Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Мошков, Нижние оценки временной сложности
детерминированных условных тестов, *Дискрет. матем.*,
1996, том 8, выпуск 3, 98–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:06:01

Нижние оценки временной сложности детерминированных условных тестов

© 1996 г. М. Ю. Мошков

Деревья решений используются в различных приложениях как алгоритмы решения задач и как способ представления информации. Один из основных подходов к исследованию деревьев решений состоит в применении методов математической теории тестов. При этом моделью задачи служит тестовая таблица, а моделью дерева решений — условный тест. В работе понятие тестовой таблицы обобщается с целью моделирования задач, у которых имеется несколько решений и требуется найти хотя бы одно из них. К числу таких задач относятся, например, многие задачи дискретной оптимизации. Для обобщенных тестовых таблиц получены нижние оценки временной сложности детерминированных условных тестов и рассмотрен подход к доказательству нижних оценок сложности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-012-488.

1. Введение

Тестовая таблица — это заполненная числами из $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ прямоугольная таблица, в которой строки попарно различны и каждой строке приписано непустое конечное подмножество множества ω . Тестовой таблице сопоставляется своеобразная игра двух игроков: первый игрок загадывает строку таблицы, а второй игрок должен найти некоторое число из множества, приписанного строке. Для этого он задает вопросы: выбрав столбец таблицы, спрашивает, какое число содержит выбранный столбец на пересечении с загаданной строкой. Детерминированные стратегии второго игрока, представленные в виде конечных ориентированных деревьев с корнем, называются детерминированными условными тестами таблицы.

В настоящей работе изучаются меры сложности условных тестов, характеризующие время работы в худшем случае. Получены нижние оценки сложности детерминированных условных тестов. Рассмотрен подход к доказательству нижних оценок, основанный на использовании так называемых деревьев доказательства оценок. Эти деревья можно интерпретировать как начальные фрагменты стратегий первого игрока в игре, модифицированной следующим образом: первый игрок не загадывает строку заранее, но хотя бы одна строка таблицы должна удовлетворять его ответам.

Математическая теория тестов берет свое начало с работ С. В. Яблонского и И. А. Чегис [1, 2]. Одна из приведенных далее в теореме 1 оценок доказана

в [3] для более узких классов тестовых таблиц и мер сложности. Подход к доказательству нижних оценок, рассматриваемый в настоящей работе, сходен с методами анализа задач поиска, развитыми В. П. Тарасовой в [4].

2. Основные понятия

В этом параграфе понятия тестовой таблицы, детерминированного условного теста и меры сложности определяются так, чтобы их было удобно использовать при исследовании деревьев решений.

Пусть $\mathcal{P}(\omega)$ — множество всевозможных непустых конечных подмножеств ω и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$. Для произвольного непустого множества A обозначим через A^* множество всевозможных конечных слов в алфавите A , содержащее пустое слово λ . Упорядоченную пару $\rho = \langle F, k \rangle$ будем называть тестовой сигнатурой или t -сигнатурой, если F — непустое множество и $k \in \omega \setminus \{0, 1\}$.

Упорядоченную тройку $T = \langle \Delta, \nu, \mu \rangle$ будем называть тестовой таблицей t -сигнатуры $\rho = \langle F, k \rangle$, если существует число $n \in \omega \setminus \{0\}$ такое, что $\Delta \subseteq E_k^n$, $\nu: \Delta \rightarrow \mathcal{P}(\omega)$ и $\mu: \{1, \dots, n\} \rightarrow F$, причем для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, если $i \neq j$, то $\mu(i) \neq \mu(j)$. В дальнейшем множество Δ и функции ν, μ , определяющие таблицу T , будем обозначать $\Delta(T), \nu_T$ и μ_T соответственно. Число n будем называть размерностью таблицы T и обозначать $\dim T$. Пусть

$$P(T) = \{\mu_T(i): 1 \leq i \leq n\}, \quad \Pi(T) = \bigcap_{\delta \in \Delta(T)} \nu_T(\delta),$$

$$\Omega_\rho(T) = \{\langle f, \delta \rangle: f \in P(T), \delta \in E_k\}^*.$$

Таблице T и слову $\alpha \in \Omega_\rho(T)$ сопоставим тестовую таблицу $T\alpha$ t -сигнатуры ρ . Если $\alpha = \lambda$, то $T\alpha = T$. Пусть $\alpha \neq \lambda$, $\alpha = \langle f_1, \delta_1 \rangle \dots \langle f_m, \delta_m \rangle$ и $i_1, \dots, i_m$ — числа из $\{1, \dots, n\}$ такие, что $\mu_T(i_1) = f_1, \dots, \mu_T(i_m) = f_m$. Тогда

$$\Delta(T\alpha) = \{\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle: \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \in \Delta(T), \delta_{i_1} = \sigma_1, \dots, \delta_{i_m} = \sigma_m\},$$

$\mu_{T\alpha}$ — ограничение отображения ν_T на множество $\Delta(T\alpha)$ и $\mu_{T\alpha}$ — отображение, совпадающее с отображением μ_T .

Обозначим через $\mathcal{T}_\rho$ множество всевозможных тестовых таблиц t -сигнатуры ρ и пусть

$$\mathcal{T}_\rho C = \{T: T \in \mathcal{T}_\rho, \Pi(T) \neq \emptyset\} \cup \{T: T \in \mathcal{T}_\rho, \Delta(T) = \emptyset\}.$$

Конечным ориентированным деревом с корнем будем называть конечное ориентированное дерево, в котором ровно в одну вершину не входят дуги. Эту вершину будем называть корнем. Вершину дерева, из которой не выходят дуги, будем называть концевой вершиной. Вершину дерева, не являющуюся ни корнем, ни концевой вершиной, будем называть рабочей вершиной. Полным путем конечного ориентированного дерева с корнем будем называть последовательность

$$\xi = w_0, d_0, \dots, w_m, d_m, w_{m+1}$$

его вершин и дуг, в которой w_0 — корень дерева, w_{m+1} — концевая вершина и для $i = 0, \dots, m$ дуга d_i выходит из вершины w_i и входит в вершину w_{i+1} .

Схемой дерева решений t -сигнатуры ρ (схемой t -сигнатуры ρ) будем называть содержащее не менее двух вершин помеченное конечное ориентированное

дерево с корнем, в котором корню и выходящим из него дугам ничего не приписано, каждой рабочей вершине приписан элемент множества F , каждой дуге, выходящей из рабочей вершины, приписано число из E_k , каждой концевой вершине приписано число из ω .

Обозначим через C_ρ множество всевозможных схем деревьев решений t -сигнатуры ρ . Схему из C_ρ будем называть детерминированной, если из корня схемы выходит ровно одна дуга, для любой рабочей вершины схемы дугам, выходящим из этой вершины, приписаны попарно различные числа.

Пусть $P(\Gamma)$ — множество элементов из F , приписанных рабочим вершинам схемы $\Gamma \in C_\rho$, $\Omega_\rho(\Gamma) = \{\langle f, \delta \rangle : f \in P(\Gamma), \delta \in E_k\}^*$ и $\Xi(\Gamma)$ — множество полных путей схемы Γ . Произвольному полному пути $\xi \in \Xi(\Gamma)$ сопоставим слово $\pi(\xi) \in \Omega_\rho(\Gamma)$. Если в полном пути ξ нет рабочих вершин, то $\pi(\xi) = \lambda$. Если в пути ξ имеется $m > 0$ рабочих вершин, $\xi = w_0, d_0, \dots, w_m, d_m, w_{m+1}$ и для $i = 1, \dots, m$ вершине w_i приписан элемент f_i , а дуге d_i приписано число δ_i , то

$$\pi(\xi) = \langle f_1, \delta_1 \rangle \dots \langle f_m, \delta_m \rangle.$$

Будем называть ρ -детерминированным условным тестом таблицы $T \in \mathcal{T}_\rho$ детерминированную схему $\Gamma \in C_\rho$, обладающую следующими свойствами:

$$P(\Gamma) \subseteq P(T), \quad \bigcup_{\xi \in \Xi(\Gamma)} \Delta(T\pi(\xi)) = \Delta(T),$$

для любого $\xi \in \Xi(\Gamma)$ выполняется включение $T\pi(\xi) \in \mathcal{T}_\rho C$ и, если $\Delta(T\pi(\xi))$ непусто, то число, приписанное концевой вершине пути ξ , принадлежит множеству $\Pi(T\pi(\xi))$.

Мерой сложности t -сигнатуры ρ будем называть произвольную функцию $\psi: F^* \rightarrow \omega$. Продолжим меру сложности ψ на множества $\Omega_\rho = \{\langle f, \delta \rangle : f \in F, \delta \in E_k\}^*$ и C_ρ . Значения ψ на пустых словах из Ω_ρ и F^* совпадают. Если $\alpha \in \Omega_\rho$, $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = \langle f_1, \delta_1 \rangle \dots \langle f_m, \delta_m \rangle$, то $\psi(\alpha) = \psi(f_1 \dots f_m)$. Если $\Gamma \in C_\rho$, то

$$\psi(\Gamma) = \max\{\psi(\pi(\xi)) : \xi \in \Xi(\Gamma)\}.$$

Для таблицы T из $\mathcal{T}_\rho$ пусть $\psi_\rho^d(T) = \min \psi(\Gamma)$, где минимум берется по всевозможным ρ -детерминированным условным тестам Γ таблицы T .

В ряде случаев будем требовать, чтобы мера сложности ψ обладала одним из перечисленных ниже свойств.

A1. Для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^*$

$$\psi(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \geq \psi(\alpha_1 \alpha_3).$$

A2. Для любого $\alpha \in F^*$ справедливо неравенство $\psi(\alpha) \geq |\alpha|$, где $|\alpha|$ — длина слова α .

Приведем примеры мер сложности.

Взвешенной глубиной будем называть произвольную функцию $\psi: F^* \rightarrow \omega$ такую, что $\psi(\lambda) = 0$, $\psi(f) > 0$ для любого элемента $f \in F$ и

$$\psi(f_1 \dots f_m) = \sum_{i=1}^m \psi(f_i)$$

для любого непустого слова $f_1 \dots f_m \in F^*$. Взвешенную глубину ψ такую, что $\psi(f) = 1$ для любого $f \in F$, будем называть глубиной и обозначать h . Нетрудно заметить, что взвешенная глубина обладает свойствами $\Lambda 1$ и $\Lambda 2$.

Экстремальной мерой сложности будем называть произвольную функцию $\psi: F^* \rightarrow \omega$ такую, что $\psi(\lambda) = 0$ и

$$\psi(f_1 \dots f_m) = \max\{\psi(f_1), \dots, \psi(f_m)\}$$

для любого непустого слова $f_1 \dots f_m \in F^*$. Нетрудно заметить, что экстремальная мера сложности обладает свойством $\Lambda 1$.

Пусть ψ_1, ψ_2 — меры сложности t -сигнатуры ρ . Непосредственно проверяется, что если ψ_1 и ψ_2 обладают свойством $\Lambda 1$, то свойством $\Lambda 1$ обладают также меры сложности ψ_3 и ψ_4 , определенные следующим образом:

$$\psi_3(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha), \quad \psi_4(\alpha) = \max\{\psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha)\}$$

для любого $\alpha \in F^*$. Если ψ_1 обладает свойством $\Lambda 2$, то ψ_3 и ψ_4 обладают свойством $\Lambda 2$.

3. Нижние оценки сложности

Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура. Обозначим через $\chi(\alpha)$ множество букв алфавита $\{\langle f, \delta \rangle: f \in F, \delta \in E_k\}$, входящих в слово $\alpha \in \Omega_\rho$. Будем говорить, что слово α противоречиво, если существуют $f \in F$ и $\sigma, \delta \in E_k$ такие, что $\langle f, \sigma \rangle \in \chi(\alpha)$, $\langle f, \delta \rangle \in \chi(\alpha)$ и $\sigma \neq \delta$. Если слово α не является противоречивым, то будем говорить, что оно непротиворечиво. Пусть $\alpha, \beta \in \Omega_\rho$. Если слово $\alpha\beta$ противоречиво, то будем говорить, что слова α и β несовместимы.

Пусть ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , B — непустое конечное подмножество множества Ω_ρ , T — таблица размерности n из $\mathcal{T}_\rho$ и $\mu_T(1) = f_1, \dots, \mu_T(n) = f_n$. Положим

$$\psi(B) = \max\{\psi(\alpha): \alpha \in B\}$$

и обозначим через $\hat{\Omega}_\rho(T)$ множество всевозможных непротиворечивых слов из $\Omega_\rho(T)$.

Конечное множество $B \subseteq \hat{\Omega}_\rho(T)$ будем называть ρ -надпокрытием таблицы T , если для любого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \in E_k^n$ существует слово $\alpha \in B$ такое, что

$$\chi(\alpha) \subseteq \{\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle\},$$

$T\alpha \in \mathcal{T}_\rho C$ для любого $\alpha \in B$.

Пусть $OC_\rho(T)$ — множество всевозможных ρ -надпокрытий таблицы T .

Конечное множество $B \subseteq \hat{\Omega}_\rho(T)$ будем называть ρ -надразбиением таблицы T , если множество B является ρ -надпокрытием таблицы T , для любых $\alpha, \beta \in B$, если $\alpha \neq \beta$, то слова α и β несовместимы.

Пусть $OP_\rho(T)$ — множество всевозможных ρ -надразбиений таблицы T .

Для любой таблицы $T \in \mathcal{T}_\rho$ пусть

$$M_{\rho, \psi}(T) = \min\{\psi(B): B \in OC_\rho(T)\},$$

$$\hat{M}_{\rho, \psi}(T) = \min\{\psi(B): B \in OP_\rho(T)\}.$$

Приведем еще одно определение величины $M_{\rho, \psi}(T)$. Для $\bar{\delta} = \langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \in E_k^n$ пусть

$$M_{\rho, \psi}(T, \bar{\delta}) = \min\{\psi(\alpha) : \alpha \in \Omega_{\rho}(T)\}, \quad \chi(\alpha) \subseteq \{\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle\}, \quad T\alpha \in \mathcal{T}_{\rho}C.$$

Можно показать, что

$$M_{\rho, \psi}(T) = \max\{M_{\rho, \psi}(T, \bar{\delta}) : \bar{\delta} \in E_k^n\}.$$

Теорема 1. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ и T — таблица из $\mathcal{T}_{\rho}$. Тогда

$$\psi_{\rho}^d \geq \hat{M}_{\rho, \psi}(T) \geq M_{\rho, \psi}(T).$$

Для таблицы $T \in \mathcal{T}_{\rho}$ обозначим

$$\nu_T(T) = \bigcup_{\bar{\delta} \in \Delta(T)} \nu_T(\bar{\delta}).$$

Для произвольного $m \in \nu_T(T)$ пусть

$$\Delta(T, m) = \{\bar{\delta} : \bar{\delta} \in \Delta(T), m \in \nu_T(\bar{\delta})\}$$

и $d_{\rho}(T, m)$ — максимальное $r \in \omega$ такое, что число $|\Delta(T, m)|$ делится на k^r без остатка. Положим

$$d_{\rho}(T) = \min\{d_{\rho}(T, m) : m \in \nu_T(T)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{\rho}\mathcal{F}$ множество всевозможных таблиц T из $\mathcal{T}_{\rho}$ таких, что $\Delta(T) = E_k^{\dim T}$ и $|\nu_T(\bar{\delta})| = 1$ для любого $\bar{\delta} \in \Delta(T)$.

Приведем утверждение, являющееся следствием теоремы 1.

Предложение 1. Пусть ψ — мера сложности t -сигнатуры $\rho = \langle F, k \rangle$, обладающая свойством $\Lambda 2$, и $T \in \mathcal{T}_{\rho}\mathcal{F}$. Тогда

$$\psi_{\rho}^d(T) \geq \dim T - d_{\rho}(T).$$

Для любой таблицы $T \in \mathcal{T}_{\rho}$ положим

$$l_{\rho}(T) = \min\{|B| : B \in OC_{\rho}(T)\},$$

$$\hat{l}_{\rho}(T) = \min\{|B| : B \in OP_{\rho}(T)\}.$$

Пусть $\Delta(T) \neq \emptyset$. Конечное непустое множество $D \subset \omega$ будем называть системой представителей для таблицы T , если $D \cap \nu_T(\bar{\delta}) \neq \emptyset$ для любого $\bar{\delta} \in \Delta(T)$. Обозначим $l^r(T)$ минимальную мощность системы представителей для таблицы T .

Теорема 2. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , обладающая свойством $\Lambda 2$, и T — таблица из $\mathcal{T}_{\rho}$ такая, что $\Delta(T) \neq \emptyset$. Тогда

$$\psi_{\rho}^d(T) \geq \log_k \hat{l}_{\rho}(T) \geq \log_k l_{\rho}(T) \geq \log_k l^r(T).$$

Для таблицы $T \in \mathcal{T}_\rho$ положим $N_\rho(T) = |\Delta(T)|$. Таблицу $T \in \mathcal{T}_\rho$ будем называть диагностической, если

$$\Delta(T) \neq \emptyset,$$

для любых $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2 \in \Delta(T)$, если $\bar{\delta}_1 \neq \bar{\delta}_2$, то $\nu_T(\bar{\delta}_1) \cap \nu_T(\bar{\delta}_2) = \emptyset$.

Приведем утверждение, являющееся простым следствием теоремы 2.

Предложение 2. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , обладающая свойством $\Lambda 2$, и T — диагностическая таблица из $\mathcal{T}_\rho$. Тогда

$$\psi_\rho^d(T) \geq \log_k N_\rho(T).$$

Будем называть ρ -тестом таблицы $T \in \mathcal{T}_\rho$ произвольное подмножество B множества $P(T)$, удовлетворяющее следующим условиям: если $B = \emptyset$, то $T \in \mathcal{T}_\rho C$, если $B \neq \emptyset$ и $B = \{f_{i_1}, \dots, f_{i_m}\}$, то

$$T\langle f_{i_1}, \delta_1 \rangle \dots \langle f_{i_m}, \delta_m \rangle \in \mathcal{T}_\rho C$$

для любых $\delta_1, \dots, \delta_m \in E_k$.

Обозначим через $\Theta_\rho(T)$ минимальную мощность ρ -теста таблицы T .

Теорема 3. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , обладающая свойством $\Lambda 2$, и T — таблица из $\mathcal{T}_\rho$. Тогда

$$\psi_\rho^d(T) \geq \log_k ((k-1)\Theta_\rho(T) + 1).$$

Для произвольного слова $\alpha \in F^*$ определим детерминированную схему $G_\rho(\alpha)$ из C_ρ . Если $\alpha = \lambda$, то $G_\rho(\alpha)$ состоит из корня, концевой вершины, которой приписано число 0, и соединяющей эти вершины дуги. Пусть $\alpha \neq \lambda$ и $\alpha = f_{i_1} \dots f_{i_m}$. Тогда $G_\rho(\alpha)$ — схема, множество вершин которой разбито на $m+2$ яруса. Нулевой ярус содержит корень схемы. Выходящая из корня дуга входит в вершину первого яруса. Для $j \in \{1, \dots, m+1\}$ ярус с номером j содержит k^{j-1} вершин. Для $j \in \{1, \dots, m\}$ каждой вершине j -го яруса приписан элемент f_{i_j} и из каждой вершины j -го яруса выходит k дуг, входящих в вершины $(j+1)$ -го яруса. Этим дугам приписаны числа $0, 1, \dots, k-1$ соответственно. Каждой вершине $(m+1)$ -го яруса приписано число 0.

Доказательство теоремы 1. Пусть T — таблица размерности n , $\mu_T(1) = f_1, \dots, \mu_T(n) = f_n$ и Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T такой, что $\psi(\Gamma) = \psi_\rho^d(T)$. Обозначим через $Q(\Gamma)$ множество рабочих вершин схемы Γ , из которых выходит строго меньше k дуг. Пусть $w \in Q(\Gamma)$. Обозначим через $E(w)$ множество чисел, приписанных дугам, выходящим из вершины w . Выберем некоторый ориентированный путь τ , начинающийся в вершине w и заканчивающийся в концевой вершине схемы Γ . Определим слово $\alpha \in F^*$. Если путь τ содержит ровно две вершины, то $\alpha = \lambda$. Пусть $\tau = w_0, d_0, w_1, d_1, \dots, w_m, d_m, w_{m+1}$, где $m \geq 1$, $w_0 = w$, для каждого $j \in \{0, \dots, m\}$ дуга d_j выходит из вершины w_j и входит в вершину w_{j+1} , и для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$ вершине w_j приписан элемент $f_{i_j} \in F$. Тогда $\alpha = f_{i_1} \dots f_{i_m}$. Обозначим G конечное ориентированное дерево с корнем, которое получается из схемы $G_\rho(\alpha)$ удалением корня схемы $G_\rho(\alpha)$ и выходящей из корня дуги. Для каждого $\delta \in E_k \setminus E(w)$ добавим к схеме

Γ дерево G и дугу, выходящую из вершины w и входящую в вершину, являющуюся корнем дерева G . Этой дуге припишем число δ . Просмотрим таким образом все вершины из множества $Q(\Gamma)$. В результате получим некоторую детерминированную схему из C_ρ . Обозначим ее Γ' .

Пусть $B = \{\pi(\xi) : \xi \in \Xi(\Gamma')\} \cap \hat{\Omega}_\rho(T)$. Ясно, что $\psi(\Gamma') = \psi(\Gamma)$ и $\psi(B) \leq \psi(\Gamma')$. Поскольку $\psi(\Gamma) = \psi_\rho^d(T)$, справедлива оценка

$$\psi(B) \leq \psi_\rho^d(T). \quad (1)$$

Покажем, что множество B является ρ -надразбиением таблицы T . Из каждой рабочей вершины схемы Γ' для каждого $\delta \in E_k$ выходит дуга, которой приписано число δ . Кроме того, $P(\Gamma') = P(\Gamma)$ и $P(\Gamma) \subseteq P(T)$. Используя эти факты, нетрудно показать, что для любого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \in E_k^n$ существует путь $\xi \in \Xi(\Gamma')$ такой, что

$$\chi(\pi(\xi)) \subseteq \{\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle\}.$$

Из последнего включения следует, что $\pi(\xi) \in \hat{\Omega}_\rho(T)$. Таким образом, для любого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \in E_k^n$ существует слово $\alpha \in B$ такое, что $\chi(\alpha) \subseteq \{\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle\}$.

Поскольку схема Γ' является детерминированной схемой, то для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Xi(\Gamma')$ таких, что $\xi_1 \neq \xi_2$, слова $\pi(\xi_1)$ и $\pi(\xi_2)$ несовместимы и, следовательно,

$$\Delta(T\pi(\xi_1)) \cap \Delta(T\pi(\xi_2)) = \emptyset. \quad (2)$$

Таким образом, любые два различные слова из множества B несовместимы.

Ясно, что $\Xi(\Gamma) \subseteq \Xi(\Gamma')$. Пусть $\xi \in \Xi(\Gamma)$. Так как схема Γ является ρ -детерминированным условным тестом таблицы T , то $T\pi(\xi) \in \mathcal{T}_\rho C$. Пусть $\xi \in \Xi(\Gamma') \setminus \Xi(\Gamma)$. Покажем, что $\Delta(T\pi(\xi)) = \emptyset$. Предположим, что это не так. Тогда используя (2), получаем, что

$$\bigcup_{\xi \in \Xi(\Gamma)} \Delta(T\pi(\xi)) \neq \Delta(T).$$

Этого не может быть, так как Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T . Следовательно, $T\alpha \in \mathcal{T}_\rho C$ для любого слова $\alpha \in B$. Тем самым доказано, что множество B является ρ -надразбиением таблицы T . Очевидно, $\hat{M}_{\rho, \psi}(T) \leq \psi(B)$. Используя (1), получаем, что $\hat{M}_{\rho, \psi}(T) \leq \psi_\rho^d(B)$. Так как любое ρ -надразбиение таблицы T является ρ -надпокрытием таблицы T , то $M_{\rho, \psi}(T) \leq \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$. Теорема доказана.

Доказательство предложения 1. Пусть B — ρ -надразбиение таблицы T и m — число из $\nu_T(T)$ такие, что $\psi(B) = \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$ и $d_\rho(T, m) = d_\rho(T)$. Так как $T \in \mathcal{T}_\rho \mathcal{F}$, существует подмножество B' множества B , удовлетворяющее равенству

$$\bigcup_{\alpha \in B'} \Delta(T\alpha) = \Delta(T, m).$$

Поскольку любые два различные слова из B несовместимы,

$$\sum_{\alpha \in B'} |\Delta(T\alpha)| = |\Delta(T, m)|.$$

Так как $\Delta(T) = E_k^{\dim T}$ и все слова из B непротиворечивы, для любого $\alpha \in B$ выполняется равенство $|\Delta(T\alpha)| = k^{\dim T - s(\alpha)}$, где $s(\alpha) \in \omega$ и $s(\alpha) \leq |\alpha|$. Поэтому число $|\Delta(T, m)|$ делится без остатка на $k^{\dim T - p}$, где $p = \max\{|\alpha| : \alpha \in B'\}$. Следовательно, $\dim T - p \leq d_\rho(T, m)$. Поскольку $d_\rho(T, m) = d_\rho(T)$, справедливо неравенство $p \geq \dim T - d_\rho(T)$. Так как мера сложности ψ обладает свойством Λ_2 , то $\psi(B) \geq p$. Учитывая, что $\psi(B) = \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$, получаем неравенство $\hat{M}_{\rho, \psi}(T) \geq \dim T - d_\rho(T)$. Из теоремы 1 следует, что $\psi_\rho^d(T) \geq \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$. Поэтому $\psi_\rho^d(T) \geq \dim T - d_\rho(T)$. Предложение доказано.

Лемма 1. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , обладающая свойством Λ_2 , $T \in \mathcal{T}_\rho$ и B — ρ -надразбиение таблицы T . Тогда $|B| \leq k^{\psi(B)}$.

Доказательство. Пусть $n = \dim T$ и $m = \psi(B)$. Поскольку мера сложности ψ обладает свойством Λ_2 ,

$$|\alpha| \leq m \quad (3)$$

для любого $\alpha \in B$. Определим таблицу T' размерности n из $\mathcal{T}_\rho$, полагая $\Delta(T') = E_k^n$, $\nu_{T'} \equiv \{0\}$ и $\mu_{T'} \equiv \mu_T$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in B$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Так как слова α_1 и α_2 несовместимы,

$$\Delta(T'\alpha_1) \cap \Delta(T'\alpha_2) = \emptyset. \quad (4)$$

Поскольку B — ρ -надразбиение таблицы T ,

$$\bigcup_{\alpha \in B} \Delta(T'\alpha) = E_k^n.$$

Отсюда и из (4) следует, что

$$\sum_{\alpha \in B} |\Delta(T'\alpha)| = k^n. \quad (5)$$

Из неравенства (3), равенства $\Delta(T') = E_k^n$ и включения $B \subseteq \hat{\Omega}_\rho(T)$ следует, что $|\Delta(T'\alpha)| \geq k^{n-m}$ для любого $\alpha \in B$. Используя это неравенство и равенство (5), получаем, что $|B|k^{n-m} \leq k^n$. Следовательно, $|B| \leq k^m$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\dim T = n$, $\mu_T(1) = f_1, \dots, \mu_T(n) = f_n$ и B — ρ -надразбиение таблицы T такое, что $\psi(B) = \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$. Из леммы 1 следует неравенство $|B| \leq k^{\hat{M}_{\rho, \psi}(T)}$. Ясно, что $\hat{l}_\rho(T) \leq |B|$. Поэтому

$$k^{\hat{M}_{\rho, \psi}(T)} \geq \hat{l}_\rho(T). \quad (6)$$

Так как любое ρ -надразбиение таблицы T является ρ -надпокрытием таблицы T ,

$$\hat{l}_\rho(T) \geq l_\rho(T). \quad (7)$$

Пусть B_1 — ρ -надпокрытие таблицы T такое, что $|B_1| = l_\rho(T)$. Произвольному слову $\alpha \in B_1$ сопоставим число $n(\alpha) \in \omega$. Если $\Delta(T\alpha) = \emptyset$, то $n(\alpha) = 0$.

Если $\Delta(T\alpha) \neq \emptyset$, то $n(\alpha)$ — минимальное число из множества $\Pi(T\alpha)$. Обозначим $D = \{n(\alpha) : \alpha \in B_1\}$. Пусть $\bar{\delta} = \langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle \in \Delta(T)$. Тогда существует слово $\alpha \in B_1$ такое, что $\chi(\alpha) \subseteq \{\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle\}$. Ясно, что $\bar{\delta} \in \Delta(T\alpha)$. Поэтому $\Pi(T\alpha) \subseteq \nu_T(\bar{\delta})$. Так как $\Delta(T\alpha) \neq \emptyset$, то $n(\alpha) \in \Pi(T\alpha)$. Следовательно, $n(\alpha) \in \nu_T(\bar{\delta})$ и $D \cap \nu_T(\bar{\delta}) \neq \emptyset$. Поскольку $\bar{\delta}$ — произвольный набор из $\Delta(T)$, множество D является системой представителей для таблицы T . Поэтому $l^r(T) \leq |D|$. Ясно, что $|D| \leq |B_1|$. Поскольку $|B_1| = l_\rho(T)$,

$$l_\rho(T) \geq l^r(T). \quad (8)$$

По определению $l^r(T) \geq 1$. Отсюда и из (6)–(8) следует, что

$$\hat{M}_{\rho, \psi}(T) \geq \log_k \hat{l}_\rho(T) \geq \log_k l_\rho(T) \geq \log_k l^r(T).$$

Кроме того, из теоремы 1 вытекает, что $\psi_\rho^d(T) \geq \hat{M}_{\rho, \psi}(T)$. Теорема доказана.

Доказательство предложения 2. Используя теорему 2, получаем, что $\psi_\rho^d \geq \log_k l^r(T)$. Нетрудно показать, что $l^r(T) = N_\rho(T)$. Следовательно, $\psi_\rho^d(T) \geq \log_k N_\rho(T)$. Предложение доказано.

Лемма 2. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, $T \in \mathcal{T}_\rho$ и Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T . Тогда множество $P(\Gamma)$ есть ρ -тест таблицы T .

Доказательство. Если $T \in \mathcal{T}_\rho C$, то множество $P(\Gamma)$ является ρ -тестом таблицы T . Пусть теперь $T \notin \mathcal{T}_\rho C$. В этом случае $P(\Gamma) \neq \emptyset$. Пусть для определенности $P(\Gamma) = \{f_1, \dots, f_m\}$. Предположим, что множество $P(\Gamma)$ не является ρ -тестом таблицы T . Тогда существуют числа $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in E_k$ такие, что $T\langle f_1, \sigma_1 \rangle, \dots, \langle f_m, \sigma_m \rangle \notin \mathcal{T}_\rho C$. Обозначим $\beta = \langle f_1, \sigma_1 \rangle \dots \langle f_m, \sigma_m \rangle$. Ясно, что $\Delta(T\beta) \neq \emptyset$. Пусть $\bar{\delta}$ — некоторый набор из $\Delta(T\beta)$. Так как Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T , существует полный путь ξ схемы Γ такой, что $\bar{\delta} \in \Delta(T\pi(\xi))$ и $T\pi(\xi) \in \mathcal{T}_\rho C$. Нетрудно заметить, что $\chi(\pi(\xi)) \subseteq \chi(\beta)$. Поэтому $\Delta(T\beta) \subseteq \Delta(T\pi(\xi))$. Поскольку $T\pi(\xi) \in \mathcal{T}_\rho C$, то $T\beta \in \mathcal{T}_\rho C$, а это противоречит предположению. Следовательно, множество $P(\Gamma)$ является ρ -тестом таблицы T . Лемма доказана.

Обозначим через $L_1(G)$ число рабочих вершин в схеме $G \in C_\rho$.

Лемма 3. Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура и G -детерминированная схема t -сигнатуры ρ такая, что $h(G) \geq 1$. Тогда

$$L_1(G) \leq \sum_{i=0}^{h(G)-1} k^i.$$

Доказательство. Пусть G' — некоторая детерминированная схема t -сигнатуры ρ , в которой из каждой рабочей вершины выходит ровно k дуг и в каждом полном пути содержится ровно $h(G) + 2$ вершин. Нетрудно показать, что

$$L_1(G) \leq L_1(G') = \sum_{i=0}^{h(G)-1} k^i.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Если $\Theta_\rho(T) = 0$, то утверждение теоремы выполняется. Пусть $\Theta_\rho(T) \geq 1$ и G — ρ -детерминированный условный тест таблицы T такой, что $\psi(G) = \psi_\rho^d(T)$. Используя лемму 2, получаем, что множество $P(G)$ является ρ -тестом таблицы T . Следовательно, $\Theta_\rho(T) \leq |P(G)|$. Очевидно, $|P(G)| \leq L_1(G)$. Поэтому $\Theta_\rho(T) \leq L_1(G)$. Поскольку $\Theta_\rho(T) \geq 1$, то $h(G) \geq 1$. Из леммы 3 следует, что

$$L_1(G) \leq \sum_{i=0}^{h(G)-1} k^i = (k^{h(G)} - 1)/(k - 1).$$

Поэтому $\Theta_\rho(T) \leq (k^{h(G)} - 1)/(k - 1)$. Следовательно,

$$h(G) \geq \log_k((k - 1)\Theta_\rho(T) + 1).$$

Так как функция ψ обладает свойством Λ_2 , то $\psi(G) \geq h(G)$. Учитывая, что $\psi(G) = \psi_\rho^d(T)$, получаем, что

$$\psi_\rho^d(T) \geq \log_k((k - 1)\Theta_\rho(T) + 1).$$

Теорема доказана.

4. Подход к доказательству нижних оценок сложности

Пусть $\rho = \langle F, k \rangle$ — t -сигнатура, A — непустое конечное подмножество множества F и $A = \{f_1, \dots, f_n\}$. Будем называть $\langle A, \rho \rangle$ -деревом произвольное помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, обладающее следующими свойствами. Вершинам дерева ничего не приписано, а каждой дуге приписана пара из множества $\{\langle f_i, \delta \rangle : f_i \in A, \delta \in E_k\}$. Либо корень дерева является концевой вершиной, либо из него выходят n дуг, которым приписаны пары вида $\langle f_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle f_n, \delta_n \rangle$ соответственно. Пусть w — вершина дерева, не являющаяся корнем, и $B(w)$ — множество элементов из A , не встречающихся в парах, приписанных дугам пути от корня до вершины w . Если $B(w) = \emptyset$, то w — концевая вершина. Пусть $B(w) \neq \emptyset$ и $B(w) = \{f_{i_1}, \dots, f_{i_m}\}$. Тогда либо w — концевая вершина, либо из w выходят m дуг, которым приписаны пары вида $\langle f_{i_1}, \sigma_1 \rangle, \dots, \langle f_{i_m}, \sigma_m \rangle$ соответственно. Пусть G — $\langle A, \rho \rangle$ -дерево. Сопоставим каждой вершине w дерева G слово

$$\zeta(w) \in \{\langle f_i, \delta \rangle : f_i \in A, \delta \in E_k\}^*.$$

Корню G сопоставим пустое слово λ . Пусть из вершины w_1 дерева G выходит дуга, которая входит в вершину w_2 и которой приписана пара $\langle f_i, \delta \rangle$. Тогда $\zeta(w_2) = \zeta(w_1)\langle f_i, \delta \rangle$.

Пусть ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , $T \in \mathcal{T}_\rho$, G — $\langle P(T), \rho \rangle$ -дерево, $r \in \omega$. Дерево G будем называть деревом доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$, если $\Delta(T\zeta(w)) \neq \emptyset$ и $\psi(\zeta(w)) \geq r$ для любой концевой вершины w дерева G и $T\zeta(v) \notin \mathcal{T}_\rho C$ для любой вершины v дерева G , не являющейся концевой.

Теорема 4. Пусть $\rho = (F, k)$ — t -сигнатура, ψ — мера сложности t -сигнатуры ρ , обладающая свойством $\Lambda 1$, $r \in \omega$ и T — таблица из $\mathcal{T}_\rho$ такая, что $\Delta(T) \neq \emptyset$. Тогда дерево доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$ существует в том и только в том случае, когда справедливо неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$.

Пусть $T \in \mathcal{T}_\rho$, $\dim T = n > 1$, $f \in P(T)$ и $t \in E_k$. Определим таблицу $T[f, t] \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\mu_T(i) = f$. Тогда $\dim T[f, t] = n - 1$, множество $\Delta(T[f, t])$ получается из множества $\Delta(T(f, t))$ удалением из каждого входящего в него набора i -го разряда, набор $\langle \mu_{T[f, t]}(1), \dots, \mu_{T[f, t]}(n-1) \rangle$ получается из набора $\langle \mu_T(1), \dots, \mu_T(n) \rangle$ удалением i -го разряда. Пусть $\bar{\delta} \in \Delta(T[f, t])$ и набор $\bar{\delta}$ получен из набора $\bar{\sigma} \in \Delta(T(f, t))$ удалением i -го разряда. Тогда $\nu_{T[f, t]}(\bar{\delta}) = \nu_T(\bar{\sigma})$.

Доказательство теоремы 4. Пусть G — дерево доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Покажем, что справедливо неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Пусть Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T такой, что $\psi(\Gamma) = \psi_\rho^d(T)$. Каждой вершине w схемы Γ сопоставим слово $\pi(w) \in \Omega_\rho(T)$. Корню Γ и вершине, в которую входит дуга, выходящая из корня, сопоставим пустое слово λ . Пусть вершине w_1 схемы Γ приписан элемент f , и из вершины w_1 выходит дуга, которая входит в вершину w_2 и которой приписано число δ . Тогда $\pi(w_2) = \pi(w_1)\langle f, \delta \rangle$.

Опишем процесс построения ориентированного пути ξ схемы Γ , начинающегося в корне Γ , и полного пути τ дерева G . На первом шаге строятся начальный фрагмент w_0, d_0, w_1 пути ξ и начальная вершина v_1 пути τ , где w_0 — корень Γ , d_0 — дуга, выходящая из w_0 , w_1 — вершина, в которую входит дуга d_0 , и v_1 — корень G . В дальнейшем на каждом шаге кроме последнего к пути ξ добавляются дуга и вершина, а к пути τ либо ничего не добавляется, либо добавляются дуга и вершина. Пусть уже сделано i шагов. Опишем $(i+1)$ -й шаг. Пусть w и v — последние вершины путей ξ и τ соответственно, добавленные к этим путям в ходе выполнения первых i шагов. Если v — конечная вершина, то процесс построения путей ξ и τ заканчивается. Пусть вершина v не является конечной. Тогда, как будет показано ниже, вершина w также не является конечной. Пусть вершине w приписан элемент f_i . Из описания дерева G следует, что среди дуг пути от корня G до вершины v и дуг, выходящих из вершины v , имеется ровно одна дуга l , которой для некоторого $\delta \in E_k$ приписана пара $\langle f_i, \delta \rangle$. Добавим к пути ξ дугу, которая выходит из вершины w и которой приписано число δ (существование такой дуги в схеме Γ будет доказано ниже), а также вершину, в которую входит эта дуга. Если дуга l выходит из вершины v , то к пути τ добавим дугу l и вершину, в которую входит эта дуга. Если дуга l выходит не из вершины v , то к пути τ ничего не добавляется.

Приведем два утверждения, относящиеся к описанию $(i+1)$ -го шага. Пусть вершина v не является конечной. Покажем, что и вершина w не является конечной. Из описания процесса построения путей ξ и τ следует, что $\chi(\pi(w)) = \chi(\zeta(v))$. Поскольку вершина v не является конечной вершиной дерева G , то $T\zeta(v) \notin \mathcal{T}_\rho C$. Следовательно, $T\pi(w) \notin \mathcal{T}_\rho C$. Предположим, что вершина w является конечной вершиной. Пусть γ — полный путь схемы Γ , заканчивающийся в вершине w . Так как Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T , то $T\pi(\gamma) \in \mathcal{T}_\rho C$. Ясно, что $\pi(w) = \pi(\gamma)$. Следовательно, $T\pi(w) \in \mathcal{T}_\rho C$, а этого не может быть. Таким образом, вершина w не является конечной.

Покажем, что существует дуга, которая выходит из вершины w и которой приписано число δ . Предположим противное. Ясно, что существует верши-

на u дерева G такая, что $\chi(\pi(w)\langle f_t, \delta \rangle) = \chi(\zeta(u))$. Так как $\Delta(T\zeta(u)) \neq \emptyset$, то $\Delta(T\pi(w)\langle f_t, \delta \rangle) \neq \emptyset$. Поскольку Γ — детерминированная схема, $\Delta(T\pi(\xi)) \cap \Delta(T\pi(w)\langle f_t, \delta \rangle) = \emptyset$ для любого полного пути ξ схемы Γ . Следовательно,

$$\bigcup_{\xi \in \Xi(\Gamma)} \Delta(T\pi(\xi)) \neq \Delta(T).$$

Это невозможно, так как Γ — ρ -детерминированный условный тест таблицы T . Таким образом, рассматриваемая дуга существует.

Поскольку в схеме Γ нет бесконечных ориентированных путей, то процесс построения ориентированного пути ξ и полного пути τ завершится после выполнения конечного числа шагов. Пусть w' и v' — последние вершины путей ξ и τ соответственно. Нетрудно заметить, что слово $\zeta(v')$ может быть получено из слова $\pi(w')$ вычеркиванием некоторых букв. Ясно, что существует полный путь γ схемы Γ , который проходит через вершину w' . Для этого пути слово $\pi(w')$ является префиксом слова $\pi(\gamma)$. Так как мера сложности ψ обладает свойством $\Lambda 1$, $\psi(\pi(\gamma)) \geq \psi(\pi(w')) \geq \psi(\zeta(v'))$. Поскольку v' — концевая вершина дерева G , то $\psi(\zeta(v')) \geq r$. Следовательно, $\psi(\Gamma) \geq r$. Поскольку $\psi(\Gamma) = \psi_\rho^d(T)$, то $\psi_\rho^d(T) \geq r$.

Индукцией по параметру n докажем, что для любой таблицы $T \in \mathcal{T}_\rho$ такой, что $\dim T = n$ и $\Delta(T) \neq \emptyset$, любой меры сложности ψ t -сигнатуры ρ , обладающей свойством $\Lambda 1$, и любого $r \in \omega$, если выполняется неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$, то существует дерево доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$.

Покажем, что рассматриваемое утверждение выполняется при $n = 1$. Пусть $\dim T = 1$. Предположим вначале, что $T \in \mathcal{T}_{\rho C}$ и $m \in \Pi(T)$. Тогда схема t -сигнатуры ρ , в которой имеется ровно две вершины и концевой вершине приписано число m , является ρ -детерминированным условным тестом таблицы T . Следовательно, $\psi_\rho^d(T) \leq \psi(\lambda)$. Поскольку мера сложности ψ обладает свойством $\Lambda 1$, то $\psi(\alpha) \geq \psi(\lambda)$ для любого $\alpha \in F^*$. Поэтому $\psi_\rho^d(T) = \psi(\lambda)$. Нетрудно заметить, что дерево G' , состоящее из одной вершины, которой ничего не приписано, является деревом доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq \psi(\lambda)$. Пусть выполняется неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Тогда $\psi(\lambda) \geq r$. Следовательно, G' — дерево доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Предположим теперь, что $T \notin \mathcal{T}_{\rho C}$. Пусть Γ — произвольный ρ -детерминированный условный тест таблицы T и $\xi \in \Xi(\Gamma)$. Так как $T \notin \mathcal{T}_{\rho C}$, то $\pi(\xi) \neq \lambda$. Поскольку мера сложности ψ обладает свойством $\Lambda 1$, то $\psi(\pi(\xi)) \geq \psi(f)$, где f — единственный элемент множества $P(T)$. Следовательно, $\psi_\rho^d(T) \geq \psi(f)$. Нетрудно показать, что существует ρ -детерминированный условный тест Γ таблицы T такой, что $\psi(\Gamma) = \psi(f)$. Следовательно, $\psi_\rho^d(T) = \psi(f)$. Так как $T \notin \mathcal{T}_{\rho C}$, существует число $\delta \in E_k$ такое, что $\Delta(T\langle f, \delta \rangle) \neq \emptyset$. Поэтому дерево G'' , состоящее из двух вершин, которым ничего не приписано, и соединяющей их дуги, которой приписана пара $\langle f, \delta \rangle$, является деревом доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq \psi(f)$. Пусть выполняется неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Тогда $\psi(f) \geq r$. Следовательно, G'' — дерево доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$.

Пусть рассматриваемое утверждение справедливо для некоторого $n \geq 1$. Покажем, что оно справедливо и для $n + 1$. Пусть $\dim T = n + 1$ и выполняется неравенство $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Предположим вначале, что $T \in \mathcal{T}_{\rho C}$. Аналогично случаю $\dim T = 1$ получаем, что дерево G' является деревом доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Предположим теперь, что $T \notin \mathcal{T}_{\rho C}$. Пусть $P(T) = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$. Для каждого $f_i \in P(T)$ определим меру сложности $f_i\psi$ t -сигнатуры ρ , полагая

$f_i\psi(\alpha) = \psi(f_i\alpha)$ для любого $\alpha \in F^*$. Поскольку функция ψ обладает свойством $\Lambda 1$, $f_i\psi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \psi(f_i\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \geq \psi(f_i\alpha_1\alpha_3) = f_i\psi(\alpha_1\alpha_3)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^*$. Следовательно, функция $f_i\psi$ обладает свойством $\Lambda 1$. Нетрудно показать, что

$$\psi_\rho^d(T) \leq \max\{f_i\psi_\rho^d(T[f_i, \delta]) : \delta \in E_k, \Delta(T[f_i, \delta]) \neq \emptyset\}$$

для любого $f_i \in P(T)$. Следовательно, для каждого $f_i \in P(T)$ существует число $\delta_i \in E_k$ такое, что $\Delta(T[f_i, \delta_i]) \neq \emptyset$ и

$$f_i\psi_\rho^d(T[f_i, \delta_i]) \geq \psi_\rho^d(T) \geq r.$$

Ясно, что $\dim T[f_i, \delta_i] = n$ для любого $f_i \in P(T)$. Используя предположение индукции, получаем, что для каждого $f_i \in P(T)$ существует дерево доказательства оценки $f_i\psi_\rho^d(T[f_i, \delta_i]) \geq r$. Обозначим это дерево G_i . Пусть G — помеченное конечное ориентированное дерево с корнем следующего вида: для каждого $f_i \in P(T)$ из корня дерева G выходит дуга, которая входит в корень дерева G_i и которой приписана пара $\langle f_i, \delta_i \rangle$. Нетрудно проверить, что дерево G является деревом доказательства оценки $\psi_\rho^d(T) \geq r$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем. *Успехи матем. наук* (1955) 10, №4, 182–184.
2. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля электрических схем. *Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова* (1958) 51, 270–360.
3. Мошков М. Ю. Условные тесты. *Пробл. киберн.* (1983) 40, 131–170.
4. Тарасова В. П. *Метод стратегии противника в задачах оптимального поиска*. Изд-во МГУ, Москва, 1988.

Статья поступила 18.02.94.