Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Гаврилов, О надструктуре класса полиномов в многозначных логиках, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 90–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:02:38

О надструктуре класса полиномов в многозначных логиках

© 1996 г. Г. П. Гаврилов

Для функциональной системы P_k , где $k = p^r$, p — простое число и $r \geq 2$, получено формульное представление для функций класса $\mathcal{M}_k$, состоящего из функций, сохраняющих сравнение по каждому модулю $d = p^s$, $s = 1, \dots, r-1$. Исходя из этого представления, описывается несколько замкнутых классов, включающих класс полиномов Pol_k и содержащихся в классе $\mathcal{M}_k$, а также приводятся некоторые свойства введенных классов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-01206-а.

1. Задача о расположении класса полиномов в структуре замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов в функциональных системах P_k впервые, по-видимому, рассматривалась в работе С. В. Яблонского [1, с. 93–100].

В последующем различными вопросами, связанными с полиномиальными представлениями k -значных функций и с изучением замкнутых классов в P_k , содержащих класс полиномов, занимались Л. Карлиц, Н. Н. Айзенберг, И. В. Семейон, И. Розенберг, А. А. Нечаев и другие (см. [2–10]).

2. Пусть $P_k^{(n)}$ — множество всех n -местных функций вида $E_k^n \rightarrow E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, где $k \geq 3$ и $n \geq 0$, и пусть

$$P_k = \bigcup_{n \geq 0} P_k^{(n)}.$$

Функции из P_k называются k -значными (а также функциями k -значной, или многозначной, логики). Замыкание на множестве подмножеств из P_k рассматривается относительно операции суперпозиции. Через Pol_k обозначим класс всех полиномиальных функций из P_k , т. е. множество всех функций, представимых полиномами по модулю k . Эти функции тоже будем называть полиномами. Если d — делитель числа k , то через $\mathcal{L}_k(d)$ обозначается множество всех функций из P_k , сохраняющих сравнение по модулю d , т. е. $f(\tilde{x}_n) \in \mathcal{L}_k(d)$ тогда и только тогда, когда для любых двух наборов значений переменных $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ таких, что $\alpha_i \equiv \beta_i \pmod{d}$, $i = 1, \dots, n$, выполняется сравнение $f(\tilde{\alpha}^n) \equiv f(\tilde{\beta}^n) \pmod{d}$. Полагаем

$$\mathcal{M}_k = \bigcap_{d|k} \mathcal{L}_k(d).$$

Множества $\mathcal{L}_k(d)$ и $\mathcal{M}_k$ являются замкнутыми классами в P_k .

В настоящей заметке приводится одно формульное представление для функций из класса $\mathcal{M}_k$, где $k = p^r$, p — простое число и $r \geq 2$, и, исходя из этого представления, описывается несколько полных систем в $\mathcal{M}_k$ и серия замкнутых классов, принадлежащих решетке $\langle \text{Pol}_k, \mathcal{M}_k \rangle$, т.е. включающих класс Pol_k и содержащихся в классе $\mathcal{M}_k$.

3. Пусть d — делитель числа k . Через $E_k(d, \tilde{\tau}^n)$, где $\tilde{\tau}^n = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in E_k^n$, обозначим решетку в кубе E_k^n , состоящую из наборов, сравнимых с набором $\tilde{\tau}^n$ по модулю d , т.е.

$$E_k(d, \tilde{\tau}^n) = \{ \tilde{\sigma} : (\tilde{\sigma} \in E_k^n) \ \& \ (\tilde{\sigma} \equiv \tilde{\tau} \pmod{d}) \}.$$

Если $d = 1$ и $d = k$, то

$$E_k(1, \tilde{\tau}^n) = E_k^n, \quad E_k(k, \tilde{\tau}^n) = \{ \tilde{\tau}^n \}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{\tilde{\tau}} E_k(d, \tilde{\tau}) = E_k^n,$$

где объединение берется по всем наборам $\tilde{\tau} \in E_d^n$, и что число разных решеток с шагом d равно d^n , $n \geq 1$. Если $f(\tilde{x}^n) \in P_k$, то через $f_{d, \tilde{\tau}}(\tilde{x}^n)$ обозначаем функцию, которая совпадает с $f(\tilde{x}^n)$ на решетке $E_k(d, \tilde{\tau})$, а вне этой решетки (на кубе E_k^n) равна 0. Ясно, что

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_{\tilde{\tau} \in E_d^n} f_{d, \tilde{\tau}}(\tilde{x}^n)$$

и

$$f_{d, \tilde{\tau}}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) j_{d, \tilde{\tau}^n}(\tilde{x}^n),$$

где

$$j_{d, \tilde{\tau}^n}(\tilde{x}^n) = j_{d, \tau_1}(x_1) j_{d, \tau_2}(x_2) \dots j_{d, \tau_n}(x_n),$$

$$j_{d, \tau}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \equiv \tau \pmod{d}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем сумма и произведение берутся по модулю k .

Замечание 1. Если $d = k$, то

$$j_{k, \tau}(x) = j_{\tau}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \tau, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$j_{d, \tilde{\tau}^n}(\tilde{x}^n) = j_{d, \tilde{0}^n}(\tilde{x}^n - \tilde{\tau}^n) = j_{d, 0}(x_1 - \tau_1) \dots j_{d, 0}(x_n - \tau_n).$$

При изучении функций из класса $\mathcal{M}_{p^r}$ ($r \geq 2$) полезны функции

$$h_l^{(n)}(\tilde{x}^n) = p^l j_{p^{l+1}, \tilde{0}^n}(\tilde{x}^n), \quad l = 0, 1, \dots, r-1.$$

Так как любое число $a \in E_{p^r}$ можно представить в виде

$$a = \sum_{i=0}^{r-1} a_i p^i,$$

где $a_i \in E_p$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Если $f(\tilde{x}^n) \in P_k$, где $k = p^r$, то

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_{i=0}^{r-1} p^i (\theta_i f)(\tilde{x}^n), \quad (1)$$

где функция

$$(\theta_i f)(\tilde{x}^n) = [f(\tilde{x}^n)/p^i] - p[f(\tilde{x}^n)/p^{i+1}]$$

осуществляет отображение вида $E_k^n \rightarrow E_p$, $i = 0, 1, \dots, r-1$.

Здесь деление рассматривается в поле $\mathbf{Q}$, и $[b]$ означает целую часть числа $b \in \mathbf{Q}$.

Замечание 2. При $i = 0$ и $i = r-1$

$$\begin{aligned} (\theta_0 f)(\tilde{x}^n) &= f(\tilde{x}^n) - p[f(\tilde{x}^n)/p], \\ (\theta_{r-1} f)(\tilde{x}^n) &= [f(\tilde{x}^n)/p^{r-1}]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Если $f(\tilde{x}^n) \in \mathfrak{M}_{p^r}$, $r \geq 2$ и $n \geq 1$, то

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\tilde{\tau} \in E_{p^{i+1}}^n} p^i ((\theta_i f)(\tilde{\tau})) j_{p^{i+1}, \tilde{\tau}}(\tilde{x}^n) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\tilde{\tau} \in E_{p^{i+1}}^n} ((\theta_i f)(\tilde{\tau})) h_i^{(n)}(\tilde{x} - \tilde{\tau}).$$

Доказательство. Возьмем произвольный набор $\tilde{\alpha} \in E_{p^r}$ и покажем, что двойные суммы в этом соотношении при $\tilde{x} = \tilde{\alpha}$ равны $f(\tilde{\alpha}^n)$. Пусть $\tilde{\eta}_l \in E_k(p^{l+1}, \tilde{\alpha})$, т.е. $\tilde{\eta}_l$ является набором из $E_{p^{l+1}}^n$, сравнимым с набором $\tilde{\alpha}$ по модулю p^{l+1} , где $l = 0, 1, \dots, r-1$. Тогда $(\theta_l f)(\tilde{\eta}_l) = (\theta_l f)(\tilde{\alpha})$ и, значит,

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\tilde{\tau} \in E_{p^{i+1}}^n} ((\theta_i f)(\tilde{\tau})) h_i^{(n)}(\tilde{\alpha} - \tilde{\tau}) = \sum_{l=0}^{r-1} ((\theta_l f)(\tilde{\eta}_l)) p^l = \sum_{l=0}^{r-1} p^l ((\theta_l f)(\tilde{\alpha})) = f(\tilde{\alpha}).$$

Следствие 1. Система

$$A_{p^r} = \{1, x + y, xy\} \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \{h_i^{(2)}(\tilde{x}^2)\}$$

полна в классе $\mathfrak{M}_{p^r}$.

Доказательство. Очевидно, что $A_{p^r} \subseteq \mathfrak{M}_{p^r}$. Поэтому достаточно установить, что система A_{p^r} порождает любую из функций $h_i^{(n)}(\tilde{x}^n)$, где $i = 0, 1, \dots, r-1$ и $n = 1$ или $n = 3$. Ясно, что $h_i^{(1)}(x) = h_i^{(2)}(x, x)$. Далее, если $n \geq 3$, то справедливо представление

$$h_i^{(n)}(\tilde{x}^n) = h_i^{(2)}(p^i - h_i^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

истинность которого проверяется непосредственно.

Следствие 2. Если $p \geq 3$, то в $\mathfrak{M}_{p^r}$ полна система

$$B_{p^r} = \{1, x + y, xy\} \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \{h_i^{(1)}(\tilde{x})\}.$$

Доказательство. Если $p \geq 3$, то

$$h_i^{(2)}(\tilde{x}^2) = h_i^{(1)}(2p^i - h_i^{(1)}(x_1) - h_i^{(1)}(x_2))$$

при всяком $i = 0, 1, \dots, r-1$.

Замечание 3. Напомним, что функцией Эйлера $\varphi(m)$ называется теоретико-числовая функция, определяемая соотношениями $\varphi(1) = 1$ и

$$\varphi(p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}) = p_1^{r_1-1} \dots p_s^{r_s-1} (p_1 - 1) \dots (p_s - 1),$$

где $p_1, \dots, p_s$ — разные простые числа и $r_i \geq 1$, $i = 1, \dots, s$. В силу известной теоремы Эйлера, каково бы ни было целое число $a \geq 1$, взаимно простое с целым числом m , справедливо сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Используя эту теорему, получаем, что при $k = p^r$ и любом $n \geq 1$

$$h_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i^{p^{r-1}(p-1)}).$$

Значит, функции $h_0^{(n)}(\tilde{x}^n)$ представимы полиномами по модулю p^r .

Из этого факта вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. В $\mathfrak{M}_{p^r}$ при любом простом $p \geq 2$ полна система

$$\{1, x + y, xy\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \{h_i^{(2)}(\tilde{x}^{(2)})\},$$

а при $p \geq 3$ полна система

$$\{1, x + y, xy\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \{h_i^{(1)}(x)\}.$$

Замечание 4. В $\mathfrak{M}_{p^r}$ при всяком простом $p \geq 2$ полна система

$$\{x + y\} \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \{h_i^{(2)}(\tilde{x}^{(2)})\},$$

а при $p \geq 3$ полна система

$$\{x + y\} \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \{h_i^{(1)}(x)\}.$$

4. Пусть $V_{p^r}(l)$, $2 \leq l \leq r-1$, — подмножество из $\mathfrak{M}_{p^r}$ такое, что $f(\tilde{x}^n) \in V_{p^r}(l)$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{x}^n) = g(\tilde{x}^n) + Q(\tilde{x}^n)$, где $Q(\tilde{x}^n)$ — полином по модулю p^r , а функция $g(\tilde{x}^n)$ такова, что в ее разложении по формуле (1) все функции $(\theta_0 g)(\tilde{x}^n), \dots, (\theta_{l-1} g)(\tilde{x}^n)$ равны тождественно нулю. Это определение можно распространить и на случай $l = 1$: множество $V_{p^r}(1)$ совпадает с классом $\mathfrak{M}_{p^r}$.

Из определения множеств $V_{p^r}(l)$ легко вытекает следующее утверждение.

Предложение 3. Множество $V_{p^r}(l)$ является замкнутым классом при всяком $l = 1, 2, \dots, r-1$ и

$$\{1, x + y, xy\} \cup \bigcup_{i=l}^{r-1} \{h_i^{(2)}(\tilde{x}^{(2)})\}$$

— одна из полных в нем систем.

Кроме того, очевидно следующее утверждение.

Предложение 4. Для $l = 2, \dots, r-1$ выполняются включения $V_{p^r}(l-1) \supseteq V_{p^r}(l)$.

5. Покажем, что, кроме одной функции $h_1^{(1)}(x) \in \mathfrak{M}_4$, все остальные функции $h_i^{(n)}(\tilde{x}^n)$, где $i = 1, 2, \dots, r-1$, $n \geq 1$, $p \geq 2$ и $r \geq 2$, не полиномиальны.

Предложение 5. Если $p \geq 3$ и $r \geq 2$, то функция $h_{r-1}^{(1)}(x) \in \mathfrak{M}_{p^r}$ не полиномиальна.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что эта функция представима полиномом:

$$h_{r-1}^{(1)}(x) = \sum_{m=0}^s a_m x^m \pmod{p^r},$$

где $s < 2\varphi(p^r) = 2p^{r-1}(p-1)$. Ясно, что

$$h_{r-1}^{(1)}(0) = a_0 = p^{r-1}, \quad h_{r-1}^{(1)}(p^{r-1}) = 0 = p^{r-1} + \sum_{m=1}^s a_m p^{m(r-1)} = p^{r-1} + a_1 p^{r-1}$$

(так как $m(r-1) \geq r$ при $m \geq 2$, а значит, $p^{m(r-1)} = 0 \pmod{p^r}$). Далее,

$$h_{r-1}^{(1)}(p^{r-1}(p-1)) = h_{r-1}^{(1)}(-p^{r-1}) = 0 = p^{r-1} - a_1 p^{r-1},$$

и поэтому $h_{r-1}^{(1)}(p^{r-1}) + h_{r-1}^{(1)}(-p^{r-1}) = 2p^{r-1} = 0$, что при $p \geq 3$ невозможно.

Предложение 6. Если $r \geq 3$, то функция $h_{r-1}^{(1)}(x) \in \mathfrak{M}_{2^r}$ не полиномиальна.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда

$$h_{r-1}^{(1)}(x) = \sum_{m=0}^s a_m x^m,$$

где $s < 2^r$. Ясно, что

$$h_{r-1}^{(1)}(0) = a_0 = 2^{r-1}, \quad h_{r-1}^{(1)}(2^{r-1}) = 0 = 2^{r-1} + 2^{r-1}a_1$$

(так как $m(r-1) > r$ при $r \geq 3$ и $m \geq 2$ и, значит, $2^{m(r-1)} = 0 \pmod{2^r}$). Отсюда следует, что $a_1 \in \{1, 3, \dots, 2^r - 1\}$. Далее,

$$h_{r-1}^{(1)}(2^{r-2}) = 0 = 2^{r-1} + 2^{r-2}a_1 + 2^{2(r-2)}a_2$$

(поскольку при $r \geq 3$ и $m \geq 3$ справедливо неравенство $m(r-2) \geq r$, а поэтому $2^{m(r-2)} = 0 \pmod{2^r}$),

$$h_{r-1}^{(1)}(-2^{r-2}) = 0 = 2^{r-1} - 2^{r-2}a_1 + 2^{2(r-2)}a_2.$$

Отсюда $h_{r-1}^{(1)}(2^{r-2}) - h_{r-1}^{(1)}(-2^{r-2}) = 2^{r-1}a_1 = 0$, т.е. $a_1 \in \{0, 2, \dots, 2^r - 2\}$, что противоречит установленному выше включению $a_1 \in \{1, 3, \dots, 2^r - 1\}$.

Из предложений 5 и 6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. Класс $V_{p^r}(r-1)$ отличен от класса Pol_{p^r} при $p \geq 3$ и $r \geq 2$, а также при $p = 2$ и $r \geq 3$.

Замечание 5. Тот факт, что $h_{r-1}^{(1)}(x) \notin \text{Pol}_{p^r}$ при $p \geq 3$ и $r = 2$, легко вытекает, например, из рассмотрений, представленных в работах [8, 9]. Если $k = 2^2$, то любая одноместная функция из $\mathfrak{M}_{2^2}$ полиномиальна (см., например, в [11] задачи 1.22 1) и 2) на стр. 83).

Предложение 7. Если $p \geq 2$ и $r \geq 3$, то функции $h_i^{(1)}(x)$ не полиномиальны при $i = 1, 2, \dots, r-2$.

Доказательство. Предположим противное, тогда

$$h_i^{(1)}(x) = \sum_{m=0}^s a_m x^m,$$

где $s < 2p^{r-1}(p-1)$. Ясно, что

$$h_i^{(1)}(0) = a_0 = p^i,$$

$$h_i^{(1)}(p^i) = 0 = p^i + \sum_{m=1}^s a_m p^{mi},$$

$$h_i^{(1)}(p^r - p^i) = h_i^{(1)}(-p^i) = 0 = p^i + \sum_{m=1}^s (-1)^m a_m p^{mi}.$$

Отсюда, $h_i^{(1)}(p^i) + h_i^{(1)}(-p^i) = 0 = 2p^i + 2a_2p^{2i} + 2a_4p^{4i} + \dots$. Если $p \geq 3$, то получаем, что $1 + a_2p^i + a_4p^{3i} + \dots = 0 \pmod{p^{r-1}}$. Но $i \geq 1$ и $r-i \geq 2$. Значит, это сравнение выполняться не может. Пусть теперь $p = 2$. Тогда

$$2^{i+1} + 2^{2i+1}a_2 + 2^{4i+1}a_4 + \dots = 0 \pmod{2^r}$$

и, следовательно,

$$1 + 2^i a_2 + 2^{3i} a_4 + \dots = 0 \pmod{2^{r-i-1}}.$$

Так как $i \geq 1$ и $r-i-1 \geq 1$, такое сравнение не выполняется.

Замечание 6. Поскольку $h_i^{(1)}(x) = h_i^{(n)}(x, \dots, x)$, из установленных нами предположений вытекает, что функция $h_i^{(n)}(\tilde{x}^n) \in \mathfrak{M}_{p^r}$, где $p \geq 3$ и $r \geq 2$ или $p = 2$ и $r \geq 3$, не является полиномиальной ни при каком $i = 1, 2, \dots, r-1$. Функция $h_1^{(n)}(\tilde{x}^n) \in \mathfrak{M}_4$ при $n \geq 2$ тоже не полиномиальная (см., например, [8,9] и задачу 1.22, 3) на стр. 83 в [11]).

6. Далее считаем $p = 2$.

Предложение 8. Функция $h_{r-1}^{(2)}(\tilde{x}^2) \in \mathfrak{M}_{2^r}$ при $r \geq 2$ не принадлежит замыканию системы $W_{2^r} = \{1, x + y, xy\} \cup \{h_{r-1}^{(1)}(x)\}$.

Доказательство. При $r = 2$ утверждение очевидно, ибо $h_1^{(1)}(x) \in \text{Pol}_4$ (см. замечание 5), а $h_1^{(2)}(\tilde{x}^2) \notin \text{Pol}_4$ (см. замечание 6). Пусть $r \geq 3$. Неполиномиальность функции $h_{r-1}^{(2)}(\tilde{x}^2)$ обоснована в замечании 6. Пусть H — множество, состоящее из таких двуместных функций $f(\tilde{x}^2) \in \mathfrak{M}_{2^r}$, что среди значений $f(0,0), f(0,2^{r-1}), f(2^{r-1},0)$ и $f(2^{r-1},2^{r-1})$ функций $f(\tilde{x}^2)$ ровно три одинаковых. Легко видеть, что если $f(x_1, x_2) \in H$, то функция $f(\lambda_1 2^{r-1} + x_1, \lambda_2 2^{r-1} + x_2)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0,1\}$, тоже принадлежит H . Поэтому в дальнейшем можно считать, что $f(0,2^{r-1}) = f(2^{r-1},0) = f(2^{r-1},2^{r-1}) \neq f(0,0) = a$ и $f(0,2^{r-1}) = 2^{r-1} + a$, где $a \in E_{2^r}$.

Пусть $f(\tilde{x}^2) = f_1(\tilde{x}^2) * f_2(\tilde{x}^2)$, где $*$ есть либо $+$ либо $\cdot$ (по модулю 2^r) и $f(0,0) = a$. Положим $f_i(0,0) = a_i$ и $f_i(0,2^{r-1}) = \lambda_{i1} 2^{r-1} + a_i$, $f_i(2^{r-1},0) = \lambda_{i2} 2^{r-1} + a_i$, $f_i(2^{r-1},2^{r-1}) = \lambda_{i3} 2^{r-1} + a_i$, $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Рассмотрим случай, когда $f(\tilde{x}^2) = f_1(\tilde{x}^2) + f_2(\tilde{x}^2)$. Так как $f(0,2^{r-1}) = 2^{r-1} + a$, должны выполняться равенства $\lambda_{1j} + \lambda_{2j} = 1$, $j = 1, 2, 3$. Если $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 1$, то $f_1 \in H$. Если $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$, то $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 1$ и $f_2 \in H$. Если ровно две из величин λ_{1j} равны 0, то $f_1 \in H$. Если же только одна из величин λ_{1j} равна 0, то $f_2 \in H$. Пусть теперь $f = f_1 f_2$. Тогда

$$(\lambda_{1j} 2^{r-1} + a_1)(\lambda_{2j} 2^{r-1} + a_2) = 2^{r-1} + a_1 a_2,$$

т.е. $\lambda_{1j} a_2 2^{r-1} + \lambda_{2j} a_1 2^{r-1} = 2^{r-1}$, $j = 1, 2, 3$. Если a_1 — четное, то a_2 должно быть нечетным и все $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$ должны равняться 1. Значит $f_1 \in H$. Аналогично рассматривается подслучай, когда a_2 — четное число. Предположим, что a_1 и a_2 — нечетные числа. Тогда $\lambda_{1j} 2^{r-1} + \lambda_{2j} 2^{r-1} = 2^{r-1}$, т.е. $\lambda_{1j} + \lambda_{2j} = 1$, $j = 1, 2, 3$.

Остальные рассуждения такие же, как и в конце предыдущего случая. Рассмотрим, наконец, суперпозицию $h_1^{(1)}(g(x_1, x_2))$ и пусть она есть функция $f(\tilde{x}^2) \in H$. Тогда $f(0, 0) = a$ и $f(0, 2^{r-1}) = f(2^{r-1}, 0) = f(2^{r-1}, 2^{r-1}) = 2^{r-1} + a$, где a есть 0 или 2^{r-1} . Если $a = 0$, то $g(0, 2^{r-1}) = g(2^{r-1}, 0) = g(2^{r-1}, 2^{r-1}) = 0$, а $g(0, 0)$ должно быть отлично от 0. Значит, $g(0, 0) = 2^{r-1}$ и $g(\tilde{x}^2) \in H$. Если же $a = 2^{r-1}$, то $g(0, 0) = 0$ и все значения $g(0, 2^{r-1})$, $g(2^{r-1}, 0)$ и $g(2^{r-1}, 2^{r-1})$ отличны от нуля, а потому они равны 2^{r-1} и $g(\tilde{x}^2) \in H$. Итак, для построения с помощью функций из W_{2^r} какой-либо функции из H , необходимо иметь функцию, принадлежащую H . В то же время ни одна из функций системы W_{2^r} в множестве H не содержится (функции 1 и $h_{r-1}^{(1)}(x)$ надо рассматривать как двуместные). Так как $h_{r-1}^{(2)}(\tilde{x}^2) \in H$, значит, $h_{r-1}^{(2)}(\tilde{x}^2) \notin [W_{2^r}]$. Предложение 8 доказано.

Из предложений 6 и 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. При $r \geq 3$ справедливы строгие включения $\text{Pol}_{2^r} \subset [W_{2^r}] \subset V_{2^r}(r-1)$.

Список литературы

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике. *Труды Матем. ин-та АН СССР* (1958) **51**, 5–142.
2. Carlitz L. Functions and polynomials (mod p^n). *Acta Arithmetica* (1964) №9, 66–78.
3. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В. Некоторые критерии представимости функций k -значной логики полиномами по модулю k . В кн.: *Многоустойчивые элементы и их применение*. Сов. радио, Москва, 1971, 84–88.
4. Rosenberg I. G. Polynomial functions over finite rings. *Glasnik Matematički* (1975) **10**, №1, 25–33.
5. Нечаев А. А. Критерий полноты систем функций p^n -значной логики, содержащих операции сложения и умножения по модулю p^n . В кн.: *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач*. ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1980, вып 34, 74–89.
6. Черепов А. Н. Описание структуры замкнутых классов в P_k , содержащих класс полиномов. *Проблемы кибернетики* (1983) **40**, 5–18.
7. Черепов А. Н. Надструктура класса сохранения отношений сравнения в многозначной логике. *Тезисы докл. VII Всесоюзной конф. "Проблемы теоретической кибернетики"*, т. 1. Иркутск, 1985, 200–201.
8. Мещанинов Д. Г. Некоторые условия представимости функций из P_k полиномами по модулю k . *Докл. АН СССР* (1988) **299**, №1, 50–53.
9. Мещанинов Д. Г. О некоторых свойствах надструктуры класса полиномов в P_k . *Матем. заметки* (1988) **44**, №5, 673–681.
10. Ремизов А. Б. О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k . *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 3–15.
11. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. *Сборник задач по дискретной математике*. Наука, Москва, 1977.

Статья поступила 30.12.94.