические модели, алгоритмы тоже мало различаются. Есть отличие в первых двух алгоритмах, связанное с тем, что на S в E^3 использовалась биссектриса угла, содержащего некоторые вершины области Дирихле, а в $E^4, n \geq 4$, нужны другие подходы. Учитывая отличие и полезность алгоритмов оптимизации многократных покрытий (следовательно, и многократных упаковок) сферы в $E^n, n \geq 4$, приведем их описание. Формулировки алгоритмов для S в $E^n, n \geq 4$, наиболее общие и позволяют считать их алгоритмами оптимизации указанных покрытий и упаковок на сфере при любом $n \geq 3$.

Алгоритм А1.

- (1) Выбираем исходное расположение точек a_j , $1 \leq j \leq N$, на S , т. е. задаем вектор u .
- (2) Для $\{a_j, 1 \leq j \leq N\}$ строим области Дирихле D_j^k , $1 \leq j \leq N$.
- (3) Пусть K_j' — минимальный замкнутый сегмент с центром в a_j , покрывающий все D_j^k , $L_j = (\text{fr } K_j') \cap D_j^k$, $\text{fr } K_j'$ — граница, а β_j — радиус сегмента K_j' . Среди областей D_j^k выбираем те области, для которых β_j достигает наибольшего значения (из всех β_i , $1 \leq i \leq N$).
- (4) В выбранных областях D_j осуществим следующее. Пусть K_j^+ — минимальный сегмент на S , содержащий L_j , и a_j^+ — центр этого сегмента. Сдвигаем точку a_j вдоль $a_j a_j^+$, дуги большого радиуса, до тех пор пока уменьшается радиус сегмента K_j^* , центр которого находится в передвигаемой точке и $D_j^k \subseteq K_j^*$ (ясно, что если $a_j = a_j^+$, то сдвига нет). Пусть a_j^* — новое положение точки a_j . Совокупность всех a_j^* и оставшихся без сдвига точек a_i , $1 \leq i \leq N$, порождает новый вектор u^* .
- (5) Если евклидово расстояние между u и u^* не превосходит заданного $\varepsilon > 0$, то (приближенное) решение найдено и равно u^* , иначе полагаем $u = u^*$ и идем к пункту 2.

Отметим, что решение согласно алгоритму А1, как и согласно нижеследующему алгоритму, обладает недостатками решений многоэкстремальных задач. Вектор u может оказаться в окрестности локального минимума либо седловой точкой и т. п. Поэтому нужно реализовывать алгоритм с различными начальными расположениями центров сегментов, получать оценки радиусов или иначе устанавливать, как далеки мы от глобального экстремума.

Алгоритм А2.

Этот алгоритм отличается от А1 только тем, что указанные в А1 сдвиги точек a_j осуществляем для каждого j , $1 \leq j \leq N$, а не только для тех j , где β_j максимально.

Алгоритм А3.

Этот алгоритм получается из А1, если пункт 4 алгоритма А1 заменить на следующий.

- (4) В выбранных областях D_j^k осуществляем следующее. Пусть K_j — минимальный сегмент на S , содержащий D_j^k , и a_j — центр этого сегмента. Сдвигаем a_j в точку a_j^* . Эти новые точки в совокупности с остальными a_i , $1 \leq i \leq N$, порождают новый вектор u^* .

Таблица 1.

число сегментов	кратность покрытия						
	1	2	3	4	5	6	7
2	*90						
3	*90	*120					
4	*90	*90	*125,27				
5	75,50	*90	108,00	*127,76			
6	71,58	*90	*90	116,58	*135		
7	65,91	90	*90	102,88	120,00	*135	
8	60,00	79	*90	*90	110,95	121,56	*135

Алгоритм А4

Алгоритм А4 отличается от А3 только тем, что указанные в А3 сдвиги точек a_j осуществляем для каждого j , $1 \leq j \leq N$.

Алгоритмы А1–А4 можно получить из геометрических соображений как процедуры, не увеличивающие радиус покрывающих сегментов, но они получены на основе минимаксиминных моделей.

Отметим следующее. При оптимизации покрытий на плоскости и на поверхности сферы в E^3 , оказывалось, что алгоритм А4 дает лучшие результаты, чем А1–А3, несмотря на то, что А1 в некоторых случаях соответствует движению по направлению наибольшего убывания радиусов сегментов. Исходя из этого в данной работе на ЭВМ был реализован алгоритм А4 для покрытия сферы в пространстве E^4 .

Результаты расчетов сведены в таблицу 1. В таблице приводятся достигнутые значения (в градусах) радиусов $R_{N,k}$ k -кратных, $1 \leq k \leq N-1$, покрытий N конгруэнтными сегментами сферы S в E^4 . Следовательно, используя эту таблицу, можно получить и радиусы $(N-k)$ -кратных упаковок на S в E^4 по формуле $R_{N,N-k}^u = 180 - R_{N,k}$. И наоборот, там где известны радиусы сегментов, образующих k -кратную упаковку на S , можно получить и радиусы $(N-k)$ -кратных покрытий. В частности, радиусы однократной упаковки для некоторых N известны (см. например, [13]), тогда $R_{N,N-1} = 180 - R_{N,1}^u$. В таблице величины $R_{N,N-1}$ выписаны согласно известным результатам [13]. Звездочкой помечены результаты, для которых доказано, что их улучшить нельзя.

Интересно, что если бы аналогичная таблица заполнялась для сферы S в E^n , $n \geq 8$, при $N \leq 8$, то пришлось бы вычислять меньшее число $R_{N,k}$, ибо все клетки на диагонали и ниже ее были бы заполнены известными (из теоремы 5) величинами $R_{N,k} = 90^\circ$.

Кроме результатов, перечисленных в приведенной таблице, получен также некоторый результат по оптимизации однократной упаковки на S в E^4 для $N = 25$. Достигнуто расположение центров сегментов на S , при котором $2R_{25,1}^4 = 56,50^\circ$, что лучше известного результата (в [13] указана величина $2R_{25,1}^4 = 55,58^\circ$).

При оптимизации декартовы координаты x_j, y_j, z_j, v_j центров a_j сегментов K_j

определялись по известным формулам

$$\begin{aligned}x_j &= \cos \psi_j \cos \varphi_j \cos \lambda_j, & y_j &= \cos \psi_j \cos \varphi_j \sin \lambda_j, \\z_j &= \cos \psi_j \sin \varphi_j, & v_j &= \sin \psi_j,\end{aligned}$$

где $\psi_j, \varphi_j, \lambda_j$ — сферические координаты точек a_j , $1 \leq j \leq N$. Полагалось, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_j \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_j \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 2\pi, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Указанные в таблице значения достигнуты при следующих расположениях центров сегментов. Для $k = N - 1$ расположения известны (см., например, [13]).

Пусть $N = 5$. При $k = 1$ центры сегментов расположены в вершинах правильного симплекса, вписанного в S ; для $k = 3$ центры расположены равномерно на дуге большой окружности ($\psi_j = \varphi_j = 0$, $\lambda_j = 360(j - 1)/5$, $1 \leq j \leq 5$).

Пусть $N = 6$. Для $k = 1$ точки a_1 и a_6 расположены в полюсах сферы ($\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_6 = -90^\circ$), а остальные четыре являются вершинами правильного симплекса, вписанного в трехмерную сферу, для которой $\psi = 0$. Для $k = 4$ точки a_j являются вершинами треугольной призмы, вписанной в трехмерную сферу единичного радиуса ($\psi = 0$), координаты $\varphi_j = \pm 26,565^\circ$.

Пусть $N = 7$. При $k = 1$ точки a_1 и a_7 расположены в полюсах сферы ($\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_7 = -90^\circ$), а остальные пять являются вершинами треугольной бипирамиды, вписанной в трехмерную сферу единичного радиуса ($\psi = 0$). Для $k = 2$ два центра a_1, a_2 расположены в полюсах $\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = -90^\circ$ трехмерной сферы, для которой $\psi = 30^\circ$, а пять остальных являются вершинами треугольной бипирамиды, вписанной в трехмерную сферу для которой $\psi = -15^\circ$. При $k = 4$ центры сегментов расположены равномерно на дуге большой окружности ($\psi_j = \varphi_j = 0$, $\lambda_j = 360(j - 1)/7$, $1 \leq j \leq 7$). Для $k = 5$ центры расположены на трехмерной сфере ($\psi = 0$) следующим образом: один в полюсе ($\varphi_1 = 90^\circ$), а остальные по три равномерно на широтах $\varphi = 8,21^\circ$ и $\varphi = -30^\circ$.

Пусть $N = 8$. Для $k = 1$ центры a_1 и a_8 расположены в полюсах сферы ($\psi_1 = 90^\circ$, $\psi_8 = -90^\circ$), а остальные шесть центров являются вершинами четырехугольной бипирамиды, вписанной в трехмерную сферу для $\psi = 0$. При $k = 2$ центры $a_1, \dots, a_4$ и $a_5, \dots, a_8$ являются вершинами правильных симплексов, вписанных в трехмерные сферы, полученные для $\psi = 30^\circ$ и $\psi = -30^\circ$ соответственно. Для $k = 5$ центры сегментов являются вершинами четырехугольной антипризмы, вписанной в трехмерную сферу ($\psi = 0$), $\varphi_j = \pm 20,94^\circ$. При $k = 6$ расположение центров сегментов такое же, как для $k = 2$, но $\psi = 25^\circ$ и $\psi = -25^\circ$.

Очевидно, что $r_{N,N} = 180^\circ$ при любом расположении центров. Относительно остальных значений N и k см. теорему 5.

Автор выражает благодарность С. А. Симонову и Д. Н. Насыбуллину за помощь в проведении расчетов.

Список литературы

1. Тот Л. Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. Физматгиз, Москва, 1958.
2. Fejes Toth L. *Regular Figures*. Pergamon-Macmillan, New York, 1964.

3. Роджерс К. *Укладки и покрытия*. Мир, Москва, 1968.
4. Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы*. Т. I, II. Мир, Москва, 1990.
5. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения. *Проблемы кибернетики* (1983) **40**, 43–110.
6. Сидельников В. М. О плотнейшей упаковке шаров на поверхности n -мерной евклидовой сферы и числе векторов двоичного кода с заданным кодовым расстоянием. *Докл. АН СССР* (1973) **213**, 1029–1032.
7. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода. *Проблемы передачи информации* (1980) **16**, №3, 17–30.
8. Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве. *Проблемы передачи информации* (1978) **14**, №1, 3–25.
9. Blachman N. M., Few L. Multiple packing of spherical caps. *Mathematica* (1963) **10**, 84–88.
10. Rogers C. A. Covering a sphere with spheres. *Mathematica* (1963) **10**, 157–164.
11. Галиев Ш. И. Нахождение приближенного решения максимина со связанными переменными и кратного максимина. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* (1986) **26**, №10, 1455–1467.
12. Галиев Ш. И. Многократные упаковки и покрытия сферы. *Сибирский матем. журнал* (1989) **30**, №3, 202–203.
13. Mackay A. L. The packing of three-dimensional spheres on the surface of a four-dimensional hypersphere. *J. Phys. A.: Math. Gen.* (1980) **13**, 3373–3379.
14. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*. Мир, Москва, 1973.
15. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. Наука, Москва, 1966.
16. Fejes Toth G. Multiple packing and covering of the plane with circles. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1976) **27**, №1–2, 135–140.
17. Fejes Toth G. Multiple packing and covering of spheres. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (1979) **34**, №1–2, 165–176.
18. Галиев Ш. И. Направления убывания для минимаксиминных задач. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* (1994) **34**, №3, 323–343.

Статья поступила 04.05.94.

Переработанный вариант поступил 23.01.95.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 1996, ТОМ 8, ВЫПУСК 3

Заведующая редакцией Л. М. Барыкина

Технический редактор Н. Н. Беляева

Сдано в набор 16.08.96.	Подписано к печати 27.08.96.	Формат 70 × 100/16.
Печать офсетная.	Усл. печ. л. 13,0.	Усл. кр.-отт. 4,4 тыс.
Тираж 335 экз.	Уч.-изд. л. 127.	Бум. л. 5,0.
		Заказ №304.

Адрес редакции: 117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 955 05 08.

Отпечатано в Московской типографии №2 РАН

121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6