Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Мирахмедов, О предельных теоремах для разделимых статистик в обобщенной схеме размещения, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 65–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:28:45

О предельных теоремах для разделимых статистик в обобщенной схеме размещения

© 1996 г. Ш. А. Мирахмедов

В работе приводятся теоремы о предельных распределениях разделимых статистик в обобщенной схеме размещения, вытекающие из доказанных автором ранее результатов. Большое внимание уделяется теоремам о больших отклонениях. Результаты иллюстрируются на примерах конкретных обобщенных схем размещения.

Настоящая работа посвящена, в основном, формулировке результатов, вытекающих из теорем, доказанных в [5] применительно к разделимым статистикам (РС) в обобщенной схеме размещения (ОСР) (определения РС и ОСР даются ниже). Большое внимание уделяется при этом менее изученным к настоящему времени вопросам больших отклонений для РС и для одного достаточно широкого класса ОСР приводится аналог теоремы Крамера–Петрова. Результаты иллюстрируются на нескольких реализациях ОСР. Отсылая читателя за более подробными сведениями о теории РС к обзорам [1, 2] и статьям [3, 4, 12, 16], мы ограничиваемся здесь только определениями ОСР и РС.

Далее, C, c , с индексом и без индекса, обозначают положительные постоянные, не всегда одни и те же; символы $\sum_m, \prod_m$ обозначают соответственно сумму и произведение от 1 до N ; все асимптотики берутся при $n \rightarrow \infty$.

1. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ — случайный вектор (с. век.) с независимыми целочисленными неотрицательными компонентами такими, что $P\{\zeta = n\} > 0$, $n = 1, 2, \dots$; $\zeta = \xi_1 + \dots + \xi_N$; $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ — с. век., распределение которого задается равенством

$$\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{L}(\xi \mid \zeta = n), \quad (1)$$

где $\mathcal{L}(X)$ — распределение с. век. X . Из (1) следует, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$ с вероятностью 1 и с. век. η задает ОСР n частиц по N ячейкам.

Отметим, что на самом деле рассматривается схема серий, когда $\xi_m = \xi_{mN}$, $m = 1, \dots, N$, а $N = N(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, соответствующие индексы опускаются с целью упрощения записей, то же самое делается и далее.

Пусть далее $f_m(y) = f_m^{(n, N)}(y)$, $m = 1, \dots, N$, — некоторые функции целочисленного неотрицательного аргумента. Функции от с. век. η вида

$$R(\eta) = \sum_m f_m(\eta_m)$$

называются РС.

Термин РС, введенный Ю. И. Медведевым [1], используется в случае, когда функции $f_m(y)$, $m = 1, \dots, N$, неслучайные, если же при каждом заданном y функция $f_m(y)$ случайная, при некотором $m = 1, \dots, N$, то $R(\eta)$ называют рандомизированными РС. Этот термин введен В. А. Ивановым [1]. Ниже с. вел. $R(\eta)$ и в том и в другом случаях будем называть РС.

При изучении рандомизированных РС предполагают обычно (и мы делаем то же самое), что последовательность $f_1(y_1), \dots, f_N(y_N)$ при любом наборе целых неотрицательных $y_1, \dots, y_N$ является последовательностью независимых с. вел., не зависящих от η и ξ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbf{E}\zeta, & B^2 &= \mathbf{D}\zeta, & \rho &= \text{corr}(R(\xi), \zeta), \\ R(\xi) &= \sum_m f_m(\xi_m), & U &= (n - \Lambda)/B, & A &= \mathbf{E}R(\xi) + U\rho\sqrt{\mathbf{D}R(\xi)}, \\ \sigma^2 &= (1 - \rho^2)\mathbf{D}R(\xi), & g_m(u) &= f_m(u) - \mathbf{E}f_m(\xi_m) - \rho B^{-1}\sqrt{\mathbf{D}R(\xi)}(u - \mathbf{E}\xi_m), \\ \bar{R}(\eta) &= \sum_m g_m(\eta_m), & \bar{R}(\xi) &= \sum_m g_m(\xi_m). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\bar{R}(\xi) = 0, \quad \text{cov}(\bar{R}(\xi), \zeta) = 0, \quad (2)$$

и в силу (1) $\bar{R}(\eta) = R(\eta) - A$ с вероятностью 1. Следовательно, без ограничения общности, вместо РС $R(\eta)$ можно рассматривать РС $\bar{R}(\eta)$, что удобно в силу наличия свойства (2).

В силу (1) очевидно, что

$$\mathcal{L}(\bar{R}(\eta)) = \mathcal{L}(\bar{R}(\xi) \mid \zeta = n). \quad (3)$$

2.. Сформулируем основные результаты. Обозначим

$$\begin{aligned} \delta' &= \min(1, \delta), & \delta &> 0, \\ \hat{\xi}_m &= (\xi_m - \mathbf{E}\xi_m)/B, & \hat{g}_m &= \hat{g}_m(\xi_m) = g_m(\xi_m)/\sigma, \\ \kappa_l &= \sum_m \mathbf{E}|\hat{\xi}_m|^l, & \hat{\beta}_l &= \sum_m \mathbf{E}|\hat{g}_m|^l, \\ L(\varepsilon) &= \sum_m [\mathbf{E}|\hat{g}_m \mathbf{I}\{|\hat{g}_m| \leq \varepsilon\}|^3 + \mathbf{E}(\hat{g}_m \mathbf{I}\{|\hat{g}_m| > \varepsilon\})^2], \\ \mathcal{L}(\varepsilon) &= \sum_m [\mathbf{E}|\hat{\xi}_m \mathbf{I}\{|\hat{\xi}_m| \leq \varepsilon\}|^3 + \mathbf{E}(\hat{\xi}_m \mathbf{I}\{|\hat{\xi}_m| > \varepsilon\})^2], \\ M(T) &= \inf_{T \leq |\tau| \leq \pi} \sum_m (1 - |E \exp\{i\tau \xi_m\}|^2), \\ K_1(\varepsilon) &= \left(6B \sum_m \mathbf{E}|\hat{\xi}_m \mathbf{I}\{|\hat{\xi}_m| \leq \varepsilon\}|^3 \right)^{-1}, \\ K_2(\delta) &= (6B \kappa_{2+\delta}^{1/\delta})^{-1}, & K_3(\delta, \varepsilon) &= C(\delta)(B^{1+\varepsilon} \kappa_{2+\delta}^{1/\delta})^{-1}, \\ \mathbf{P}_N(x) &= \mathbf{P}\{\bar{R}_N(\eta) < x\sigma\}, & \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbf{P}_N(x) - \Phi(x)| \leq C(\varepsilon) \left(\left(L(\varepsilon) + \mathcal{L}(\varepsilon) + BK_1^{-1}(\varepsilon) \exp \left\{ -\frac{1}{8} M(K_1(\varepsilon)) \right\} \right) C^{U^2/2} + \frac{1}{\sqrt{M(K_1(\varepsilon))}} \max \left(1, \frac{\min(B, \beta_1)}{\sqrt{M(K_1(\varepsilon))}} \right) \right).$$

Пусть $\gamma^2 = \min(B^2, \sigma^2) \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть при некоторых положительных c_0, c_1, δ и $0 \leq \varepsilon_0 < \delta'$, произвольно малых $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и для достаточно больших N соблюдены условия

$$\kappa_{2+\delta} \leq c_0 B^{\varepsilon_0 - \delta}, \quad \beta_{2+\delta} \leq c_0 \sigma^{-\delta}, \quad (4)$$

$$M(K_3(\delta, \varepsilon)) \geq c_1 B^{\varepsilon_1} \sqrt{N}, \quad (5)$$

$$U^2 \leq \delta_0 \ln \gamma^2, \quad 0 \leq \delta_0 < \delta' - \varepsilon_0. \quad (6)$$

Тогда равномерно по всем $x \geq 0$ таким, что $0 \leq x^2 + U^2 \leq \delta \ln \gamma^2$ имеют место соотношения

$$1 - \mathbf{P}_N(x) = (1 - \Phi(x))(1 + o(1)), \quad \mathbf{P}_N(-x) = \Phi(-x)(1 + o(1)). \quad (7)$$

Положим $\gamma^2(\varepsilon) = \min(\gamma^2, M(\varepsilon)) \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ и некотором $H > 0$

$$\overline{\lim} \frac{1}{\gamma^2(\varepsilon)} \sum_m \mathbf{E} \max(1, |\xi_m|^3) e^{H|g_m(\xi_m)|} < \infty, \quad (8)$$

и $U^2 = o(\ln \gamma^2)$. Тогда

(1) если $x \geq 0$ и $x = o(\gamma^{1/3}(\varepsilon))$, то имеют место соотношения (7),

(2) если $x \geq 0$ и $x = o(\gamma^{1/2}(\varepsilon))$, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mathbf{P}_N(x)}{1 - \Phi(x)} &= \exp \left\{ \mu_{1N} \left(\frac{x}{\sigma}, \frac{U}{B} \right) + \mu_{2N} \left(\frac{x}{\sigma}, \frac{U}{B} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{x^3 + U^3 + 1}{\gamma^2(\varepsilon)} \right) \right), \\ \frac{\mathbf{P}_N(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp \left\{ \mu_{1N} \left(-\frac{x}{\sigma}, \frac{U}{B} \right) + \mu_{2N} \left(-\frac{x}{\sigma}, \frac{U}{B} \right) \right\} \\ &\quad \times \left(1 + O \left(\frac{x^3 + U^3 + 1}{\gamma^2(\varepsilon)} \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\times \left(1 + O \left(\frac{x^3 + U^3 + 1}{\gamma^2(\varepsilon)} \right) \right), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\mu_1(v, u) &= \frac{1}{6} \sum_m (\mathbf{E}(vg_m(\xi_m) + u\tilde{\xi}_m)^3 - u^3\tilde{\xi}_m^3), \quad \tilde{\xi}_m = \xi_m - \mathbf{E}\xi_m, \\ \mu_2(v, u) &= v^4 \left\{ \frac{1}{24} \sum_m (\mathbf{E}g_m^4(\xi_m) - 3(\mathbf{E}g_m^2(\xi_m))^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2B^2} \sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\xi_m \sum_m \mathbf{E}g_m(\xi_m)\tilde{\xi}_m^2 - \frac{1}{8B^2} \left(\sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\tilde{\xi}_m \right)^2 \Big\} \\ &\quad + v^3u \left\{ -\frac{5}{2\sigma^2} \sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\xi_m \sum_m \mathbf{E}g_m^3(\xi_m) - \frac{3}{2B^2} \sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\tilde{\xi}_m \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_m (\mathbf{E}g_m^3(\xi_m)\tilde{\xi}_m - 3\mathbf{E}\tilde{\xi}_m g_m(\xi_m)\mathbf{E}g_m^2(\xi_m)) \right\} \\ &\quad + v^2u^2 \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\tilde{\xi}_m \right)^2 - \frac{3}{2B^2} \sum_m \mathbf{E}g_m^2(\xi_m)\tilde{\xi}_m \sum_m \mathbf{E}\tilde{\xi}_m^3 \right\} \\ &\quad + vu^3 \left\{ \sum_m \mathbf{E}\tilde{\xi}_m^3 g_m(\xi_m) - \frac{3}{B^3} \sum_m \mathbf{E}\tilde{\xi}_m^3 \sum_m \mathbf{E}g_m(\xi_m)\tilde{\xi}_m^2 \right\}.\end{aligned}$$

Замечание 1. Как обычно, в реализациях ОСР $\mathbf{E}\zeta = \Lambda = n$, т. е. $U = 0$, в этом случае формулы для $\mu_{1N}(v, 0)$ и $\mu_{2,N}(v, 0)$ упрощаются.

Замечание 2. Формулировки теорем 1–3 не имеют принципиальных отличий от соответствующих утверждений из [5]. Тем не менее для РС эти теоремы являются новыми и приведены здесь для полноты картины и удобства ссылок при рассмотрении примеров ОСР в пункте 4.

Как обычно, в реализациях ОСР распределения с. вел. $\xi_1, \dots, \xi_N$ зависят от некоторого непрерывного параметра v из некоторого интервала (область значений с. вел. не зависит от этого параметра), в этом случае будем писать $\xi_m(v)$, но распределение с. век. η , и, следовательно, РС $R(\eta)$, не зависит от этого параметра, т. е. схема размещения не зависит от этого параметра (см. [6], с. 18–28, и п. 4). В этом случае за счет выбора параметра v удастся получить аналог теоремы Крамера–Петрова для РС $R(\eta)$.

Итак, пусть ОСР задается последовательностью с. вел. $\xi_1(v), \dots, \xi_N(v)$, распределения которых зависят от некоторого непрерывного параметра $v \in J_\varepsilon = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, где $\alpha = n/N$, ε — произвольно малое фиксированное положительное число. Ниже будем применять введенные выше обозначения, снабдив их аргументом v , если $v \neq \alpha$, и оставив без изменений, если $v = \alpha$. Например, $\zeta(v) = \xi_1(v) + \dots + \xi_N(v)$, $B^2(v) = \mathbf{D}\zeta(v)$, $B^2 = B^2(\alpha)$,

$$M(\varepsilon, v) = \inf_{\varepsilon \leq |\tau| \leq \pi} \sum_m (1 - |\mathbf{E} \exp\{i\tau\xi_m(v)\}|^2).$$

Пусть

$$a_N = \sum_m \frac{d}{dv} \mathbf{E} \xi_m(v) |_{v=\alpha},$$

γ_{ijm} — кумулянт $(i+j)$ -го порядка с. век. $(\xi_m(v), g_m(\xi_m(v)))$.

Введем условие (A): для каждого $i \geq 0$, $j \geq 0$ и всех $m = 1, \dots, N$ функции $\gamma_{ijm}(v)$ являются аналитическими в интервале J_ε .

Теорема 4. Пусть соблюдено условие (A),

$$\alpha \asymp 1, \quad (11)$$

$$\liminf \frac{1}{N} B^2 > 0, \quad \liminf \frac{1}{N} \sigma^2 > 0, \quad (12)$$

$$\liminf \frac{1}{N} |a_N| > 0, \quad (13)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $v \in J_\varepsilon$

$$\mathbf{E} \zeta = n, \quad \liminf \frac{1}{N} M(\varepsilon, v) > 0, \quad (14)$$

существует $H > 0$ такое, что для достаточно больших N и всех $m = 1, \dots, N$, $v \in J_\varepsilon$

$$\mathbf{E} \exp\{H \xi_m(v)\} \leq C_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{E} \exp\{H |g_m(\xi_m(v))|\} \leq C_2. \quad (16)$$

Тогда, если $x \geq 0$ и $x = o(\sqrt{N})$, то

$$\frac{1 - \mathbf{P}_N(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{N}} \mathfrak{M}_N \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{x+1}{\sqrt{N}} \right) \right), \quad (17)$$

$$\frac{\mathbf{P}_N(-x)}{\Phi(-x)} = \exp \left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{N}} \mathfrak{M}_N \left(-\frac{x}{\sqrt{N}} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{x+1}{\sqrt{N}} \right) \right), \quad (18)$$

где $\mathfrak{M}_N(u) = m_{0N} + m_{1N}u + \dots$ — степенной ряд, который мажорируется степенным рядом с коэффициентами, не зависящими от N , сходящимся в некотором круге с центром в нуле, так что ряд $\mathfrak{M}_N(u)$ сходится для достаточно малых u .

В частности, положив $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2/N$, получаем, что

$$m_{0N} = \frac{1}{N} \mu_{1N}(\hat{\sigma}^{-1}, 0), \quad m_{1N} = \frac{1}{N} \mu_{2N}(\hat{\sigma}^{-1}, 0).$$

Замечание 3. В примерах ОСР, как обычно, условия (A), (12), (13), (14) легко проверяются, а условия (15) и (16) сводятся к их соблюдению при значении параметра $v = \alpha$ (см. п. 4).

3. Доказательства теорем 1–4. В силу равенства (3) теоремы 1, 2, 3 немедленно вытекают, соответственно, из теорем 1, 3, 4 работы [5], если положить в них $X_m = g_m(\xi_m)$, $Y_m = \xi_m$, $m = 1, \dots, N$.

Доказательство теоремы 4. Если $x = O(N^{1/4})$, то теорема 4 вытекает из теоремы 3. Поэтому далее будем предполагать, что $x \geq cN^{1/4}$. Положим

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_m(v) &= \xi_m(v) - \mathbf{E}\xi_m, \\ b_{ijm} &= b_{ijm}(h, v) = \mathbf{E}\tilde{\xi}_m^i(v)g_m^j(\xi_m(v)) \exp\{hg_m(\xi_m(v))\}, \\ b_m &= b_m(h, v) = b_{00m}.\end{aligned}$$

Пусть $(Z_m(h, v), Y_m(h, v))$ — преобразование Крамера с. век. $(g_m(\xi_m(v)), \tilde{\xi}_m(v))$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Z_m(h, v) < u, Y_m(h, v) < v\} \\ = b_m^{-1}(h, v) \mathbf{E}(\exp\{hg_m(\xi_m(v))\}) \mathbf{I}\{g_m(\xi_m(v)) < u, \tilde{\xi}_m(v) < v\}.\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}Z(h, v) &= \sum_m Z_m(h, v), & Y(h, v) &= \sum_m Y_m(h, v), & A(h, v) &= \mathbf{E}Z(h, v), \\ \sigma^2(h, v) &= \mathbf{D}Z(h, v), & \Lambda(h, v) &= \mathbf{E}Y(h, v), & B^2(h, v) &= \mathbf{D}Y(h, v), \\ U(h, v) &= \frac{n - \Lambda - \Lambda(h, v)}{B(h, v)}, & \rho(h, v) &= \text{corr}(Z(h, v), Y(h, v)).\end{aligned}$$

Всюду далее по мере необходимости мы рассматриваем аналитические продолжения некоторых уже введенных функций, которые будем обозначать теми же символами.

Лемма 1. *Существует единственный действительный корень $v = v(h)$ уравнения*

$$\Lambda_N(h, v) = 0; \quad (19)$$

он имеет вид

$$v(h) = \sum_{j=0}^{\infty} v_{jN} h^j, \quad (20)$$

где, в частности,

$$v_{0N} = \alpha, \quad v_{1N} = 0, \quad |v_{jN}| \leq \frac{\alpha + \varepsilon}{H_0^j} \quad (21)$$

при некотором $H_0 > 0$.

Доказательство. В силу (15), (16) и неравенства Гельдера

$$\mathbf{E} \exp\{h_1 \xi_m(v) + h_2 g_m(\xi_m(v))\} \leq c_3, \quad (22)$$

для всех $m = 1, \dots, N$, $v \in J_\varepsilon$ и $|h_1| \leq H/2$, $|h_2| \leq H/2$.

Введем функции комплексных переменных u и z

$$M_m(u, z, v) = \mathbf{E} \exp\{u \xi_m(v) + z g_m(\xi_m(v))\}, \quad L_m(u, z, v) = \ln M_m(u, z, v).$$

Обозначим $S(H) = \{(u, z): |u| \leq H, |z| \leq H\}$. В силу (21), функции $M_m(u, z, v)$, $m = 1, \dots, N$, являются аналитическими в области $S(H/2)$ и

$$|M_m(u, z, v) - 1| \leq \frac{4(|u| + |z|)}{H} \mathbf{E} \exp\{H\xi_m(v) + H|g_m(\xi_m(v))|\},$$

т.е. в $S(H/(16C_3))$

$$|M_m(u, z, v)| \geq 1/2. \quad (23)$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$\begin{aligned} |L_m(u, z, v)| &= |\ln |M_m(u, z, v)|| + i \arg M_m(u, z, v) \leq |\ln |M_m(u, z, v)|| + 2\pi \\ &\leq \max(\ln 2, \ln C_3) + 2\pi \equiv C_4. \end{aligned} \quad (24)$$

В области $S(H/8)$ для всех $m = 1, \dots, N$ и $v \in J_\varepsilon$ в силу неравенства Коши для производных от аналитических функций

$$|\gamma_{ijm}(v)| \leq C_4 i! j! (8/H)^{i+j}. \quad (25)$$

В силу условия (А), $\gamma_{ijm}(v)$ являются аналитическими функциями со степенными рядами

$$\gamma_{ijm}(v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\delta_s(i, j, m)}{s!} (v - \alpha)^s,$$

причем в силу (23) и неравенства Коши

$$|\delta_s(i, j, m)| \leq C_4 i! j! s! \varepsilon^{-s} (8/H)^{i+j}.$$

Таким образом, в области

$$S(H/8, \varepsilon) = \{(u, z, v): |u| \leq H/8, |z| \leq H/8, v \in J_\varepsilon\}$$

функции $L_m(u, z, v)$ являются аналитическими функциями от u, z и v , представляемыми в виде степенного ряда по степеням $u, z, (v - \alpha)$. Очевидно,

$$\tilde{\Lambda}(h, v) \equiv \frac{1}{N} \Lambda(h, v) = \frac{1}{N} \sum_m \frac{\partial}{\partial u} L_m(u, z, v)|_{u=0, z=h}.$$

Следовательно, в силу неравенства Коши и (24), $\tilde{\Lambda}(h, v)$ по модулю ограничена величиной $8C_4 H^{-1}$, является аналитической функцией h и v и допускает асимптотическое разложение по степеням h и $v - \alpha$, которое сходится для $|h| \leq H/8$, $v \in J_\varepsilon$, и для достаточно больших N

$$\tilde{\Lambda}(0, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \tilde{\Lambda}(h, v) \Big|_{h=0, v=\alpha} = \frac{1}{N} a_N \neq 0.$$

Поэтому из теоремы о представлении решений уравнений рядами [7, с. 499] следует, что уравнение (19) имеет единственное решение $v = v(h)$, которое является аналитической функцией h со степенным рядом (20). Ряд (20) сходится для $|h| \leq H_0 = (\varepsilon \sqrt{H}/4(\varepsilon + 2C_4))^2$, поэтому неравенства (21) следуют из неравенства Коши. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует единственный действительный корень уравнения*

$$x\sigma = A(h, v(h)); \quad (26)$$

он имеет вид

$$h = h_N(x) = \sum_{l=1}^{\infty} h_{lN}(x/\sigma)^l, \quad h_{1N} = 1. \quad (27)$$

Доказательство. Уравнение (26) перепишем в виде

$$\frac{x}{\sqrt{N}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1}{N} A(h, v(h)).$$

Очевидно,

$$A(h) \equiv \frac{1}{N} A(h, v(H)) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial z} L_m(0, z, v)|_{z=h, v=v(h)},$$

и в силу (20)

$$(v - \alpha)^k = \sum_{s=1}^{\infty} v_{sN}^{(k)} h^s.$$

Этот ряд сходится при $|h| \leq H_0$ и $|v_{sN}^{(k)}| \leq \varepsilon^k H_0^{-s}$ (так как $v \in J_\varepsilon$). Поэтому, в силу неравенства Коши и соотношения (24), получаем, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} L_m(0, z, v)|_{z=h, v=v(h)} \right| = \left| \sum_{l,k,s} \frac{a_{kl} v_{sN}^{(k)}}{l!k!} h^{l+s} \right| \leq \sum_{l,k,s} \frac{(l+1)C_4 \varepsilon^k}{H_0^s} \left(\frac{8}{H} \right)^{k+l-1} h^{l+s},$$

здесь a_{kl} — частная производная $(k+l-1)$ -го порядка от функции $L_m(0, z, v)$ (производная $(l-1)$ -го порядка по z и k -го порядка по v), подсчитанная при $z = h$ и $v = v(h)$. Последний ряд сходится при

$$|h| \leq \frac{1}{2} \min(H_0, H/8) \equiv H_1,$$

так что функция $A(h)$ разлагается в ряд по степеням h , который сходится при $|h| \leq H_1$. Таким образом, $A(z)$, как функция комплексного переменного z , является аналитической в круге $|z| \leq H_1$ и $|A(z)| \leq C_4/H_1$ (в силу неравенства Коши),

$$A(0) = 0, \quad \frac{d}{dz} A(z)|_{z=0} = N^{-1} \sigma^2 \geq \varepsilon > 0$$

для достаточно больших N . Следовательно, лемма 2 вытекает из теоремы об обращении аналитических функций [21, с. 258].

Из [21, с. 258] также следует, что для достаточно больших N существует круг с центром в нуле и радиусом $\varepsilon_2 > 0$, где ряд $h_N(x) = h$ из (27) сходится и ограничен некоторым $H_2 > 0$. Следовательно, в силу неравенства Коши

$$|h_{lN}| \leq l! \varepsilon_2 H_2^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

и $h \rightarrow 0$, если $x = o(\sqrt{N})$.

Всюду ниже h и $v = v(h)$ — корни уравнений (19) и (26) соответственно. Для упрощения записей положим

$$D_w^l L_m(s, h, v) = D_w^l L_m(u, t, z) \Big|_{u=s, t=h, z=v},$$

где w есть u или t по мере необходимости.

Для любого целого $l \geq 0$

$$\begin{aligned} D_w^l L_m(0, 0, v) &= D_w^l L_m(0, 0, \alpha) + \theta_1(v - \alpha) D_{wv}^{l+1} L_m(0, 0, v_0) \\ &= D_w^l L_m(0, 0, \alpha) + C\theta_2 C_4 \varepsilon^{-(l+1)} h^2, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь $v_0 \in J_\varepsilon$, и мы использовали соотношения (21), (22), (24) и неравенство Коши, в силу которого $|D_{wv}^{l+1} L_m(0, 0, v_0)| \leq C_6 \varepsilon^{-(l+1)}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \xi_m(v) &= D_u L_m(0, 0, v), & \mathbf{D} \xi_m(v) &= D_u^2 L_m(0, 0, v), \\ \mathbf{E} g_m(\xi_m(v)) &= D_t L_m(0, 0, v), & \mathbf{D} g_m(\xi_m(v)) &= D_t^2 L_m(0, 0, v). \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (29), (12), (15) и (16), получим, что

$$B^2(v) = B^2(1 + O(h^2)), \quad \sigma^2(v) = \sigma^2(1 + O(h^2)), \quad (30)$$

$$\Lambda(v) = \sum_m \mathbf{E} \xi_m(v) = n + C\theta N h^2. \quad (31)$$

В силу условий (14) и (15)

$$|\mathbf{E} \xi_m^i(v) g_m^j(\xi_m(v))| \leq \frac{i! j!}{H^{i+j}} C, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0. \quad (32)$$

Отсюда для достаточно больших N

$$\sum_m \mathbf{E} |\xi_m(v) - \mathbf{E} \xi_m(v)|^3 \leq CN.$$

Так что из (12) и (30) следует, что

$$\kappa_3(v) = B^{-3}(v) \sum_m \mathbf{E} |\xi_m(v) - \mathbf{E} \xi_m(v)|^3 = O(N^{-1/2}). \quad (33)$$

Аналогично,

$$\beta_3(v) = \sigma^{-3}(v) \sum_m \mathbf{E} |g_m(\xi_m(v)) - \mathbf{E} g_m(\xi_m(v))|^3 = O(N^{-1/2}). \quad (34)$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{E} \exp\{s Y_m(h, v)\} = b_m^{-1}(h, v) \mathbf{E} \exp\{(s + h) \tilde{\xi}_m(v)\}.$$

Поэтому, для достаточно малых u существует производящая функция кумулянтов с. вел. $Y_m(h, v)$ и

$$\bar{L}_m(s, h, v) \equiv \ln \mathbf{E} \exp\{s Y_m(h, v)\} = \ln \mathbf{E} \exp\{(s + h) \tilde{\xi}_m(v)\} - \ln b_m(h, v).$$

Ясно, что

$$\bar{\gamma}_{km}(h, v) \equiv \frac{d^k}{ds^k} \bar{L}_m(s, h, v) \Big|_{s=0} = \frac{d^k}{dh^k} L_m(h, 0, v). \quad (35)$$

Отсюда

$$\mathbf{D}Y_m(h, v) = \bar{\gamma}_{2m}(h, v) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{k0m}(v)}{(k-2)!} h^{k-2}. \quad (36)$$

Положив $\Gamma_k(v) = N^{-1} \sum_m \gamma_{k0m}(v)$, получаем, что

$$\frac{1}{N} B^2(h, v) = \frac{1}{N} B^2(v) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Gamma_k(v)}{(k-2)!} h^{k-2},$$

и учитывая (25), видим, что существует $\delta > 0$ такое, что для достаточно больших N

$$\frac{1}{N} B^2(h, v) \geq \delta > 0. \quad (37)$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{E} \exp\{sZ_m(h, v)\} = b_m(s + h, v)/b_m(h, v),$$

поэтому, для всех $m = 1, \dots, N$ и достаточно малых s существует производящая функция кумулянтов с. вел. $Z_m(h, v)$ и

$$\ln \mathbf{E} \exp\{sZ_m(h, v)\} = \ln b_m(s + h, v) - \ln b_m(h, v).$$

Поэтому, по аналогии с приведенным выше рассуждением с учетом соотношений (12), (30) получаем, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{N} \sigma^2(h, v) \geq \delta > 0. \quad (38)$$

В силу (36) и неравенства (23)

$$\bar{\gamma}_{2m}(h, v) = \mathbf{D}Y_m(h, v) = \frac{C_4}{\varepsilon^2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |h/\varepsilon|^k \leq C_1(\varepsilon) C_4.$$

Аналогично,

$$\bar{\gamma}_{4m}(h, v) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{|\gamma_{k0m}(v)|}{(k-4)!} h^{k-4} \leq C_2(\varepsilon) C_4.$$

Следовательно, используя хорошо известное равенство $\alpha_4 = \gamma_4 + 3\alpha_2^2$, где α_i и γ_i — соответственно момент и кумулянт i -го порядка с. вел., получаем, что $\mathbf{E}|Y_m(h, v) - \mathbf{E}Y_m(h, v)|^3 \leq C$. Поэтому, используя (37), (14) и неравенство Гельдера, находим, что

$$\kappa_3(h, v) = B^{-3}(h, v) \sum_m \mathbf{E}|Y_m(h, v) - \mathbf{E}Y_m(h, v)|^3 = O(1/\sqrt{N}). \quad (39)$$

Аналогично,

$$\beta_3(h, v) = \sigma^{-3}(h, v) \sum_m \mathbf{E} |Z_m(h, v) - \mathbf{E} Z_m(h, v)|^3 = O(1/\sqrt{N}). \quad (40)$$

Из (37) и (39) следует, что существует такое ε_0 , что

$$K(h, v) \equiv \left(\frac{1}{6} B(h, v) \kappa_3(h, v) \right)^{-1} \geq \varepsilon_0 > 0. \quad (41)$$

Используя (15) и (32), находим, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} e^{i\tau Y_m(h, v)}| &= \frac{|\mathbf{E} \exp\{i\tau \xi_m(v) + h g_m(\xi_m(v))\}|}{b_m(h, v)} \\ &\leq |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m(v)}| + \frac{|\mathbf{E} \exp\{i\tau \xi_m(v)\} (\exp\{h g_m(\xi_m(v))\} - 1)|}{b_m(h, v)} \\ &\quad + \frac{|b_m(h, v) - 1| |\mathbf{E} \exp\{i\tau \xi_m(v)\}|}{b_m(h, v)} \\ &\leq |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m(v)}| + 4h \mathbf{E} |g_m(\xi_m(v))| e^{h g_m(\xi_m(v))} \leq |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m(v)}| + Ch. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\mathbf{E} e^{i\tau Y_m(h, v)}|^2 \leq |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m(v)}|^2 + Ch. \quad (42)$$

Поэтому, используя (41), (13), (15) и соотношение

$$h = \frac{x}{\sigma} (1 + O(x/\sigma)) \rightarrow 0, \quad (43)$$

получаем, что

$$\inf_{K(h, v) \leq |\tau| \leq \pi} \sum_m (1 - |\mathbf{E} e^{i\tau Y_m(h, v)}|^2) \geq M(\varepsilon_0, v) (1 + CNh/M(\varepsilon_0, v)) \geq CN. \quad (44)$$

Применяя леммы 1 и 2, выкладками аналогичными проведенным при получении соотношения (3.54) из [5], в нашем случае получаем, что

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}_N(x) &= \exp \left\{ \sum_m \ln b_m(h, v) + \ln \mathbf{P}\{\zeta(h, v) = 0\} - \ln \mathbf{P}\{\zeta(v) = n\} - hA(h, v) \right\} \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-u h \sigma^2(h, v)} d\mathbf{P}\{Z(h, v) - A(h, v) < u\sigma(h, v) \mid Y(h, v) = 0\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Применяя в теореме 2 из [5] соотношения (12), (39), (40), (44), видим, что

$$\sup_u |\mathbf{P}\{Z(h, v) - A(h, v) < u\sigma(h, v) \mid Y(h, v) = 0\} - \Phi(u)| = O(1/\sqrt{N}).$$

Подставляя это в (45), стандартными выкладками (см., например, [5] соотношение (3.78)) получаем, что

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}_N(x) &= (1 - \Phi(x)) \exp \left\{ \sum_m \ln b_m(h, v) + \ln \mathbf{P}\{Y(h, v) = 0\} \right. \\ &\quad \left. - \ln \mathbf{P}\{\zeta(v) = n\} - hA(h, v) + \frac{x^2}{2} \right\} (1 + O(x/\sqrt{N})). \end{aligned} \quad (46)$$

В силу (21), (22), (23) и условия (A) имеем

$$\sigma^{-2} \sum_m \ln b_m(h, v) = \sum_{l=2}^{\infty} b_{lN} h^l,$$

причем $b_{2N} = 1/2$ и для $j \geq 2$ и достаточно больших N

$$|b_{jN}| \leq C H_2^{-j}. \quad (47)$$

Функция $A(h) = \sigma^{-2} A(h, v)$ является аналитической со степенным рядом (см. доказательство леммы 2)

$$\sigma^{-2} A(h, v) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{lN} h^l,$$

где для достаточно больших N

$$|a_{lN}| \leq C H_2^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (48)$$

так что

$$\sum_m \ln b_m(h, v) - h A(h, v) = \sigma^{-2} \left(-\frac{h^2}{2} + \sum_{l=3}^{\infty} (b_{lN} - a_{l-1,N}) h^l \right). \quad (49)$$

В силу теоремы 3.2 из [3] и соотношений (37), (39), (44)

$$\ln \mathbf{P}\{Y(h, v) = 0\} = -\ln \sqrt{2\pi} - \ln B + O(1/\sqrt{N}). \quad (50)$$

Из (30), (31) и (12) следует, что

$$U(v) = (n - \lambda(v))/B(v) = \theta c \sqrt{N} h^2 = o(\sqrt{N}),$$

(т.е. возможно, что $U(v) \rightarrow \infty$).

Используем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть соблюдены условия (13), (14) и первое соотношение из (12). Тогда, если $U(v) = o(\sqrt{N})$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} B(v) \mathbf{P}\{\zeta(v) = n\} &= \exp\{-U^2(v)/2 + U^3(v) \lambda(U(v)/B(v))/B(v)\} \\ &\quad \times (1 + O((U(v) + 1)/\sqrt{N})); \end{aligned}$$

здесь для каждого N функция $\lambda(u) = \lambda_N(u)$ есть специальный степенной ряд, сходящийся равномерно относительно N для достаточно малых u .

Лемма 3 вытекает из теоремы, приведенной в приложении. Ряд $\lambda(u)$ полностью определяется последовательностью моментов с. вел. $\xi_m(v)$, $m = 1, \dots, N$, и коэффициент при u^k является целой функцией от

$$\Gamma_l(v) = \sigma^{-2}(v) \sum_m \chi_{l0m}(v), \quad l = 3, \dots, k.$$

В условиях теоремы 4 $\chi_l(v), U(v), B(v)$ ($v = v(h)$ из (20)) являются аналитическими функциями, разлагающимися в ряды по степеням h . Так что $\lambda(U(v)/B(v))$ после группировки может быть представлена в виде степенного ряда по h в окрестности нуля. Заметим, что все эти ряды для достаточно больших N мажорируются некоторыми степенными рядами с коэффициентами, не зависящими от N , и сходящимися при $|h| \leq H$.

Обозначим через $\mathcal{E}(h)$ выражение, стоящее под знаком экспоненты в соотношении (46). Тогда, используя (49), (50) и лемму 3, получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h) = & \frac{x^2}{2} - \frac{\sigma^2 h^2}{2} + \sigma^2 \sum_{l=3}^{\infty} (b_{lN} - a_{l-1,N}) h^l + \frac{U^2(v)}{2} \\ & - \frac{U^3(v)}{B(v)} \lambda(U(v)/B(v)) + O((1 + U(v))/\sqrt{N}). \end{aligned}$$

В этом выражении заменим функции $U(v), B(v)$ и $\lambda(U(v)/B(v))$ на их представления в виде ряда по степеням h , затем вместо h подставим его выражение из (27). После соответствующего группирования получаем, что

$$\mathcal{E}(h) = \frac{x^3}{\sqrt{N}} \mathfrak{M}_N(x/\sqrt{N}) + O(x/\sqrt{N}).$$

Из (21), (28), (47), (48) и свойств ряда $\lambda(u)$ следует, что ряд $\mathfrak{M}_N(u)$ для достаточно больших N мажорируется сходящимся в некотором интервале степенным рядом с коэффициентами, не зависящими от N .

Теорема доказана.

4. Рассмотрим три примера ОСР, в которых для РС применим теоремы 1–4. Ряд применений этих моделей можно найти в книгах [9, 20, 26]. Будем использовать обозначения, введенные в п. 2, полагая в них, что с. вел. $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют заданное распределение, соответствующее рассматриваемой реализации ОСР.

Обратим внимание на то, что во всех примерах распределения с. вел. зависят от некоторого достаточно произвольного параметра (что подтверждает сказанное перед формулировкой теоремы 4), который выбирается так, чтобы $E(\xi_1 + \dots + \xi_N) = n$ и, следовательно, $U = 0$.

Пример 1. Пусть

$$\mathcal{L}(\xi_m) = \Pi(zp_m), \quad m = 1, \dots, N,$$

где $\Pi(\lambda)$ — распределение Пуассона с параметром λ ; $p_m > 0$, $m = 1, \dots, N$, $p_1 + \dots + p_N = 1$, z — произвольное положительное число. В этом случае, с. век. η имеет полиномиальное распределение

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! \dots k_N!} p_1^{k_1} \dots p_N^{k_N}.$$

Здесь и далее $k_1, \dots, k_N$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел таких, что $k_1 + \dots + k_N = n$.

Приведенная ОСР называется полиномиальной схемой размещения частиц по ячейкам, изучению которой посвящена обширная литература, в частности, главы I–III книги [9], о более поздних работах см. [1, 10, 11, 16].

Для применения теорем 1, 2 и 3 удобно положить $z = n$. Тогда $B^2 = n$ и $U = 0$,

$$|\mathbf{E} \exp\{i\tau\xi\}|^2 = \exp\left\{-4\lambda \sin^2 \frac{\tau}{2}\right\}, \quad (51)$$

где $\mathcal{L}(\xi) = \Pi(\lambda)$, и

$$\sin^2 \frac{\tau}{2} \geq \frac{\tau^2}{\pi^2}, \quad |\tau| \leq \pi, \quad 1 - e^{-u} \geq \frac{1 - e^{-c}}{c} u, \quad 0 \leq u \leq c. \quad (52)$$

Для любого T такого, что $0 < T \leq \pi$,

$$\begin{aligned} M(T) &= \inf_{T \leq |\tau| \leq \pi} \sum_m (1 - |\mathbf{E} \exp\{i\tau\xi_m\}|^2) \geq \sum_m (1 - \exp\{-4T^2 np_m/\pi^2\}) \\ &\geq \frac{nT^2}{c} (1 - e^{-4c/\pi^2}) \sum_{m: np_m \leq cT^{-2}} p_m \\ &\geq \frac{nT^2}{c} (1 - e^{-4c/\pi^2}) \left(1 - \frac{nT^2}{c} \mathbf{P}_N\right); \end{aligned} \quad (53)$$

здесь

$$\mathbf{P}_N = \sum_m p_m^2.$$

Будем рассматривать регулярные полиномиальные схемы, когда существует $C_0 > 0$ такое, что

$$N\bar{p} \leq C_0, \quad \bar{p} = \max_{1 \leq m \leq N} p_m. \quad (54)$$

Теорема 5. Если соблюдено условие (54), то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\Delta = \sup_x |\mathbf{P}_N(x) - \Phi(x)| \leq C_1(\varepsilon) \left(L(\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq C_2 \left(\beta_3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В классе регулярных схем эта оценка является неулучшаемой с точностью до постоянных $C_1(\varepsilon)$, C_2 .

Из теоремы 1 следует асимптотическая нормальность РС и в случае, когда нарушается условие регулярности (54). А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Если $\sqrt{N}\bar{p} \rightarrow 0$ или $n\bar{p}^2 \rightarrow 0$ и соблюдено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\sigma^2} \frac{1}{\sigma^2} \sum_m \mathbf{E}[g_m(\xi_m) \mathbf{I}\{|g_m(\xi_m)| > \varepsilon\sigma\}]^2 \rightarrow 0, \quad (55)$$

то $\Delta \rightarrow 0$.

По поводу нерегулярных схем см. [14, 15].

Доказательства теорем 5 и 6 следуют из теоремы 1 и соотношения

$$M(K_2(1)) \geq \frac{2(1 - e^{-1/(9\pi^2)})}{3(1 + 3n\mathbf{P}_N)} n,$$

которое вытекает из неравенства (53), если положить $T = K_2(1)$, $c = 1/36$, и того, что

$$K_2(1) \geq \frac{1}{6}(1 + 3n\mathbf{P}_N)^{-1/2}.$$

Теорема 7. Пусть для произвольно малых $\varepsilon_1 > 0$, $2\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ и некоторых положительных c_i , δ

$$\alpha = \frac{n}{N} \geq \frac{c_1}{n^{1-\varepsilon}}, \quad (56)$$

$$\mathbf{P}_N \leq \frac{c_2}{\sqrt{N}n^{\varepsilon_2}}, \quad (57)$$

$$\beta_{2+\delta} \leq c_3\sigma^{-\delta}. \quad (58)$$

Тогда равномерно по всем $x \geq 0$ таким, что $x^2 \leq \delta \ln \min(n, \sigma^2)$ имеют место соотношения (7).

Доказательство. Рассмотрим величину $K_3(1, \varepsilon)$ из теоремы 2. Поскольку $B^2 = n$ и $\kappa_3 \leq \sqrt{1/n + 3\mathbf{P}_N}$,

$$K_3(1, \varepsilon) \geq c_4 n^{-\varepsilon/2} (1 + 3n\mathbf{P}_N)^{-1/2}.$$

Положив в (53) $c = c_4^2$, $T = K_3(1, \varepsilon)$, получим, что

$$M(K_3(1, \varepsilon)) \geq c_5 n^{1-\varepsilon} / (1 + 3n\mathbf{P}_N). \quad (59)$$

В силу (56) $\sqrt{N} \leq c_1^{-1/2} n^{1-\varepsilon_1/2}$, поэтому с учетом условия (57) получаем оценки

$$\frac{n^{1-\varepsilon}}{1 + 3n\mathbf{P}_N} \geq \frac{\sqrt{N}n^{\varepsilon_3}}{(\sqrt{N} + 3c_2 n^{1-\varepsilon_2})} \geq cB^{\varepsilon_3/2} \sqrt{N},$$

здесь ε и ε_3 такие, что $\varepsilon + \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, т. е. соблюдено условие (5). Далее, из условия (57) следует, что

$$\kappa_3 \leq \sqrt{1/n + 3\mathbf{P}_N} \leq n^{-\varepsilon_2/2} \sqrt{n^{-1+\varepsilon_2} + 3n^{\varepsilon_2}\mathbf{P}_N} \leq Cn^{-\varepsilon_2/2}. \quad (60)$$

Следовательно, соблюдается второе условие из (4) с $\delta = 1$ и $\varepsilon_0 = 1 - \varepsilon_2$. Теперь теорема 7 вытекает из теоремы 2 и замечания 4 к теореме 3 из [5].

Теорема 7 имеет достаточно общий характер и может быть применена и для некоторого класса нерегулярных схем. Она обобщает теорему 1 из [11].

Теорема 8. Пусть выполнены условия (11), (54),

$$\liminf \frac{1}{N} \sigma^2 > 0, \quad (61)$$

и существуют такие положительные константы H и C , что

$$\mathbf{E} \exp\{H|g_m(\xi_m)|\} \leq C. \quad (62)$$

Тогда, если $x \geq 0$ и $x = o(\sqrt{N})$, то имеют место соотношения (17) и (18).

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(\xi_m(v)) = \Pi(vNp_m)$. Покажем, что условия теоремы 4 выполнены. Очевидно, что в условиях теоремы 8 условия (11), (12), (13) (в силу (51) и (14)) соблюдены. Непосредственными вычислениями находим, что $a_N = N$, т.е. и условие (16) выполнено. Положим $\pi_k(\lambda) = \lambda^k e^{-\lambda/k!}$. Для всех $v \in J_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{H\xi_m(v)\} &\leq \exp\{C(e^H - 1)\}, \\ \mathbf{E} \exp\{h|g_m(\xi_m(v))|\} &\leq e^{C_0\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(np_m)(1 + \varepsilon/\alpha)^k \mathbf{E} e^{hg_m(k)} \\ &\leq e^{C_0\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(np_m) e^{Ck/\alpha} \mathbf{E} \exp\{hg_m(k)\} \\ &\quad \times (\mathbf{I}\{g_m(k) < k\} + \mathbf{I}\{g_m(k) \geq k\}) \\ &\leq e^{C_0\varepsilon} (\mathbf{E} \exp\{(h + \varepsilon/\alpha)\xi_m\} + \mathbf{E} \exp\{(h + \varepsilon/\alpha)g_m(\xi_m)\}). \end{aligned}$$

Таким образом, условие (15) также соблюдено. Наконец, ряд

$$e^{Nvp_m} \mathbf{E} \xi_m^i(v) g_m^j(\xi_m(v)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Np_mv)^k}{k!} k^i \mathbf{E} g_m^j(k)$$

равномерно сходится для всех $v \in J_\varepsilon$. Следовательно, в силу известного соотношения между моментами и кумулянтами с. век. условие (A) выполнено. Таким образом, все условия теоремы 4 выполнены, откуда и следует теорема 8.

Пример 2. Пусть $\mathcal{L}(\xi_m) = \text{Bi}(\omega_m, p)$ — биномиальное распределение с параметрами ω_m и p , где ω_m — целое положительное число, $p \in (0, 1)$, $m = 1, \dots, N$. Положим $\Omega_N = \omega_1 + \dots + \omega_N$. В данном случае с. век. η имеет многомерное гипергеометрическое распределение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \binom{\omega_1}{k_1} \dots \binom{\omega_N}{k_N} / \binom{\Omega_N}{n}, \quad k_i \leq \omega_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Такая ОСР соответствует схеме выбора без возвращения объема n из расслоенной совокупности объема Ω_N , ω_m является объемом m -го слоя, η_m интерпретируется как число элементов m -го слоя, попавших в выборку.

Ниже удобно положить $p = n/\Omega_N$. Пусть

$$\omega = \max_{1 \leq m \leq N} \omega_m.$$

Теорема 9. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\Delta = \sup_x |\mathbf{P}_N(x) - \Phi(x)| \leq C(\varepsilon)(L(\varepsilon) + \omega/\sqrt{\Omega_N p(1-p)}).$$

Доказательство. В данном случае $B^2 = \Omega_N p(1-p)$,

$$B\chi_3 = \left\{ (\Omega_N p(1-p))^{-1} \left(\Omega_N p(1-p)(1-3p(1-p)) + 3p^2(1-p^2) \left(\sum_m \omega_m^2 - \Omega_N \right) \right) \right\}^{1/2} \leq \sqrt{\omega}. \quad (63)$$

С помощью равенства $|1 + p(e^{iu} - 1)|^2 = 1 - 4p(1-p) \sin^2(u/2)$, $0 < p < 1$, находим, что

$$|E e^{i\tau\xi}|^2 \leq \exp \left\{ -4dp(1-p) \sin^2 \frac{\tau}{2} \right\}, \quad (64)$$

здесь $\mathcal{L}(\xi) = \text{Bi}(d, p)$. Отсюда и из неравенства (56) следует, что

$$M(K_2(1)) \geq 4(1 - e^{-1/\pi^2}) \Omega_N p(1-p) \omega^{-1}. \quad (65)$$

Применяя оценки (63)–(65) в теореме 1, получаем теорему 9.

Из теоремы 4 немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть $\Omega_N p(1-p) \omega^{-2} \rightarrow 0$. Если соблюдено условие Линдеберга (55), то $\Delta \rightarrow 0$.

Положим $\gamma^2 = \min(\sigma^2, \Omega_N p(1-p))$.

Теорема 11. Пусть существуют положительные постоянные $\varepsilon, C_1, C_2, \delta$ такие, что для достаточно больших N

$$\Omega_N p(1-p) \geq C_1 (\sqrt{N} \omega)^{1+\varepsilon}, \quad (66)$$

$$\beta_{2+\delta} \leq C_2 \sigma^{-\delta}. \quad (67)$$

Тогда равномерно по всем $x \geq 0$ таким, что $x^2 \leq \delta \ln \gamma^2$, имеют место соотношения (7).

Доказательство. В данном случае $K_3(1, \varepsilon) \geq (\omega(\Omega_N p(1-p))^\varepsilon)^{-1}$, поэтому

$$M(K_3(1, \varepsilon)) \geq 4(1 - e^{-1/\pi^2}) \omega^{-1} (\Omega_N p(1-p))^{1-\varepsilon}.$$

Применяя эти оценки, видим, что из (66) следует (5) и второе условие из (4). Таким образом, теорема 11 следует из теоремы 2.

Теорема 12. Пусть $\omega \leq C_0$, и выполнены условия (11), (61), (62) и

$$\varliminf \frac{1}{N} \Omega_N p(1-p) = \lim \alpha(1-p) > 0, \quad (68)$$

здесь $\alpha = n/N$. Если $x \geq 0$ и $x = o(\sqrt{N})$, то справедливы соотношения (17), (18).

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(\xi_m(v)) = \text{Bi}(\omega_m, p(v))$, где $p(v) = vN/\Omega_N$, $v \in J_\varepsilon$. Как и раньше, $\xi_m = \xi_m(\alpha)$. Так как $\mathbf{E}\xi_m^i(v)g_m^i(\xi_m(v))$ является полиномом степени ω_m относительно v , в силу равенства между моментами и кумулянтами условие (А) выполнено. Из неравенств (52), (64) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}M(\varepsilon, v) &\geq \frac{4\varepsilon^2(1 - e^{-\omega})}{\pi^2\omega} \Omega_N p(v)(1 - p(v)) \\ &\geq \frac{4\varepsilon^2(1 - \varepsilon/\alpha)(1 - p(1 + \varepsilon/\alpha)(1 - \varepsilon^{-\omega}))}{\pi^2(1 - p)\alpha\omega} \Omega_N p(1 - p). \end{aligned}$$

Таким образом, условие (13) следует из (68). Для любого $v \in J_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{hg_m(\xi_m(v))} &= \sum_{l=0}^{\omega_m} \binom{\omega_m}{l} \left(\frac{vN}{\Omega_N}\right)^l \left(1 - \frac{vN}{\Omega_N}\right)^{\omega_m-l} \mathbf{E}e^{hg_m(l)} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\omega_m} \binom{\omega_m}{l} p^l (1-p)^{\omega_m-l} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^l \left(1 + \frac{p}{1-p} \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\omega_m-l} \mathbf{E}e^{hg_m(l)} \\ &\leq \exp\{\omega_m \varepsilon / \alpha(1-p)\} \mathbf{E}e^{hg_m(\xi_m)}. \end{aligned}$$

Следовательно, выполнены условия (14), (15). Простые вычисления показывают, что $a_N = N$. Таким образом, из условий теоремы 12 вытекают условия теоремы 4. Теорема 12 доказана.

Асимптотическая нормальность РС в схеме выбора без возвращения установлена в [16] в случае, когда $\omega_1 = \dots = \omega_N = 1$, и в [22] в случае, когда фиксированы $\omega_m \geq 1$, $m = 1, \dots, N$. Оценки скорости сходимости в нормальных предельных теоремах получены в [17] в случае, когда $\omega_1 = \dots = \omega_N = 1$. Вероятности больших отклонений рассмотрены только в частном случае РС для выборочной суммы из конечной совокупности [18]. Отметим, что в теоремах 9–11 допускается случай, когда $\omega_m = \omega_m(N)$ и может стремиться к бесконечности. Такой случай, насколько известно автору, ранее не рассматривался.

Пример 3. Пусть $\mathcal{L}(\xi_m) = N \text{Bi}(d_m, p)$ — отрицательно-биномиальное распределение с параметрами d_m и p , где $d_m > 0$ и $p \in (0, 1)$, $m = 1, \dots, N$. Тогда для любого $p \in (0, 1)$ с. век. η имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \binom{D_{1N} + n - 1}{n} \prod_m \binom{d_m + k_m - 1}{k_m}, \quad (69)$$

где $D_{iN} = d_1^i + \dots + d_N^i$. Это распределение можно назвать многомерным распределением Пойа (см., например, [20, с. 148]). ОСР, задаваемая отрицательно-биномиальным распределением, возникает, например, в задачах, связанных с урновой схемой Пойа [20, с. 12], когда из совокупности, состоящей из N типов элементов (m -й тип состоит из ω_m элементов) случайно выбирается один элемент, который затем возвращается с l элементами того же типа, и далее процесс продолжается. Если с. вел. η_m — число элементов m -го типа в выборке объема n , то с. век. η имеет распределение (69) с $d_m = \omega_m/l$. Обозначим $\rho = p/(1-p)$.

Тогда

$$B^2 = D_{1N}\rho(1-\rho), \quad B^4\kappa_4 = D_{1N}\rho(1+\rho)(1+3\rho(1+\rho)(2+D_{2N}/D_{1N})), \quad (70)$$

$$|Ee^{i\tau\xi_m}| = |(1-p)/(1-pe^{i\tau})|^{d_m} = \left(1 + 4\rho(1+\rho)\sin^2\frac{\tau}{2}\right)^{-d_m} \quad (71)$$

Далее будем полагать $p = n/(n + D_{1N})$, тогда $\rho = n/D_{1N}$.

Теорема 13. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\Delta = \sup_x |\mathbf{P}_N(x) - \Phi(x)| \leq C(\varepsilon) \left(L(\varepsilon) + \frac{(1 + 3(D_{2N}D_{1N}^{-1} + 2)\rho(1+\rho)) \min(\sqrt{N}, \sqrt{D_{1N}\rho(1+\rho)})}{D_{1N}\rho(1+\rho)} \right).$$

Доказательство. Из (70) и неравенства $\kappa_3 \leq \sqrt{\kappa_4}$ следует, что

$$K_2(1) \geq (6B\kappa_3)^{-1} \geq \frac{1}{6} \left(1 + 3\rho(1+\rho) \left(\frac{D_{2N}}{D_{1N}} + 2 \right) \right)^{-1/2}. \quad (72)$$

Используя (71), (72), (52) и оценку

$$(1+u)^{-d} \leq 1 - du + \frac{d(d+1)}{2}u^2, \quad u > 0, \quad d > 0, \quad (73)$$

после несложных вычислений получаем, что

$$M(K_2(1)) \geq \frac{1}{18\pi^2} D_{1N}\rho(1+\rho)/(1+3\rho(1+\rho)(2+D_{2N}/D_{1N})). \quad (74)$$

Теорема 13 следует из теоремы 1 и соотношений (70), (72), (74).

Теорема 14. Пусть

$$0 < \varliminf \frac{1}{N} D_{1N} \leq \varlimsup \frac{1}{N} D_{2N} < \infty. \quad (75)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\Delta \leq C(\varepsilon) \left(L(\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{D_{1N}\rho(1+\rho)}} \right),$$

если $D_{1N}\rho(1+\rho) \rightarrow \infty$ и выполнено условие Линдберга (55), то $\Delta \rightarrow 0$.

В данном примере $\gamma^2 = \min(\sigma^2, D_{1N}\rho(1+\rho))$.

Теорема 15. Пусть существуют положительные C_1, C_2, δ и произвольно малое ε_2 такие, что

$$C_1 \left(\frac{N^{1/2-\varepsilon_2}}{D_{1N}} \right)^{1/2} \leq \rho \leq C_2 \left(\frac{D_{1N}^{1-\varepsilon_3}}{\sqrt{N}(2+D_{2N}D_{1N}^{-1})} \right)^{1/\varepsilon_3}, \quad (76)$$

здесь $\varepsilon_3 = 4\varepsilon_2/(1+4\varepsilon_2)$. Тогда равномерно по всем x таким, что $0 \leq x \leq \sqrt{\delta \ln \gamma^2}$ имеют место соотношения (7).

Доказательство. Из (70), (72) следует, что

$$K_3(1, \varepsilon) \leq C((D_{1N}\rho(1+\rho))^\varepsilon(1+3\rho(1+\rho)(2+D_{2N}D_{1N}^{-1})))^{-1/2}.$$

Следовательно, используя неравенство (73), получаем, что

$$M(K_3(1, \varepsilon)) \geq C \frac{(D_{1N}\rho(1+\rho))^{1-\varepsilon}}{1+3\rho(1+\rho)(2+D_{2N}D_{1N}^{-1})}.$$

Теперь несложно убедиться в том, что при соблюдении условия (76) выполнено условие (5) теоремы 2 (при этом ε и ε_1 в условии (5) должны быть такими, что $\varepsilon + \varepsilon_1 = \varepsilon_3$). Также с помощью соотношения (70) убеждаемся, что при условии (76) соблюдено второе условие из (4) с $\varepsilon_0 = 1 - \varepsilon_3$. Поскольку $\mathbf{E}\xi_m = d_m\rho$, то $U = 0$. Таким образом, теорема 15 следует из теоремы 2.

Замечание 4. Если соблюдено условие (75), то условие (76) имеет более простой вид: для любого $l \geq 0$ и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$C_1 N^{-1/4-\varepsilon} \leq \rho \leq C_2 N^l.$$

Теорема 16. Пусть выполнены условия (11), (61), (62) и

$$\max_{1 \leq m \leq N} d_m \leq C.$$

Тогда, если $x \geq 0$ и $x = o(\sqrt{N})$, то имеют место соотношения (17), (18).

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{L}(\xi_m(v)) = N \text{Bi}(d_m, p(v)), \quad p(v) = v/(\alpha + D), \quad v \in J_\varepsilon, \quad D = N^{-1}D_{1N}.$$

Из условий (11) и $d_m \leq C$ следует, что $0 < C_3 \leq p(v) \leq C_4 < 1$ и $0 < C_5 \leq \rho \leq C_6$. Отсюда и из (70), (71) вытекают (9) и (12). Для всех $v \in J_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{hg_m(\xi_m(v))\} &\leq \left(\frac{1-p(v)}{1-p}\right)^{d_m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d_m+k-1}{k} (1-p)^{d_m} p_k(v/\alpha)^k \mathbf{E} e^{hg_m(k)} \\ &\leq (1+\varepsilon/D)^{d_m} (\mathbf{E} \exp\{(h+\varepsilon/\alpha)\xi_m\} + \mathbf{E} \exp\{(h+\varepsilon/\alpha)g_m(\xi_m)\}), \\ \mathbf{E} \exp\{h\xi_m(v)\} &\leq (1+\varepsilon/D)^{d_m} \mathbf{E} \exp\{(h+\varepsilon/\alpha)\xi_m\}. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (13), (14) также выполнены. Такие же доводы, как в примере 1, убеждают в справедливости условия (А). Прямые вычисления показывают, что $a_N = N(1-\rho)$. Таким образом, теорема 16 вытекает из теоремы 4.

В [19] описан класс предельных распределений в терминах условных характеристических функций для симметрических РС (т.е. когда $f_1(x) = \dots = f_N(x) = f(x)$ и $f(x)$ неслучайна) в схеме Пойа, когда $M \leq N$. В [27] получены оценки остаточного члена в центральной предельной теореме для многомерных РС. Условия теорем 13 и 14 более слабые по сравнению с условиями из [27] для

одномерного случая. Вероятности больших уклонений в этой схеме рассматриваются здесь впервые.

К ОСР из примера 3 сводится и следующая комбинаторная задача, описанная в книге [6].

Пусть с. век. η является случайным решением уравнения $u_1 + \dots + u_N = n$ на множестве целых $u_i \geq r, i = 1, \dots, N$. На множестве этих решений зададим равномерное распределение, т. е. положим

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \binom{n - (r-1)N - 1}{N-1}^{-1}.$$

Тогда с. век. η определяет ОСР, заданную последовательностью независимых с. вел. $\xi_1, \dots, \xi_N$, имеющих одинаковое геометрическое распределение

$$P\{\xi_m = l\} = p^{l-r}(1-p),$$

где произвольное $p \in (0, 1)$, $l = r, r+1, \dots$. Рассмотрением с. вел. $\xi_m - r$ вместо ξ_m $m = 1, \dots, N$, изучение РС в этой задаче сводится к изучению РС из примера 3 с $d_m = 1, m = 1, \dots, N$.

Случай, когда $r = 0$, называется в литературе размещением неразличимых частиц по различным ячейкам, а в статистической литературе статистикой Бозе–Эйнштейна [20, с. 52]. Изучению некоторых специальных случаев РС в этой схеме посвящена, например, работа [22].

5. Приложение. Пусть, теперь, $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nN}$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность серий независимых целочисленных с. вел. таких, что $\zeta = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nN}$ имеет решетчатое распределение с максимальным шагом, равным единице. Как и раньше, на зависимость от n и N в обозначениях указывать не будем, при этом $B^2, \Lambda, M(T)$ обозначают те же величины, что и в п. 1, $U_k = (k - \Lambda)/B$.

Теорема 17. Пусть существуют $H > 0, C_2 > 0$ такие, что для достаточно больших N

$$E \exp\{H|\xi_{nm}|\} \leq C_1, \quad (77)$$

$$\frac{1}{N}B^2 \geq C_2, \quad (78)$$

$$\frac{1}{N}M(\varepsilon) \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (79)$$

и пусть $\omega(n)$ — последовательность такая, что $\lim \omega(n) = \infty$. Тогда равномерно по всем целым k таким, что $1 \leq |k - \Lambda| \leq N/\omega(n)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{2\pi}BP\{\zeta = k\} = \exp\left\{-\frac{U_k^2}{2} + \frac{U_k^3}{B}\lambda\left(\frac{U_k}{B}\right)\right\}\left(1 + O\left(\frac{1+U_k}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad (80)$$

где для каждого n функция $\lambda(u) = \lambda_{n,N}(u)$ представима специальным степенным рядом, сходящимся равномерно относительно N, n для достаточно малых u .

Доказательство. Доказательство проводится по стандартной схеме, использованной, например, в [24, 25]. Основное отличие состоит в оценке интеграла J (см. ниже), в остальном рассуждения такие же, как в [24, 25], и мы приводим их кратко.

Положим $\tilde{\xi}_m = \xi_{nm} - \mathbf{E}\xi_{nm}$ и введем функции комплексного переменного z

$$S_m(z) = \mathbf{E}e^{z\tilde{\xi}_m}, \quad S(z) = \prod_m S_m(z),$$

$$L(z) = \frac{1}{N} \ln S(z), \quad L(0) = 0.$$

В силу (77), если $|z| \leq H_1 = H/2$, то

$$|S_m(z) - 1| \leq 2|z|^2 \mathbf{E}\xi_{nm}^2 \exp\{H|\tilde{\xi}_m|\} \leq \frac{4|z|^2}{H_1^2} \mathbf{E} \exp\{2H_1|\xi_{nm}|\}$$

$$\leq 4|z|^2 C_0 H_1^{-1}. \quad (81)$$

Из условия (77), соотношения, связывающего кумулянты с моментами с. вел. [8], и неравенства

$$\mathbf{E}|\xi_{nm}|^l \leq l! H_1^{-l} \mathbf{E} \exp\{H_1|\xi_{nm}|\}$$

вытекает, что

$$|\chi_{km}| \leq C_0^k k!, \quad (82)$$

где χ_{km} — кумулянт k -го порядка с. вел. ξ_m . Отсюда следует, что ряд

$$K(z) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_m \chi_{\nu m} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

сходится равномерно относительно N в круге $|z| \leq (HC_0)^{-1}$. Уравнение

$$K'(z) - B^{-1}U_k = 0$$

имеет единственное решение z_0 :

$$z_0 = z_0(U_k) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l (U_k/B)^l,$$

где ряд сходится равномерно относительно N . Ряд $\lambda(u)$ определяется соотношением

$$K(z_0) - U_k z_0 \frac{B}{\sqrt{N}} = \frac{U_k^2}{2N} + \frac{U_k^3}{N^{3/2}} \lambda(U_k/\sqrt{N}).$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\varepsilon \leq |\tau| \leq \pi} \left| \frac{S(i\tau + z_0)}{S(z_0)} \right| d\tau.$$

Ясно, что

$$|S_m(i\tau + z_0)| \leq |\mathbf{E}e^{i\tau\xi_m}| + z_0 \mathbf{E}|\tilde{\xi}_m| e^{z_0|\tilde{\xi}_m|} \leq |\mathbf{E}e^{i\tau\xi_m}| + \frac{2}{H} z_0 \mathbf{E}e^{H|\tilde{\xi}_m|}.$$

Отсюда и из (81) получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_m(i\tau + z_0)}{S_m(z_0)} \right| &\leq |S_m(i\tau + z_0)| + \frac{|S_m(z_0) - 1|}{S_m(z_0)} |S_m(i\tau + z_0)| \\ &\leq |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m}| + \frac{2}{H} z_0 \mathbf{E} e^{H|\tilde{\xi}_m|} + \frac{4}{H^2} z_0^2 \mathbf{E} e^{H|\tilde{\xi}_m|} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 - |\mathbf{E} e^{i\tau \xi_m}|^2) \right\} + \frac{5}{H} \mathbf{E} e^{H|\tilde{\xi}_m|}. \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь использованы неравенства $|S_m(i\tau + z_0)| \leq S_m(z_0)$, $x \leq \exp\{-1/2(1 - x^2)\}$, и условие (77). Из (77), (83) для достаточно больших N получаем, что

$$J \leq (\pi - \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{1}{2} M(\varepsilon) \frac{10}{H} z_0 \sum_m \mathbf{E} e^{H|\tilde{\xi}_m|} \right\} \leq \pi \exp \left\{ -\frac{1}{4} M(\varepsilon) \right\}.$$

Утверждение теоремы получается использованием этого неравенства в соотношении (8) из [24] и повтором рассуждений из [24, с. 722].

Замечание 5. В [24] утверждение (80) доказано при условии, что выполняется (11), существует такое $H > 0$, что

$$\overline{\lim}_m \frac{1}{N} \sum \mathbf{E} \exp\{H|\tilde{\xi}_m|\} < \infty, \quad (84)$$

и для всех $h = 2, 3, \dots$

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \sum_m \max_{1 \leq r \leq h} \mathbf{P}\{\xi_m \equiv r \pmod{h}\} < 1. \quad (85)$$

В [25] условие (85) заменено на условие

$$\underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_m \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \min(\mathbf{P}\{\xi_m = l\}, \mathbf{P}\{\xi_m = l + 1\}) \right) > 0. \quad (86)$$

В силу лемм 2 и 4 и неравенств (2), (5) из [23] из обоих условий (85) и (86) следует условие (78).

В [24, 25] использовано неравенство

$$\left| \frac{1}{N} \sum_m \chi_{km} \right| \leq c^k k!, \quad (87)$$

которое обеспечивает аналитичность производящей функции кумулянтов с вел. ζ в некотором круге с центром в нуле и положительным радиусом, не зависящим от N . В [24] говорится, что (87) вытекает из (84). Однако автору не удалось восстановить доказательство этого утверждения (я думаю, что (87) не следует из (84)). Если можно доказать, что из (84) следует (87), то и условие (77) может быть заменено на более слабое условие (85).

Наконец, отметим, что доказательство оценки интеграла J , приведенное здесь, существенно проще по сравнению с доказательствами из [24] и [25].

Список литературы

1. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Дискретные задачи в теории вероятностей. *Итоги науки и техники. Серия теор. вероятн., матем. стат., теор. киберн. ВИНТИ АН СССР* (1984) **22**, 3–60.
2. Кудлаев Э. М. Разделимые статистики. *Итоги науки и техники. Серия теор. вероятн., матем. стат., теор. киберн. ВИНТИ АН СССР* (1988) **26**, 97–150.
3. Мирахмедов Ш. А. Рандомизированные разделимые статистики в обобщенной схеме размещения по счетному числу ячеек. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 46–62.
4. Ивченко Г. И., Мирахмедов Ш. А. О предельных теоремах для разделимых статистик и эффективности соответствующих статистических критериев. *Дискретная математика* (1991) **73**, №3, 73–88.
5. Мирахмедов Ш. А. Предельные теоремы для условных распределений. *Дискретная математика* (1994) **6**, №4, 107–132.
6. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
7. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциальных и интегральных исчислений*, т. 2. Наука, Москва, 1969.
8. Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1971.
9. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
10. Мирахмедов Ш. А. Аппроксимация распределения многомерных рандомизированных статистик нормальным распределением. Полиномиальная схема. *Теория вероятностей и ее применения* (1987) **32**, №4, 762–772.
11. Сираждинов С. Х., Мирахмедов Ш. А., Исмагуллаев Ш. А. Вероятности больших отклонений рандомизированных разделимых статистик в полиномиальной схеме. *Теория вероятностей и ее применения* (1989) **34**, №4, 706–719.
12. Мирахмедов Ш. А. Рандомизированные разделимые статистики в схеме независимого размещения частиц по ячейкам. *Дискретная математика* (1990) **2**, №2, 97–111.
13. Мирахмедов Ш. А. Вероятности больших отклонений для рандомизированных разделимых статистик в обобщенной схеме размещения. *Докл. АН УзССР* (1989) №7, 8–11.
14. Быков С. А. Об асимптотической нормальности рандомизированных разделимых статистик в нерегулярной полиномиальной схеме. В сб.: *Вероятностные процессы и их приложения*, МИЭМ, Москва, 1987, 76–81.
15. Быков С. А., Иванов В. А. Об условиях асимптотической нормальности многомерных рандомизированных разделимых статистик. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 57–64.
16. Ивченко Г. И., Левин В. В. Асимптотическая нормальность в схеме выбора без возвращения. *Теория вероятностей и ее применения* (1978) **28**, №1, 99–108.
17. Мирахмедов Ш. А. Оценки близости к нормальному закону в схеме выбора без возвращения. *Теория вероятностей и ее применения* (1985) **30**, №4, 427–439.
18. Robinson J. Large deviation probabilities for samples from a finite population. *Ann. Probab.* (1977) **5**, №6, 913–925.
19. Holst L. A unified approach to limit theorems for urn models. *J. Appl. Probab.* (1979) **16**, №1, 154–169.

20. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1967.
21. Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. Физматгиз, Москва, 1960.
22. Трунов А. Н. Предельные теоремы в задаче о размещении одинаковых частиц по различным ячейкам. *Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова* (1986) **177**, 147–164.
23. Мухин А. Б. Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 664–674.
24. Москвин Д. А. Локальная предельная теорема для больших уклонений в случае разнораспределенных решетчатых слагаемых. *Теория вероятностей и ее применения* (1972) **27**, №4, 716–722.
25. McDonald D. A local limit theorem for large deviations of sums of independent nonidentically distributed random variables. *Ann. Probab.* (1979) **7**, №3, 526–531.
26. Jonson N. L., Kotz S. *Urn Models and Their Applications. An Approach to Modern Discrete Probability Theory*. Wiley, New York, 1977.
27. Исматуллаев Ш. А. Асимптотики второго порядка для разделимых статистик в схеме Пойа. *Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук* (1987) **5**, 13–20.

Статья поступила 28.10.91.

Переработанный вариант поступил 03.04.95.