Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников с короткими прямыми, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 31–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:40:14

О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников с короткими прямыми

© 1996 г. А. А. Махнев

Доказано, что сильно регулярный граф, в котором окрестности вершин являются точечными графами обобщенных четырехугольников с 4-точечными прямыми, совпадает с частным графа Джонсона на 4-элементных подмножествах из 8-элементного множества, или с графом ранга 3 для унитарной группы $U_5(2)$, или с графом МакЛафлина.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-1529.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим окрестность a в Γ , т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, смежных с a ; $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс графов. Граф Γ называется локально $\mathfrak{X}$ -графом, если $[a] \in \mathfrak{X}$ для любой вершины a из Γ . Если $\mathfrak{X} = \{\Lambda\}$, то локально $\mathfrak{X}$ -граф называется локально Λ -графом или расширением графа Λ .

Обобщенным четырехугольником с параметрами s, t называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая точка лежит на $t+1$ прямой, каждая прямая содержит $s+1$ точку (и пересечение любых двух прямых содержит не более одной точки), если прямая L не содержит точку a , то найдется единственная прямая, содержащая a и пересекающая L . Класс обобщенных четырехугольников с данными параметрами s, t обозначим через $GQ(s, t)$. Заметим, что точечный граф обобщенного четырехугольника с параметрами s, t является сильно регулярным с параметрами $k = s(t+1)$, $v = (s+1)(st+1)$, $\lambda = s-1$, $\mu = t+1$. Далее, обобщенный четырехугольник однозначно восстанавливается по своему точечному графу и в дальнейшем класс точечных графов для обобщенных четырехугольников с параметрами s, t мы также будем обозначать $GQ(s, t)$.

В последнее время большое число работ разных авторов было посвящено расширениям обобщенных четырехугольников (см. [1] и библиографию в этой работе).

Обобщенный четырехугольник имеет короткие прямые, если каждая его прямая содержит не более 4 точек (т. е. параметр s не больше 3). В [2] описаны

связные локально $GQ(2, t)$ -графы. Цель данной работы — описание сильно регулярных локально $GQ(3, t)$ -графов.

Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -элементные подмножества данного множества из n элементов, причем две вершины смежны, если они пересекаются по $(m - 1)$ -подмножеству. Если $n = 2m$, то частным графа Джонсона $1/2J(2m, m)$ называется граф, полученный из $J(2m, m)$ отождествлением m -подмножеств с их дополнениями.

Рассмотрим унитарную квадрику $Q = H_4(4)$ в проективном пространстве $P = P_4(4)$. Построим граф Γ с множеством точек $P - Q$, причем точка b смежна с точкой a , если b лежит в ортогональном дополнении $k a$ относительно Q . Тогда Γ сильно регулярен с параметрами $(176, 40, 12, 8)$, $[a] \simeq W(3)$ и блоки из Γ — это множества из 5 попарно ортогональных точек в $P - Q$. Граф Γ — граф ранга 3 для унитарной группы $U_5(2)$.

Пусть a — точка системы Штейнера $S(4, 7, 23)$. Тогда 253 ее блока распадаются на 2 класса: $\mathcal{B}_1$ состоит из 77 блоков, содержащих a , и $\mathcal{B}_2$ состоит из 176 блоков, не содержащих a . Рассмотрим граф Γ , множество вершин которого состоит из 22 оставшихся точек системы Штейнера (образующих коклику) и $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Далее, точка b смежна с каждым блоком из $\mathcal{B}_1$, в котором она не лежит, и с каждым блоком из $\mathcal{B}_2$, в котором она лежит. Два блока из $\mathcal{B}_2$ смежны, если они пересекаются по одной точке. Наконец, блок из $\mathcal{B}_2$ смежен с блоком из $\mathcal{B}_1$, или два блока из $\mathcal{B}_1$ смежны, если их пересечение состоит не из одной точки. Тогда Γ — граф ранга 3 для группы McL с параметрами $(275, 112, 30, 56)$, в котором $[a] \simeq Q_5(3)$ (Γ — граф МакЛафлина). Определение классических обобщенных четырехугольников и их обозначения можно найти в [3]. Для вершины a графа Γ через $[a]'$ обозначим подграф, индуцированный Γ на $\Gamma - a^\perp$. Через (m, n) обозначим полный 2-дольный граф с долями размеров m и n .

Теорема 1. *Не существуют сильно регулярные графы: локально $Q_4(3)$ -граф с параметрами $(95, 40, 12, 20)$ и локально $GQ(3, 5)$ -граф с параметрами $(245, 64, 18, 16)$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(3, t)$ -граф.*

Тогда $t = 1$ и Γ — частное графа Джонсона $1/2J(8, 4)$, или $t = 3$ и Γ — граф ранга 3 для $U_5(2)$, или $t = 9$ и Γ — граф МакЛафлина.

Обобщенный четырехугольник $GQ(3, t)$ имеет параметр t , равный 1, 3, 5 или 9 [3]. Случай локально $GQ(3, 1)$ -графов полностью рассмотрен в [6]. Если $t = 3$, то по лемме 5 сильно регулярный локально $GQ(3, 3)$ -граф имеет параметры $(176, 40, 12, 8)$ и $[a] \simeq W(3)$, или параметры $(95, 40, 12, 20)$ и $[a] = Q_4(3)$ для любой вершины a графа Γ . В [7] доказано, что любой локально $GQ(3, 3)$ -граф является графом ранга 3 для группы $U_5(2)$. Если $t > 3$, то сильно регулярный локально $GQ(3, t)$ -граф либо является графом МакЛафлина с параметрами $(275, 112, 30, 56)$, либо $t = 5$ и Γ имеет параметр 5. Таким образом, следствие вытекает из теоре

2. Предварительные результаты

Лемма 1 ([3]). Пусть Σ — обобщенный четырехугольник с параметрами s, t .
Тогда

- (a) Σ содержит $(s+1)(st+1)$ точек и $(t+1)(st+1)$ прямых;
- (b) если $s > 1, t > 1$, то $s \leq t^2, t \leq s^2$ и $s+t$ делит $st(s+1)(t+1)$;
- (c) точечный граф для Σ сильно регулярен с параметрами (v, k, λ, μ) , где $k = s(t+1), \lambda = s-1, \mu = t+1$.

Лемма 2. Пусть Γ — локально $GQ(s, t)$ -граф.

Тогда максимальные клики из Γ содержат $s+2$ точки (такие клики мы будем называть блоками). Каждая точка из Γ лежит на $(t+1)(st+1)$ блоках. Любые два различных блока содержат не более двух общих точек, любые две смежные точки лежат на $t+1$ блоках.

Все утверждения легко выводятся из определений с помощью леммы 1.

Лемма 3 ([4]). Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) .

Тогда $\mu(v-k-1) = k(k-\lambda-1)$ и либо $k = 2\mu, \lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$ для подходящего натурального числа n . Собственные значения матрицы смежности Γ — это $k, -m, n - m$ (где $2m = n - \lambda + \mu$) с кратностями 1, $f = k(m-1)(k+m)/(\mu n), g = v - f - 1$.

Условием целочисленности графа Γ называется условие делимости числа $k(m-1)(k+m)$ на μn .

Лемма 4. Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(s, t)$ -граф.

Тогда

- (a) $m-1$ делит $s^2t, n = m-1 + s^2t/(m-1), \mu = st + s + m + 1 - s^2t/(m-1)$;
- (b) $\min\{2(t+1), (s+1)(t+2-s)\} \leq \mu \leq 2(st+1)$, причем в случае $\mu = 2(st+1)$ каждая точка, лежащая вне блока, смежна с двумя точками на этом блоке; а в случае $\mu = (s+1)(t+2-s)$, если a, b — не смежные точки, то для любой точки c из $[a] - [b]$ точно $(t+2-s)/2$ прямых из $[c]$ пересекают $[a] \cap [b]$.

Доказательство. Из лемм 2, 3 следует, что $4s^2t = n^2 - (st + s + 2 - \mu)^2$. Отсюда $m-1 = (n - st - s - 2 + \mu)/2$ делит s^2t и $(n + st + s + 2 - \mu)/2 = s^2t/(m-1)$. Это влечет первое утверждение леммы.

Второе утверждение следует из леммы 3.9, пункта (а), и доказательства леммы 3.11 [1].

3. Локально $GQ(3, 3)$ -графы

Лемма 5. Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(3, 3)$ -граф.

Тогда Γ имеет параметры $(176, 40, 12, 8)$, $[a] \simeq W(3)$ или параметры $(95, 40, 12, 20)$, $[a] \simeq Q_4(3)$ для любой вершины a графа Γ .

Доказательство. По лемме 4

$$\mu = 14 + (m - 1) - 27/(m - 1), \quad n = (m - 1) + 27/(m - 1), \quad 8 \leq \mu \leq 20.$$

Отсюда, $m - 1 = 3$ или $m - 1 = 9$. Но в случае $m - 1 = 3$ любой μ -подграф есть $GQ(1, 3)$ и граф $[a]$ содержит регулярную пару точек. Отсюда окрестность любой вершины есть $W(3)$.

Если же $m - 1 = 9$, то $\mu = 20$ и любой μ -подграф есть локальное подпространство. По предложению 8 [2] $W(3)$ не содержит локальных подграфов на 20 вершинах, поэтому окрестность любой вершины есть $Q_4(3)$.

Пусть до конца этого параграфа Γ — локально $Q_4(3)$ -граф с параметрами $(95, 40, 12, 20)$. Хорошо известно, что каждая пара точек в $Q_4(3)$ антирегулярна, поэтому $[a]$ — граф с параметрами $(40, 12, 2, 4)$, не содержащий $(3, 3)$ -подграфов.

Пусть a, b — не смежные вершины из Γ , $\Lambda = [a] \cap [b]$. Тогда Λ — регулярный граф валентности 4 без треугольников. Заметим, что Λ , $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ содержат по 20 точек, поэтому $[a]' \cap [b]'$ состоит из 33 точек.

Положим $\Lambda' = [a]' \cap [b]'$.

Лемма 6. Граф Λ не содержит $(2, 4)$ -подграфов.

Доказательство. Пусть d_1, d_2 — не смежные точки из Λ и $[d_1] \cap [d_2]$ содержит 4 точки $\{c_i\}$ из Λ . Тогда $[d_1] \cap [d_2]$ содержит $\{c_i\}$ и 14-точечное подмножество Δ из Λ' . Положим $\Delta' = \Lambda' - \Delta$. Заметим, что окрестность точки x из Λ содержит a, b , 4 точки из Λ , по 8 точек из $[a] - [b]$ и $[b] - [a]$ и 18 точек из Λ' . Далее, $[c_i]$ содержит 4 точки из $[d_1] \cap [d_2]$, две из которых — a и b , а остальные две лежат в Δ . Отсюда, $[c_i]$ содержит 16 точек из Δ' . Но Δ' состоит из 19 точек, поэтому $[c_1] \cap [c_2]$ содержит не менее 13 точек из Δ' .

Теперь $[c_1] \cap [c_2]$ содержит a, b, d_1, d_2 , еще по две точки из $[a]$ и $[b]$ и 13 точек из Δ' . Отсюда, $[c_1] \cap [c_2]$ содержит d_1, d_2 и еще одну точку $d_{1,2}$ из Λ . Рассуждая аналогично, получим, что $[c_1]$ содержит точки $d_1, d_2, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}$ из Λ . Но тогда, без ограничения общности, $d_{1,2} = d_{1,3} = d_3$ и $[a]$ содержит $(3, 3)$ -подграф $\{c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3\}$. Получили противоречие.

Лемма 7. Граф Λ не содержит $(2, 3)$ -подграфов.

Доказательство. Пусть $d_1, d_2 \in \Lambda$ и $[d_1] \cap [d_2]$ содержит точно 3 точки c_1, c_2, c_3 из Λ . Тогда $[d_1] \cap [d_2]$ содержит еще по одной точке из $[a]$, $[b]$ и 13-точечное подмножество Δ из Λ' . Положим $\Delta' = \Lambda' - \Delta$. Тогда Δ' состоит из 20 точек и $[d_j]$ содержит 5 точек из Δ' .

Заметим, что $[c_i]$ содержит две точки из Δ и 16 точек из Δ' , поэтому $[c_1] \cap [c_2]$ содержит a, b, d_1, d_2 , еще по две точки из $[a], [b]$ и не менее 12 точек из Δ' .

Допустим, что $[c_1] \cap [c_2]$ содержит 13-точечное подмножество Ω из Δ' . Тогда $[c_1] \cap [c_2]$ содержит третью точку d_3 из Λ . Положим

$$\Omega' = \Lambda' - \Omega, \quad \Sigma = \Delta' \cap \Omega'.$$

Тогда $|\Sigma| = 7$ и $[x]$ содержит 3 точки из Σ для $x \in \{c_1, c_2, d_1, d_2\}$. Подграф $[c_i] \cap [d_j]$ расщепляется на 4 треугольника, два из которых содержат a и b соответственно. Каждый из двух оставшихся треугольников содержит по одной точке из Δ' и Ω' , поэтому в $[c_i] \cap [d_j]$ содержится две точки из Σ для любых $i, j \in \{1, 2\}$. Получили противоречие.

Итак, $[c_i] \cap [c_j]$ содержит 12 точек из Δ' для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Отсюда, Δ' содержит 8-точечное подмножество Δ_0 из $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ и три 4-точечных подмножества Δ_i , состоящих из точек, не смежных с c_i . С другой стороны, $[d_j]$ содержит 5 точек из Δ' и по две точки из $[c_i] \cap [c_l] \cap \Lambda'$. Отсюда, $[d_j]$ не содержит точек из Δ_0 . Пусть, для определенности, $[d_1]$ содержит по две точки из Δ_1, Δ_2 и одну точку из Δ_3 . Тогда $[c_1] \cap [c_2]$ содержит точку e из Δ и, следовательно, точку d_3 из Λ .

Итак, $[e]$ содержит c_1, c_2, d_1, d_2 и еще 8 точек из $[a] \cap [b]$ (ввиду симметричности вхождения троек $a, b, e; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3$). Отсюда следует, что $[e]$ содержит 12 точек из $[a]' \cap [b]'$, а именно: две точки из Δ , две точки из $[c_1] \cap [c_2] \cap \Delta'$ и все 8 точек из $\Delta' - ([c_1] \cap [c_2])$.

Таким образом, Λ' содержит точку e , по 12 точек из $[d_1] \cap [d_2] - \{e\}$ и из $[c_1] \cap [c_2] - \{e\}$ и 8-точечное подмножество π из $[e] \cap [c_3] \cap [d_3]$. Рассмотрим подграф $[c_3] \cap [d_1]$. Этот подграф состоит из 4 треугольников, один из которых содержит точку a , а другой — точку b . Оставшиеся два треугольника содержат по одной точке, смежной с d_2 , и по две точки, смежных с d_3 (и, следовательно, смежных и с e). Но теперь окрестность точки d_1 в графе $[c_3] \cap [e]$ состоит из двух ребер. Получили противоречие.

Лемма 8. *Граф Λ не содержит 4-циклов.*

Доказательство. Пусть $c_1 \ d_1 \ c_2 \ d_2$ — 4-цикл из Λ . Тогда подграф $\Sigma = \{a, b, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ является октаэдром. Через $K_i(\Sigma)$ обозначим множество точек из $\Gamma - \Sigma$, смежных с i точками из Σ .

В силу леммы 7, $[d_1] \cap [d_2]$ содержит точно две точки c_1, c_2 из Λ , поэтому $[d_1] \cap [d_2]$ содержит по две точки из $[a] - \Lambda$ и $[b] - \Lambda$ и 12-элементное подмножество Δ из Λ' . Аналогично, $[c_1] \cap [c_2]$ содержит 12-элементное подмножество Δ' из Λ' , причем по лемме 7 Δ и Δ' не пересекаются. Положим $\Omega = \Lambda' - (\Delta \cup \Delta')$. Тогда Ω состоит из 9 точек, причем $[c_i] \cap [d_j]$ содержит по две точки из Δ, Δ' и из Ω для $i, j \in \{1, 2\}$. Отсюда Ω содержит единственную точку z из $K_0(\Sigma)$. Далее, $K_i(\Sigma)$ пусто для $i \geq 4$.

Теперь $[z] \cap [x]$ содержит 20 точек для $x \in \Sigma$, поэтому $[z] \subset K_3(\Sigma)$. С другой стороны, $K_3(\Sigma)$ содержит по 8 точек из $[a] \cap [c_i] \cap [d_j]$ и $[b] \cap [c_i] \cap [d_j]$, и мы будем говорить об этих точках, что они лежат на соответствующих гранях октаэдра. Далее, $[a] \cap [b] \cap [x]$ содержит две точки вне Σ для $x \in \{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ и $K_3(\Sigma)$ содержит 24 точки этого вида. Значит, $|K_3(\Sigma)| = 40$ и $[z] = K_3(\Sigma)$.

Рассмотрим точки ac_1d_1 , $(ac_1d_1)'$ грани $[a] \cap [c_1] \cap [d_1]$ и точки ac_2d_2 , $(ac_2d_2)'$ грани $[a] \cap [c_2] \cap [d_2]$. По свойствам окрестности $[a] = Q_4(3)$, каждая точка вне прямой $\{c_1, d_1, ac_1d_1, (ac_1d_1)'\}$ из $[a]$ смежна с единственной точкой на этой прямой. Без ограничения общности, точка ac_1d_1 смежна с ac_2d_2 . Тогда $(ac_1d_1)'$ смежна с $(ac_2d_2)'$ и мы получим октаэдр

$$\Sigma' = \{a, z; ac_1d_1, (ac_1d_1)', ac_2d_2, (ac_2d_2)'\}.$$

Как и выше, $K_0(\Sigma')$ содержит единственную точку w и $[w] = K_3(\Sigma')$. С другой стороны, $c_1, d_1, c_2, d_2 \in K_3(\Sigma')$, $w \in K_4(\Sigma)$. Получили противоречие.

Лемма 9. Пусть d_1, d_2, c — такие точки из Λ , что $c \in [d_1] \cap [d_2]$, $\Sigma = \{c, a, b, d_1, d_2\}$, $K_i(\Sigma)$ — множество точек из $\Gamma - \Sigma$, смежных с i точками из Σ , $y_i = |K_i(\Sigma)|$. Тогда $y_1 = 20$, $y_2 = 46$, $y_3 = 24$.

Доказательство. Заметим, что $[d_1] \cap [d_2]$ содержит единственную точку c из Λ , поэтому $[d_1] \cap [d_2]$ содержит по 3 точки из $[a] - \Lambda$ и $[b] - \Lambda$ и 11-элементное подмножество Δ из Λ' . Таким образом, Λ' состоит из Δ , двух 7-элементных подмножеств $[d_1] \cap \Lambda' - \Delta$, $[d_2] \cap \Lambda' - \Delta$ и 8-элементного подмножества Ω . Но $[c]$ содержит две точки из Δ , по 4 точки из $[d_1] \cap \Lambda' - \Delta$ и $[d_2] \cap \Lambda' - \Delta$, поэтому $\Omega \subset [c]$. Отсюда $y_0 = y_j = 0$ для $j \geq 4$.

Для $x_1, \dots, x_l \in \Sigma$ точкой типа $x_1 \dots x_l$ назовем точку из $\Gamma - \Sigma$, лежащую в $\bigcap_{i=1}^l [x_i]$. Тогда $K_3(\Sigma)$ содержит по три точки типа d_1ad_2 , d_1bd_2 , ad_1b , ad_2b и по две точки типа acd_1 , acd_2 , bcd_1 , bcd_2 , acb , d_1cd_2 , итого 24 точки. Далее, $K_2(\Sigma)$ содержит по 4 точки типа ca , cb , cd_1 , cd_2 , по 3 точки типа ad_1 , ad_2 , bd_1 , bd_2 и по 9 точек типа ab , d_1d_2 , итого 49 точек. Наконец, $K_1(\Sigma)$ содержит по 3 точки типа a , b , d_1 , d_2 и 8 точек типа c . Лемма доказана.

Завершим рассмотрение $Q_4(3)$ -случая. Подграф, изоморфный Σ , мы будем называть пирамидой. Мы будем говорить, что точки из $K_3(\Sigma)$ типа acd_1 лежат на грани $\{a, c, d_1\}$ этой пирамиды и т. п. Пусть грань $\{a, c, d_1\}$ содержит точки acd_1 , $(acd_1)'$, а грань $\{b, c, d_2\}$ — точки bcd_2 , $(bcd_2)'$.

По свойству $Q_4(3)$, каждая точка из $[c]$ вне прямой $\{a, d_1, acd_1, (acd_1)'\}$ смежна с единственной точкой на этой прямой. Отсюда, без ограничения общности, acd_1 смежна с bcd_2 , следовательно, $(acd_1)'$ смежна с $(bcd_2)'$ и мы получим пирамиду

$$\Sigma' = \{c; acd_1, (bcd_2)', bcd_2, (acd_1)'\}.$$

Повторив рассуждение для точек x_1, y_1 грани $\{acd_1, c, bcd_2\}$ и точек x_2, y_2 грани $\{(acd_1)', c, (bcd_2)'\}$, убедимся, что точки x_1, x_2, y_2, y_1 из $K_1(\Sigma) \cap [c]$ образуют 4-цикл.

Рассмотрев пирамиду

$$\Sigma'' = \{c; acd_2, (bcd_1)', bcd_1, (acd_2)'\}$$

и точки x_3, y_3 грани $\{acd_2, c, bcd_1\}$, точки x_4, y_4 грани $\{(acd_2)', c, (bcd_1)'\}$, получим 4-цикл $x_3 x_4 y_4 y_3$.

Таким образом, прямые из $[c]$, проходящие через ребра $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{y_3, y_4\}$, содержат по две точки из $K_3(\Sigma)$, и мы получим пирамиду

$$\{c; abc, (abc)', d_1d_2c, (d_1d_2c)'\},$$

на гранях которой лежат 8 точек из $[c] \cap K_1(\Sigma)$.

Положим $d_3 = abc$, $d_4 = (abc)'$. Тогда $[c] \cap \Lambda = \{d_1, \dots, d_4\}$ и Λ' для $i \in \{1, \dots, 4\}$ содержит 4-элементное подмножество Λ_i , состоящее из точек, смежных с точкой c и единственной точкой $d_i \in \{d_1, \dots, d_4\}$. Отсюда две точки из $[c] \cap \Delta$ (где $\Delta = [d_1] \cap [d_2] \cap \Lambda'$) лежат в $[d_3] \cap [d_4]$, и $[c]$ содержит $(4, 4)$ -подграф. Получили противоречие.

4. Случай $t > 3$

Пусть $t > 3$. Тогда $t = 5$ или 9 , причем в каждом случае существует единственный обобщенный четырехугольник с параметрами $(3, t)$.

Лемма 10. Если Γ — сильно регулярный локально $GQ(3, t)$ -граф, $t > 3$, то либо Γ — граф МакЛафлина, либо $t = 5$ и Γ имеет параметры $(245, 64, 18, 16)$.

Доказательство. Пусть сначала $t = 9$. По лемме 4

$$\mu = 32 + (m - 1) - 81/(m - 1), \quad n = m - 1 + 81/(m - 1), \quad 32 \leq \mu \leq 56.$$

Отсюда $m - 1$ равно 9 или 27. Если $m - 1 = 27$, то граф Γ имеет параметры $(275, 112, 30, 56)$, и ввиду [5] Γ — граф МакЛафлина. Если же $m - 1 = 9$, то граф Γ имеет параметры

$$k = 112, \quad \lambda = 30, \quad \mu = 32, \quad n = 18,$$

$32 \cdot 18$ не делит $112 \cdot 9 \cdot 122$ (не выполнено условие целочисленности).

Пусть теперь $t = 5$. По лемме 4

$$\mu = 20 + m - 1 - 45/(m - 1), \quad n = m - 1 + 45/(m - 1), \quad 16 \leq \mu \leq 32.$$

Отсюда $m - 1$ равно 9 или 15. Если $m - 1 = 9$, то Γ — граф из заключения леммы. Если же $m - 1 = 15$, то $k = 64$, $\lambda = n = 18$ и $32 \cdot 18$ не делит $64 \cdot 15 \cdot 80$. Лемма доказана.

Пусть до конца статьи Γ — сильно регулярный локально $GQ(3, 5)$ -граф с параметрами $(245, 64, 18, 16)$.

Лемма 11. Пусть Σ — обобщенный четырехугольник с параметрами $(3, 5)$; a, b — не смежные точки из Σ , $\Delta = [a] \cap [b]$, $K_i(\Delta)$ — множество точек из $[a]' \cap [b]'$, смежных с i точками из Δ , $x_i = |K_i(\Delta)|$.

Тогда $x_0 = 2$, $x_4 = 6$ и $x_2 = 24$, причем для точек $c, d \in K_0(\Delta)$

$$[c] \cap [d] = K_4(\Delta)$$

и граф $\Lambda = \{K_4(\Delta) \cup \{a, b\}; \{c, d\} \cup \Delta\}$ — двудольный граф валентности 6 на 16 вершинах.

Доказательство. Лемма следует из утверждений (а) и (б) в доказательстве теоремы 6.2.4 [3].

Лемма 12. Пусть u, w — не смежные точки из Γ , $[u] = \Sigma$.

Тогда

- (а) если $z \in [u] - [w]$, то $[z] \cap [u] \cap [w]$ состоит из двух ребер;
- (б) граф $[u] \cap [w]$ совпадает с подграфом Λ из леммы 11 для подходящих точек $a, b \in \Sigma$.

Доказательство. Заметим, что в нашем графе $\mu = (s+1)(t+2-s)$ и по лемме 4 (б) точно две прямые из $[z]$ пересекают $[u] \cap [w]$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Положим $\Lambda = [u] \cap [w]$ и выберем не смежные точки a, b из Λ так, что $\Delta = [a] \cap [b] \cap \Lambda$ содержит максимальное число α точек из Λ .

Если $\alpha = 6$, то Σ содержит 6 точек $\{e_i\}$, смежных с 4 точками из Δ . По первому утверждению леммы $\{e_i\} \subset \Lambda$. Отсюда следует, что две точки c, d из Σ , не смежные ни с a , ни с b , также лежат в Λ и Λ — искомый подграф.

Допустим, что $\alpha = 5$. Положим $\Delta' = [a] \cap [b] \cap \Sigma$. По лемме 11, Σ содержит 6 точек $\{e_i\}$, каждая из которых смежна с 4 точками из Δ' . Снова по первому утверждению леммы, $\{e_i\} \subset \Lambda$, и Λ содержит точки c, d из Σ , не смежные ни с одной из точек в $\{a, b\} \cup \Delta'$. Но тогда $\alpha = 6$, получили противоречие.

Предположим, что $\alpha = 4$. Пусть $a \in \Lambda$, $\Lambda' = \Lambda - (a^\perp \cap \Lambda)$, K_i — множество точек из Λ' , смежных с i точками из $[a] \cap \Lambda$, $x_i = |K_i|$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\alpha} x_i = 9, \quad \sum_{i=1}^{\alpha} i x_i = 30,$$

поэтому

$$4x_0 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \quad x_4 - x_2 - 2x_1 - 3x_0 = 3.$$

Далее, если $f \in K_4$, $g \in [f] \cap \Lambda'$, то $[f] \cap [g]$ не содержит точек из $a \cap \Lambda$ (так как Λ — граф без треугольников), поэтому $g \in K_i$ для некоторого $i \leq 2$. Отсюда

$$2x_4 \leq 6x_0 + 5x_1 + 4x_2,$$

и мы получим единственное решение

$$x_0 = x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_4 = 6.$$

Положим $K_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$.

Если f — смежная с g_1, g_2 точка из K_4 , то $[g_1]$ и $[g_2]$ содержат две общие точки из $[a] \cap \Lambda$, а именно, $[a] \cap \Lambda - [f]$. Если теперь f' — точка из K_4 , смежная с g_2, g_3 , то снова

$$[g_2] \cap [a] \cap \Lambda = [g_3] \cap [a] \cap \Lambda = [a] \cap \Lambda - [f'].$$

Но тогда $\alpha \geq 5$, получили противоречие. Лемма доказана.

Фиксируем точку u из Γ и положим $\Sigma = [u]$. Тогда Σ содержит $32 \cdot 45$ пар несмежных точек. С другой стороны, $\Gamma - u^\perp$ содержит 180 точек и для $w \in \Gamma - u^\perp$ подграф $\Lambda = [w] \cap \Sigma$ содержит 8 пар точек x, y таких, что $[x] \cap [y]$ содержит 6 точек из Λ (см. утверждение (е) из доказательства теоремы 6.2.4 [3]). Но $180 \cdot 8 = 32 \cdot 45$, поэтому каждой паре несмежных точек из Σ отвечает единственная точка из $\Gamma - u^\perp$.

Лемма 13. Пусть a, b — не смежные точки из Σ , c, d — точки из $[a]' \cap [b]' \cap \Sigma$, не смежные ни с одной точкой из $[a] \cap [b] \cap \Sigma$.

Тогда множество точек Σ' из Σ , смежных с двумя точками из $[x] \cap [y] \cap \Sigma$, не зависит от выбора точек x, y из $\{a, b, c, d\}$.

Доказательство. Рассмотрим подмножество Σ_0 , состоящее из шестерок точек $[x] \cap [y] \cap \Sigma$ по всем парам $x, y \in \{a, b, c, d\}$. Тогда указанные шестерки не пересекаются и $|\Sigma_0| = 36$. Далее, $[x] \cap \Sigma \subset \Sigma_0$ для $x \in \{a, b, c, d\}$ и любая точка из $\Sigma' = \Sigma - \Sigma_0 \cup \{a, b, c, d\}$ смежна с двумя точками в каждой из указанных шестерок. Лемма доказана.

Завершим рассмотрение $GQ(3, 5)$ -случая. Пусть в обозначениях леммы 13 парам точек $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$ отвечают точки w, y, z . Тогда $[w] \cap \Sigma$ состоит из $\{a, b, c, d\}$ и двух шестерок $[a] \cap [b] \cap \Sigma$ и $[c] \cap [d] \cap \Sigma$. То же самое верно и для точек y, z .

Ясно, что построение указанного $(4, 4)$ -подграфа $\Omega = \{a, b, c, d; u, w, y, z\}$ не зависит от выбора исходной тройки точек $\{u; a, b\}$. Но тогда Γ содержит $8 \cdot 24$ точек, смежных с единственной точкой из Ω ($|\Sigma'| = 24$), и 72 точки, смежных с парами точек в $\{a, b, c, d\}$ и $\{u, w, y, z\}$. Получили противоречие с тем, что $u = 245$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Cameron P., Hughes D. R., Pasini A. Extended generalized quadrangles. *Geom. Dedic.* (1990) **35**, 193–228.
2. Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups. *J. Algebra* (1977) **45**, 391–434.
3. Payne S. E., Thas J. A. *Finite Generalized Quadrangles*. Pitman, Boston, 1984.
4. Браувер А. Е., ван Линт Й. Х. Сильно регулярные графы и частичные геометрии. *Киберн. сб.* (1987) **24**, 186–229.
5. Goethals J. M., Seidel J. J. The regular two-graph on 276 vertices. *Discrete Math.* (1975) **12**, 143–158.
6. Blokhuis A., Brouwer A. E. Locally 4-by-4 grid graphs. *J. Graph Theory* (1989) **13**, 229–244.
7. Pasechnik D. V. The triangular extensions of a generalized quadrangle of order $(3, 3)$. *Bull. Belg. Math. Soc.* (1995) **2**, 509–518.

Статья поступила 27.10.92.

Переработанный вариант поступил 11.02.94.