Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Петровский, Предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых необязательно одинаково распределенных решетчатых случайных векторов, *Дискрет. матем.*, 1996, том 8, выпуск 3, 47–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:50:53

Предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых необязательно одинаково распределенных решетчатых случайных векторов

© 1996 г. К. В. Петровский

В работе оцениваются вероятности больших уклонений сумм независимых необязательно одинаково распределенных решетчатых случайных векторов, принимающих значения из k -мерного евклидова пространства. В предположении, что выполнено условие Крамера в решетчатом случае, сформулирована локальная и доказана интегральная предельная теорема для некоторого класса выпуклых борелевских множеств.

1. Введение

Предельные теоремы о вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных векторов исследовались многими авторами. Вопросы, связанные с распределениями сумм одинаково распределенных случайных векторов, рассматривались в работах А. К. Алешкявичене, А. А. Боровкова, А. А. Могульского, А. В. Нагаева, Л. В. Осипова, Б. А. Рагозина, И. Н. Санова, Л. Саулиса, В. Статулявичуса, В. К. Светулявичене, В. Рихтера и др.

В [18] доказана локальная предельная теорема для необязательно одинаково распределенных случайных векторов в абсолютно непрерывном и решетчатом случаях.

Распределению сумм разнораспределенных независимых случайных векторов в области умеренно больших уклонений для замкнутых выпуклых борелевских множеств в абсолютно непрерывном случае посвящена работа Л. Саулиса [14].

В настоящей работе рассматриваются распределения в области больших уклонений сумм независимых необязательно одинаково распределенных решетчатых случайных векторов. В несколько отличной от работы [18] постановке задачи формулируется локальная предельная теорема. Для некоторого класса выпуклых борелевских множеств доказывается интегральная предельная теорема.

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых решетчатых случайных векторов из k -мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^k$ с распределениями соответственно $P_1(x), P_2(x), \dots$. Для векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$ в $\mathbf{R}^k$ скалярное произведение и норма определяются формулами

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Для неотрицательного вектора $\tau \in \mathbf{R}^k$ рассматривается множество

$$\Omega_\tau = \{x \in \mathbf{R}^k, x \geq \tau\},$$

где под выражением $x \geq \tau$ понимается выполнение соответствующих неравенств для всех координат векторов x и τ . Обозначим

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

В настоящей работе в предположении, что S_n для любого n является решетчатым случайным вектором, для последовательности $\tau_1, \tau_2, \dots$ неотрицательных векторов из $\mathbf{R}^k$ исследуется асимптотика при $n \rightarrow \infty$ вероятности

$$P(S_n/n \in \Omega_{\tau_n}). \quad (1)$$

Векторы $\tau_1, \tau_2, \dots$ выбираются таким образом, что вероятность (1) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. При выполнении данного условия множества Ω_{τ_n} соответствуют области больших уклонений.

Введем ряд понятий, необходимых для дальнейшего изложения. Преобразование Лапласа распределения $p_i(x)$ обозначим через

$$\varphi_i(\lambda) = \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi_i \rangle}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^k.$$

Для любого n случайному вектору S_n ставится в соответствие функция

$$\psi_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\lambda).$$

Положим

$$A_n(\lambda) = \frac{1}{n} \ln \psi_n(\lambda).$$

Для действительной функции $f(x)$ от k переменных через $f'(x)$ обозначим вектор первых производных, а через $f''(x)$ — матрицу вторых смешанных производных. Пусть $r = (r_1, \dots, r_k)$ — неотрицательный целочисленный вектор, и пусть $|r| = r_1 + \dots + r_k$. В общем случае смешанная производная функции $f(x)$ порядка $|r|$ в предположении, что она существует, для $x = (x_1, \dots, x_k)$ будет обозначаться

$$D^r f(x) = \frac{\partial^{|r|} f(x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_k^{r_k}}.$$

Пусть $V_\varepsilon(a) = \{b \in \mathbf{R}^k, \|b - a\| \leq \varepsilon\}$ для $a \in \mathbf{R}^k$ и $\varepsilon > 0$. Для рассматриваемых случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots$ предполагаются выполненными следующие условия.

Условие 1. Существуют $\lambda_0 \in \mathbf{R}^k$ и $\varepsilon > 0$ такие, что функция $\psi_n(\lambda) < \infty$ для всех $\lambda \in V_\varepsilon(\lambda_0)$.

Множество точек $\lambda \in \mathbf{R}^k$, для которых $\psi_n(\lambda) < \infty$, обозначим через L_n .

Условие 2. Существует непустое фиксированное множество $V_0 \in L_n$ и константа $d > 0$ такие, что для любого n

$$\sup_{\lambda \in V_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\ln \varphi_i(\lambda)| \leq d.$$

Условие 3. Для множества V_0 существует константа $\delta > 0$ такая, что для любого n

$$\inf_{\lambda \in V_0} \det A_n''(\lambda) \geq \delta.$$

Легко заметить, что условие 1 соответствует условию C_{r_2} работы [2]. В свою очередь из условия 3 следует выполнение на множестве V_0 условия C_{r_0} упомянутой работы. При выполнении условия 3 для любого n распределение случайного вектора S_n не сосредоточено ни на какой гиперплоскости в $\mathbf{R}^k$.

По аналогии с [2, стр. 13] функция уклонений $\Lambda_n(x)$ для случайного вектора S_n/n определяется равенством

$$\Lambda_n(x) = \sup\{\langle x, \lambda \rangle - A_n(\lambda)\}, \quad x \in \mathbf{R}^k.$$

Рассмотрим отображение F_n множества L_n в $\mathbf{R}^k$. Пусть для любого $\lambda \in L_n$

$$F_n(\lambda) = \frac{\psi_n'(\lambda)}{n\psi_n(\lambda)}.$$

При выполнении условия 3 отображение F_n взаимно однозначно переводит множество L_n в множество $F_n(L_n)$. Ясно, что обратное отображение F_n^{-1} существует и также является взаимно однозначным. Обозначим через $(F_n(L_n))$ совокупность внутренних точек множества $F_n(L_n)$. В соответствии со сказанным выше для любого $x \in (F_n(L_n))$

$$\Lambda_n(x) = \langle x, \lambda_n(x) \rangle - A_n(\lambda_n(x)),$$

где $\lambda_n(x) \in F_n^{-1}(x)$.

В случае суммирования одинаково распределенных случайных векторов свойства функции $\Lambda_n(x)$ подробно изучены в [2]. Очевидно, что по свойствам неявных функций (см. [6], стр. 678) для любого $x \in (F_n(L_n))$

$$\Lambda_n'(x) = \lambda_n(x), \quad \Lambda_n''(x) = [A_n''(\lambda_n(x))]^{-1}. \quad (2)$$

При выполнении условия 3 на множестве V_0 матрица $A_n''(\lambda)$ положительно определена. Соответственно положительно определена и матрица $\Lambda_n''(x)$ на множестве $F_n(V_0)$.

Для положительной константы ε_0 положим

$$V^{\varepsilon_0} = \{x \in \mathbf{R}^k, V_{\varepsilon_0}(x) \subset V_0\}.$$

Лемма 1. Пусть для последовательности случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполнены условия 1–3, для некоторого положительного числа ε_0 множество V^{ε_0} непусто, выпуклое компактное множество $G \subseteq F_n(V^{\varepsilon_0})$ содержит вектор ES_n . Тогда для любого натурального числа r_0 равномерно по n

$$\sup_{|r|=1, \dots, r_0} \sup_{x \in G} |D^r \Lambda_n(x)| < B_{r_0},$$

где B_{r_0} — не зависящая от n константа.

Доказательство. В силу условия 2 для любого z , принадлежащего k -мерному комплексному пространству C^k , такого, что $\operatorname{Re} z \in V^{\varepsilon_0}$, где $\operatorname{Re} z$ — вектор действительных частей z , справедливо неравенство

$$|A_n(z)| < d + \pi$$

(рассматривается главное значение логарифма). А значит, по теореме Коши (см. [4], стр. 82) для любого неотрицательного целочисленного вектора r существует положительная константа $T_{|r|}$, для которой

$$\sup_{\lambda \in V^{\varepsilon_0}} |D^r A_n(\lambda)| < T_{|r|}.$$

Учитывая, что $\det A_n''(\lambda) \geq \delta > 0$ для любого $\lambda \in V^{\varepsilon_0}$, в соответствии с равенством (2) получаем, что при $|r| \geq 2$ смешанные производные $D^r \Lambda_n(x)$ на множестве $F_n(V^{\varepsilon_0})$ по модулю ограничены сверху константой, не зависящей от n . Осталось заметить, что по условию $G \subseteq F_n(V^{\varepsilon_0})$.

Рассмотрим случай $|r| = 1$. Для любого $j = 1, \dots, k$ по формуле Тейлора для $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_k) \in G$ существует $\theta \in (0, 1)$, для которого

$$\frac{\partial \Lambda_n(a)}{\partial x_j} = \frac{\partial \Lambda_n(b)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \Lambda_n(b + (1 - \theta)a)}{\partial x_j \partial x_i} (a_i - b_i).$$

В силу выпуклости множества G для любого $\theta \in (0, 1)$ справедливо включение $b + (1 - \theta)a \in G$. Следовательно, для $i = 1, \dots, k$

$$\left| \frac{\partial^2 \Lambda_n(b + (1 - \theta)a)}{\partial x_j \partial x_i} \right| < T_2^{k-1} (k - 1)! \delta^{-1}.$$

В результате получаем, что

$$\left| \frac{\partial \Lambda_n(a)}{\partial x_j} - \frac{\partial \Lambda_n(b)}{\partial x_j} \right| < T_2^{k-1} (k - 1)! \delta^{-1} |a - b|, \quad (3)$$

где величина

$$|a - b| = \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|$$

на множестве G ограничена сверху константой вследствие компактности рассматриваемого множества.

Функция $|\partial\Lambda_n(x)/\partial x_j|$ непрерывна на множестве G и, следовательно, достигает на нем своего минимального значения. Для любого n

$$\mathbf{E}S_n \in G, \quad \frac{\partial\Lambda_n(\mathbf{E}S_n)}{\partial x_j} = 0.$$

Полагая в неравенстве (3) $b = \mathbf{E}S_n$, получаем оценку

$$\sup_{x \in G} \frac{\partial\Lambda_n(x)}{\partial x_j} < B_1,$$

где B_1 — константа, не зависящая от n .

Лемма 1 доказана.

3. Локальная предельная теорема о больших уклонениях

Пусть для любого n случайный вектор S_n является решетчатым. Данное предположение эквивалентно тому, что для любого n существует вектор $a(n) = (a_1(n), \dots, a_k(n)) \in \mathbf{R}^k$ и положительный вектор $h(n) = (h_1(n), \dots, h_k(n))$, называемый вектором покоординатных шагов, такие, что случайный вектор S_n/n принимает значения из множества

$$X_n = \left\{ \left(\frac{a_1(n) + m_1 h_1(n)}{n}, \dots, \frac{a_k(n) + m_k h_k(n)}{n} \right), m_i, i = 1, \dots, k, \text{ целые} \right\}.$$

Для любого $\lambda \in \mathbf{R}^k$ и положительного числа

$$\varepsilon < \min_{j=1, \dots, k} \frac{\pi}{h_j(n)}$$

рассмотрим множества

$$\Gamma(\lambda) = \{z = \lambda + it \in \mathbf{C}^k, t = (t_1, \dots, t_k), |t_j| \leq \pi/h_j(n), j = 1, \dots, k\},$$

$$\Gamma_\varepsilon(\lambda) = \{z = \lambda + it \in \mathbf{C}^k, |t_j| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, k\}.$$

Теорема 1. Пусть для независимых решетчатых случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполнены условия 1–3, вектор

$$S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$$

является решетчатым с вектором максимальных покоординатных шагов $h(n) = (h_1(n), \dots, h_k(n))$, для некоторого положительного ε такого, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{j=1, \dots, k} \frac{\pi}{h_j(n)} > \varepsilon,$$

и

$$\theta_n = \inf_{\lambda \in V_0} \inf_{z \in \Gamma(\lambda) \setminus \Gamma_\varepsilon(\lambda)} \ln \frac{\psi_n(\lambda)}{|\psi_n(z)|}$$

справедливо неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \left(\theta_n + \sum_{j=1}^k \ln h_j(n) \right) > \frac{k+2}{2}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ равномерно относительно $x \in F_n(V^{\varepsilon_0}) \cap X_n$ таких, что $\mathbf{P}(S_n/n = x) > 0$,

$$\mathbf{P}(S_n/n = x) = \frac{1}{(2\pi n)^{k/2}} \prod_{s=1}^k h_s(n) \exp\{-n\Lambda_n(x)\} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство теоремы аналогично приведенному в [18].

4. Интегральная предельная теорема о больших уклонениях

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Для положительного числа ε и $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ положим

$$D_\varepsilon(x, I) = \{y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{R}^k, |y_j - x_j| \leq \varepsilon, j \notin I, x_i \leq y_i \leq x_i + \varepsilon, i \in I\}.$$

В предположении, что $\mathbf{E}\xi_j = 0$ для любого j , для некоторого неотрицательного вектора τ оценим значение вероятности $\mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_\tau)$. Множество Ω_τ для любого вектора τ является выпуклым. При выполнении условий 1–3 матрица $\Lambda_n''(x)$ положительно определена, и, следовательно, функция $\Lambda_n(x)$ имеет на множестве Ω_τ единственную точку минимума. В случае неотрицательного вектора τ упомянутая точка минимума в силу предположения о значениях математических ожиданий случайных векторов принадлежит границе рассматриваемого множества.

Теорема 2. Пусть для последовательности независимых решетчатых случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots$ выполнены условия леммы 1 и теоремы 1, для $n \geq 1$ $h(n) = (h_1(n), \dots, h_k(n))$ — вектор максимальных по координатным шагам случайного вектора

$$S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j,$$

принимającego значения из множества nX_n , $\tau_n = (\tau_n^1, \dots, \tau_n^k)$ — неотрицательный вектор, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$ — точка минимума функции $\Lambda_n(x)$ на множестве Ω_{τ_n} . Пусть для множества G , определенного в лемме 1, равномерно по n выполнены следующие условия.

(1) Для непустого фиксированного множества $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$

$$x_n^i = \tau_n^i, \quad i \in I, \quad x_n^j > \tau_n^j, \quad j \notin I.$$

- (2) $\delta_n = \min\{\min_{j \notin I}\{x_n^j - \tau_n^j\}, \min_{i \in I}\{\lambda_n^i(x_n)\}\} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n\delta_n^2} = 0,$
 где $\lambda_n(x_n) = (\lambda_n^1(x_n), \dots, \lambda_n^k(x_n))$ — единственное решение системы уравнений

$$x_n = \frac{\psi'_n(\lambda)}{n\psi_n(\lambda)}.$$

- (3) Для некоторых положительных констант c_1, c_2

$$D_{c_1\delta_n}(x_n, I) \subseteq G,$$

для $x \in D_{c_1\delta_n}(x_n, I) \cap X_n$

$$\mathbf{P}(S_n/n = x) > 0, \quad \mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \setminus G) \leq \exp\{-n(\Lambda_n(x_n) + c_2)\}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n}) = \prod_{j \in I} \frac{h_j(n) \exp\{-\alpha_j(n)\lambda_n^j(x_n)\} \exp\{-n\Lambda_n(x_n)\}}{1 - \exp\{-h_j(n)\lambda_n^j(x_n)\}} \frac{1}{(2\pi n)^{l/2} \rho_n(x_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right)\right),$$

где

$$\rho_n(x_n) = \sqrt{\det H_n(x_n) / \det \Lambda''(x_n)},$$

матрица $H_n(x_n)$ получается из матрицы $\Lambda''_n(x_n)$ вычеркиванием строк и столбцов с номерами из множества I , для $j \in I$

$$\alpha_j(n) = h_j(n)(u_j - d_j(n)),$$

$d_j(n)$ — дробная часть числа $(x_n^j n - a_j(n))/h_j^n$,

$$u_j = \begin{cases} 0 & \text{при } d_j(n) = 0, \\ 1 & \text{при } d_j(n) \neq 0. \end{cases}$$

В случае $k = 1$ и $\tau_n \in X_n$ из теоремы 2 следует результат, полученный в [10] для одинаково распределенных решетчатых случайных величин.

Замечание. Из условия 2 теоремы следует, что $\tau_n \neq 0$ для любого n , поскольку в противном случае $x_n = 0$ и $\lambda_n^j(0) = 0$ для $j = 1, \dots, k$.

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть для последовательностей действительных функций $g_n(y)$ и $f_n(y)$, действительных чисел y_n и положительных действительных чисел h_n и ε_n , $n \geq 1$, равномерно по n выполнены следующие условия.

- (1) В ε_n -окрестности точки y_n функция $g_n(y)$ имеет первую производную, а функция $f_n(y)$ — производную второго порядка,

$$f'_n(y_n) < 0, \quad g_n(y_n) \neq 0.$$

(2) Для любого $y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) = (y_n, y_n + \varepsilon)$

$$\left| \frac{g'_n(y)}{g_n(y_n)} \right| \leq \Delta_0, \quad \max\{|f'_n(y)|, |f''_n(y)|\} \leq \Delta_1.$$

(3) $\varepsilon_n/|f'_n(y_n)| \leq \Delta_2$, $n\varepsilon_n|f'_n(y_n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

(4) $h_n \leq h$, где $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ и h — константы, не зависящие от n .

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} g_n(y) \exp\{nf_n(y)\} = \frac{g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \exp\{f'_n(y_n)\alpha_n\}}{1 - \exp\{h_n f'_n(y_n)\}} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n\varepsilon_n|f'_n(y_n)|}\right)\right),$$

где $Y_n = \{mh/n, m — \text{целое число}\}$, $\alpha_n = h_n(a - d_n)$, d_n — дробная часть числа yn/h_n ,

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } d_n = 0, \\ 1 & \text{при } d_n \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. По теореме Тейлора для $y \in B_{\varepsilon_n}(y_n)$ существуют y_1^0 и y_2^0 из интервала $(y_n, y_n + \varepsilon_n)$ такие, что

$$\begin{aligned} f_n(y) &= f_n(y_n) + f'_n(y_n)(y - y_n) + \frac{1}{2}f''_n(y_1^0)(y - y_n)^2, \\ g_n(y) &= g_n(y_n) + g'_n(y_2^0)(y - y_n), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} J &= \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} g_n(y) \exp\{nf_n(y)\} \subset \exp\{nf_n(y_n)\} \\ &\quad \times \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} \pi_n(y) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\pi_n(y) = g_n(y) \exp\left\{\frac{n}{2}f''_n(y_1^0)(y - y_n)^2\right\}.$$

В свою очередь

$$\exp\left\{\frac{n}{2}f''_n(y_1^0)(y - y_n)^2\right\} = 1 + \chi_n(y),$$

$|\chi_n(y)| \leq |z| \exp\{|z|\}$ при $z = nf''_n(y_1^0)(y - y_n)^2/2$. Но $|y - y_n| \leq \varepsilon_n$, следовательно,

$$|\chi_n(y)| \leq \frac{1}{2}|f''_n(y_1^0)|(y - y_n)^2 \exp\left\{\frac{n}{2}|f''_n(y_1^0)|\varepsilon_n(y - y_n)\right\}.$$

Разобьем сумму (4) на четыре подсуммы J_1, J_2, J_3, J_4 . Оценим

$$J_1 = g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\}.$$

По условию $f'_n(y_n) < 0$ для любого n . Следовательно, справа стоит сумма m_n членов убывающей геометрической прогрессии,

$$m_n = |B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n| = O\left(\frac{n\varepsilon_n}{h_n}\right),$$

то есть

$$\begin{aligned} J_1 &= g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \exp\{f'_n(y_n)\alpha_n\} \frac{1 - \exp\{h_n m_n f'_n(y_n)\}}{1 - \exp\{h_n f'_n(y_n)\}} \\ &= g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \frac{\exp\{\alpha_n f'_n(y_n)\}}{1 - \exp\{h_n f'_n(y_n)\}} (1 + o((n\varepsilon_n |f'_n(y_n)|)^{-\gamma})), \end{aligned}$$

где γ — любое фиксированное положительное число.

Оценим

$$J_2 = g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} \frac{g'_n(y'_2)}{g_n(y_n)} (y - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\}.$$

По условию равномерно по n для любого $y'_2 \in (y_n, y_n + \varepsilon)$

$$\left| \frac{g'_n(y'_2)}{g_n(y_n)} \right| \leq \Delta_0.$$

Следовательно,

$$|J_2| \leq g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \Delta_0 \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} (y - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\}.$$

Пусть для некоторого $y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n$

$$y' \in \left[y - \frac{h_n}{2n}, y + \frac{h_n}{2n} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} (y - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\} &= (y' - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)[(y' - y_n) + (y - y')]\} \\ &\quad + (y - y') \exp\{nf'_n(y_n)[(y' - y_n) + (y - y')]\}. \end{aligned}$$

По условию $|f'_n(y_n)| \leq \Delta_1$, а значит,

$$\begin{aligned} &(y - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\} \\ &\leq \left((y' - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y' - y_n)\} + \frac{h_n}{2n} \exp\{nf'_n(y_n)(y' - y_n)\} \right) \exp\left\{ \frac{\Delta_1 h_n}{2} \right\}. \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении интеграла получаем оценку

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \exp\{nf_n(y_n)\} g_n(y_n) \exp\left\{ \frac{\Delta_1 h_n}{2} \right\} \frac{\Delta_0 n}{h_n} \\ &\quad \times \left(\int_{y_n}^{y_n + \varepsilon_n} t_n(w) dw + \int_{y_n - h_n/(2n)}^{y_n} t_n(w) dw + \int_{y_n + \varepsilon_n}^{y_n + \varepsilon_n + h_n/(2n)} t_n(w) dw \right), \end{aligned}$$

где $t_n(w) = [(w - y_n) + h_n/(2n)] \exp\{nf'_n(y_n)(w - y_n)\}$. В силу ограниченности сверху константами равномерно по n величин h_n и $|f'_n(y_n)|$

$$J_2 = \frac{g_n(y_n)}{h_n} \exp\{nf_n(y_n)\} O\left(\frac{1}{n(f'_n(y_n))^2}\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} J_3 &= g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} \chi_n(y) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\} \\ &= \frac{g_n(y_n)}{h_n} \exp\{nf_n(y_n)\} O\left(\frac{1}{n(|f'_n(y_n)|)^3}\right). \end{aligned}$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} J_4 &= g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \sum_{y \in B_{\varepsilon_n}(y_n) \cap Y_n} \frac{g'_n(y_2^0)}{g_n(y_n)} \chi_n(y) (y - y_n) \exp\{nf'_n(y_n)(y - y_n)\} \\ &= \frac{g_n(y_n)}{h_n} \exp\{nf_n(y_n)\} O\left(\frac{1}{n(f'_n(y_n))^2}\right). \end{aligned}$$

Величины

$$\frac{1 - \exp\{h_n f'_n(y_n)\}}{h_n \exp\{\alpha_n f'_n(y_n)\} |f'_n(y_n)|}$$

на отрезке $B_{\varepsilon_n}(y_n)$ равномерно по n ограничены сверху константой, не зависящей от n .

Поэтому в соответствии с условием 3 леммы

$$J = g_n(y_n) \exp\{nf_n(y_n)\} \frac{\exp\{\alpha_n f'_n(y_n)\}}{1 - \exp\{h_n f'_n(y_n)\} |f'_n(y_n)|} \left(1 + O\left(\frac{1}{n\varepsilon_n |f'_n(y_n)|}\right)\right).$$

Лемма 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Без ограничения общности предположим, что $I = \{k - l + 1, \dots, k\}$. Пусть G — компактное множество, определенное в лемме 1. Тогда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n}) = \mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \cap G) + \mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \setminus G). \quad (5)$$

Оценим первое слагаемое. Положим $\varepsilon_n = \beta \delta_n$, тогда для $\beta \leq \min\{1, c_1\}$

$$D_{\varepsilon_n}(x_n, I) \subseteq \Omega_{\tau_n} \cap G,$$

то есть

$$\mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \cap G) = \mathbf{P}(S_n/n \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I)) + \mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \cap G \setminus D_{\varepsilon_n}(x_n, I)). \quad (6)$$

В соответствии с леммой 1 $G \subseteq F_n(V^{\varepsilon_0})$, следовательно,

$$\begin{aligned} P(S_n/n \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I)) &= \frac{1}{(2\pi n)^{k/2}} \prod_{s=1}^k h_s(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\times \sum_{x \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I) \cap X_n} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где множество X_n определено в теореме 1.

Оценим значение суммы. Пусть для $j = 1, \dots, k$

$$X_n(j) = \left\{ \frac{mh_j(n) + a_j(n)}{n}, m \text{ — целое число} \right\}.$$

Тогда для $x = (x_1, \dots, x_k)$, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \sum_{x \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I) \cap X_n} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\} \\ &= \sum_{x_1 \in V_{\varepsilon_n}(x_n^1) \cap X_n(1)} \dots \sum_{x_k \in B_{\varepsilon_n}(x_n^k) \cap X_n(k)} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Пусть x_n — точка минимума функции $\Lambda_n(x)$ на множестве Ω_{τ_n} . В силу условия 2 теоремы для $j \in I$

$$\frac{\partial \Lambda_n(x_n)}{\partial x_j} = \lambda_n^j(x_n) > 0.$$

Для достаточно малого β данные неравенства выполняются для любого x из $D_{\varepsilon_n}(x_n, I)$. Кроме того, по теореме 1 $h_j(n) \leq 2\pi/\varepsilon$, $j = 1, \dots, k$, для достаточно больших n . Следовательно, в соответствии с леммой 1 для фиксированных значений $x_1, \dots, x_{k-1}$ таких, что $x \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I)$, значение суммы

$$\sum_{x_k \in B_{\varepsilon_n}(x_n^k) \cap X_n(k)} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\}$$

может быть оценено в соответствии с леммой 2. А именно, пусть

$$v_s = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_n^s, \dots, x_n^k) \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I)$$

для $s \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{x_k \in B_{\varepsilon_n}(x_n^k) \cap X_n(k)} (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\} \\ &= (\det \Lambda_n''(v_k))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(v_k)\} \frac{\exp\{-\alpha_k(n)\lambda_n^k(v_k)\}}{1 - \exp\{-h_k(n)\lambda_n^k(v_k)\}} \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n\varepsilon_n\lambda_n^k(v_k)}\right) \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что для достаточно малого β существуют положительные не зависящие от n константы Δ_3 и Δ_4 такие, что

$$\Delta_3 \leq \left| \frac{\lambda_n^k(v_k)}{\lambda_n^k(x_n)} \right| \leq \Delta_4,$$

то есть фактически остаток в формуле (9) имеет порядок $O(1/(n\varepsilon_n\lambda_n^k(x_n)))$. Применяя лемму 2 для оценки значений соответствующих сумм в выражении (8) для переменных $x_{k-l+1}, \dots, x_{k-1}$ и учитывая, что $\varepsilon_n = \beta\delta_n$, получаем оценку

$$\hat{J} = \sum_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} q_n(\hat{x}) \exp\{nb_n(\hat{x})\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right)\right), \quad (10)$$

где для $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{k-l})$

$$\begin{aligned} q_n(\hat{x}) &= (\det \Lambda_n''(v_{k-l+1}))^{1/2} \prod_{j=k-l+1}^k \frac{\exp\{-\alpha_j(n)\lambda_n^j(v_{k-l+1})\}}{1 - \exp\{-h_j(n)\lambda_n^j(v_{k-l+1})\}}, \\ b_n(\hat{x}) &= -\Lambda_n(v_{k-l+1}), \\ \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) &= V_{\varepsilon_n}(x_n^1) \times \dots \times V_{\varepsilon_n}(x_n^{k-l}), \\ \tilde{X}_n &= X_n(1) \times \dots \times X_n(k-l). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть для вектора $\hat{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_{k-l}^0) \in \tilde{X}_n$

$$K_{\hat{y}_0} = \{\hat{x} = (x_1, \dots, x_{k-l}) \in \mathbf{R}^{k-l}, |x_j - y_j^0| \leq h_j(n)/(2n), j = 1, \dots, k-l\}.$$

Тогда для $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{k-l}) \in K_{\hat{y}_0}$ в соответствии с формулой Тейлора при $|y_j - y_j^0| \leq h_j(n)/(2n), j = 1, \dots, k-l$,

$$\begin{aligned} b_n(\hat{y}_0) &= b_n(\hat{y}) + \langle b'_n(\hat{y}), \hat{y}_0 - \hat{y} \rangle + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ q_n(\hat{y}_0) &= q_n(\hat{y}) \left(1 + \left\langle \frac{q'_n(\hat{w})}{q_n(\hat{y})}, \hat{y}_0 - \hat{y} \right\rangle\right), \end{aligned}$$

где $q_n(\hat{y}) \neq 0$ для любого $\hat{y} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n)$ при достаточно малом β , $\hat{w} \in K_{\hat{y}_0}$. При выполнении условий леммы 1

$$\left| \left\langle \frac{q'_n(\hat{w})}{q_n(\hat{y})}, \hat{y}_0 - \hat{y} \right\rangle \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n\delta_n}\right),$$

то есть для $\tilde{b}_n(\hat{y}, \hat{y}_0) = b_n(\hat{y}) + \langle b'_n(\hat{y}), \hat{y}_0 - \hat{y} \rangle$

$$q_n(\hat{y}_0) \exp\{nb_n(\hat{y}_0)\} = q_n(\hat{y}) \exp\{n\tilde{b}_n(\hat{y}, \hat{y}_0)\} + \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n\delta_n}\right)\right).$$

Обобщая сказанное выше, по теореме о среднем значении получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} q_n(\hat{x}) \exp\{nb_n(\hat{x})\} &= \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n\delta_n}\right)\right) n^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{k-l} h_j(n)\right)^{-1} \\ &\times \sum_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} \int_{K_{\hat{x}}} q_n(\hat{y}) \exp\{n\tilde{b}_n(\hat{y}, \hat{x})\} d\hat{y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим значение суммы в формуле (12). Пусть

$$\mathcal{F}_1(\hat{y}) = q_n(\hat{y}) \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{k-l} \left| \frac{\partial b_n(\hat{y})}{\partial y_j} \right| h_j(n) + b_n(\hat{y})n \right\},$$

$$\mathcal{F}_2(\hat{y}) = \mathcal{F}_1(\hat{y}) \exp \left\{ 2 \sum_{j=1}^{k-l} \left| \frac{\partial b_n(\hat{y})}{\partial y_j} \right| h_j(n) \right\}.$$

Поскольку $q_n(x_n^1, \dots, x_n^{k-l}) > 0$, для любого $\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n$

$$\mathcal{F}_1(\hat{y}) \leq q_n(\hat{y}) \exp\{n\tilde{b}_n(\hat{y}, \hat{x})\} \leq \mathcal{F}_2(\hat{y}). \quad (13)$$

Рассмотрим множества

$$S(1) = \{\hat{y} = (y_1, \dots, y_{k-l}) \in \mathbf{R}^{k-l}, |y_j - x_n^j| \leq \varepsilon_n - h_j(n)/(2n), j = 1, \dots, k-l\},$$

$$S(2) = \{\hat{y} = (y_1, \dots, y_{k-l}) \in \mathbf{R}^{k-l}, |y_j - x_n^j| \leq \varepsilon_n + h_j(n)/(2n), j = 1, \dots, k-l\}.$$

Очевидно, что

$$S(1) \subset \bigcup_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} K_{\hat{x}} \subset S(2),$$

то есть для $j = 1, 2$

$$R_{1j}(x_n) \leq \sum_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} \int_{K_{\hat{x}}} \mathcal{F}_j(\hat{y}) d\hat{y} \leq R_{2j}(x_n), \quad (14)$$

где

$$R_{ij}(x_n) = \int_{S(i)} \mathcal{F}_j(\hat{y}) d\hat{y}.$$

Оценим $R_{11}(x_n)$. Пусть для $w \in \mathbf{R}$

$$\text{sign } w = \begin{cases} 1 & \text{при } w \geq 0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда при $\hat{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^{k-l})$ для достаточно малого β

$$\left| \frac{\partial b_n(\hat{y})}{\partial y_j} \right| = \text{sign} \left(\frac{\partial b_n(\hat{x}_n)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial b_n(\hat{y})}{\partial y_j}, \quad j = 1, \dots, k-l.$$

Следовательно,

$$R_{11} = \int_{S(1)} \tilde{q}_n(\hat{y}) \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y}$$

для

$$\tilde{q}_n(\hat{y}) = q_n(\hat{y}) \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{k-l} \text{sign} \left(\frac{\partial b_n(\hat{x}_n)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial b_n(\hat{y})}{\partial y_j} h_j(n) \right\}.$$

В точке $\hat{x}_n$, являющейся внутренней точкой множества $\tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n)$, на рассматриваемом множестве функция $b_n(\hat{y})$ достигает своего максимального значения, то есть $\partial b_n(\hat{x}_n)/\partial y_j = 0$ для $j = 1, \dots, k-l$, и соответственно $\tilde{q}(\hat{x}_n) = q_n(\hat{x}_n)$.

По теореме Тейлора для любого $\hat{y} \in \tilde{V}_{\epsilon_n}(x_n)$ существуют $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$, для которых

$$\begin{aligned}\tilde{q}_n(\hat{y}) &= \tilde{q}_n(\hat{x}_n) + \langle \tilde{q}'_n(\hat{x}_n), \hat{y} - \hat{x}_n \rangle + \frac{1}{2}(\hat{y} - \hat{x}_n) \tilde{q}''_n(\hat{y}_1)(\hat{y} - \hat{x}_n)^T, \\ b_n(\hat{y}) &= b_n(\hat{x}_n) + \frac{1}{2}(\hat{y} - \hat{x}_n) b''_n(\hat{x}_n)(\hat{y} - \hat{x}_n)^T + \sum_{|r|=3} C_r^n(\hat{x}_n)(\hat{y} - \hat{x}_n)^r \\ &\quad + \sum_{|r|=4} C_r^n(\hat{y}_2)(\hat{y} - \hat{x}_n)^r,\end{aligned}$$

где индекс T означает транспонирование, для неотрицательного целочисленного вектора $r = (r_1, \dots, r_{k-l})$ и $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{k-l}) \in \mathbf{R}^{k-l}$

$$\hat{x}^r = \prod_{j=1}^{k-l} x_j^{r_j}, \quad C_r^n(\hat{x}) = \frac{1}{|r|!} D^r b_n(\hat{x}).$$

Учитывая сказанное выше, получаем, что

$$\begin{aligned}R_{11}(x_n) &= \tilde{q}_n(x_n) \int_{S(1)} \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y} + \int_{S(1)} \langle \tilde{q}'_n(\hat{x}_n), \hat{y} - \hat{x}_n \rangle \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y} \\ &\quad + \int_{S(1)} (\hat{y} - \hat{x}_n) \tilde{q}''_n(\hat{y}_1)(\hat{y} - \hat{x}_n)^T \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y}. \quad (15)\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое суммы (15). Для этого рассмотрим квадратичную форму $x \Lambda''_n(x) x^T$. При выполнении условий теоремы 1 в соответствии с формулой (2) $|D^r \Lambda_n(x_n)| \leq B_r$ для любого конечного r , $\det \Lambda''_n(x_n) \geq \tilde{\delta}_1$, где $\tilde{\delta}_1$ и B — положительные константы, не зависящие от n .

Выполнение данных неравенств является достаточным условием существования не зависящей от n положительно определенной квадратичной формы $s(x)$ такой, что $s(x) \leq x \Lambda''_n(x) x^T$. В этом случае для $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{k-l})$ и $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{k-l}, 0, \dots, 0)$

$$\hat{y} b''_n(\hat{x}_n) \hat{y}^T \leq -s(\tilde{y}).$$

В то же время по лемме 1 для неотрицательных целочисленных векторов $r = (r_1, \dots, r_{k-l})$

$$\sup_{|r|=3,4} \sup_{\hat{y} \in \tilde{V}_{\epsilon_n}(x_n)} |C_r^n(\hat{y})| \leq B_4,$$

где B_4 — некоторая постоянная. Следовательно, повторяя с некоторыми небольшими изменениями рассуждения работы [18] (теорема 3.1) и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\varepsilon_n - \frac{h_j(n)}{2n} \right) \rightarrow \infty$$

для $j = 1, \dots, k-l$, получаем оценку

$$\tilde{q}_n(\hat{x}_n) \int_{S(1)} \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y} = \frac{(2\pi)^{(k-l)/2} \tilde{q}_n(\hat{x}_n) \exp\{nb_n(\hat{x}_n)\}}{n^{(k-l)/2} \sqrt{\det(-b''_n(\hat{x}_n))}} (1 + o((n\delta_n^2)^{-\gamma})),$$

где γ — любое положительное число, $b_n(\hat{x}_n) = -\Lambda_n(x_n)$, $-b''_n(\hat{x}_n) = H_n(x_n)$,

$$\tilde{q}_n(\hat{x}_n) = (\det \Lambda''_n(x_n))^{1/2} \prod_{j=k-l+1}^k \frac{\exp\{-\alpha_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}}{1 - \exp\{-h_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}}.$$

Аналогичным образом, оценивая второе слагаемое суммы (15), приходим к тому, что

$$\int_{S(1)} \langle \tilde{q}'_n(\hat{x}_n), \hat{y} - \hat{x}_n \rangle \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y} = \frac{\exp\{nb_n(\hat{x}_n)\}}{n^{(k-l)/2}} \sum_{j=1}^{k-l} \frac{\partial \tilde{q}_n(\hat{x}_n)}{\partial y_j} O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где для $j = 1, \dots, k-l$

$$\left| \frac{\partial \tilde{q}_n(\hat{x}_n)}{\partial y_j} (\tilde{q}_n(\hat{x}_n))^{-1} \right| O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n\delta_n}\right).$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} \int_{S(1)} (\hat{y} - \hat{x}_n) \tilde{q}''_n(\hat{y}_1) (\hat{y} - \hat{x}_n)^T \exp\{nb_n(\hat{y})\} d\hat{y} \\ = \frac{\tilde{q}_n(\hat{x}_n) \exp\{nb_n(\hat{x}_n)\}}{n^{(k-l)/2}} \left(O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right) \right), \end{aligned}$$

то есть в силу ограниченности сверху константами равномерно по n величин δ_n и $\det H_n(x_n)$

$$\begin{aligned} R_{11}(x_n) = \frac{(2\pi)^{(k-l)/2} \exp\{-n\Lambda_n(x_n)\}}{n^{(k-l)/2} \rho_n(x_n)} \\ \times \prod_{j=k-l+1}^k \frac{\exp\{-\alpha_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}}{1 - \exp\{-h_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Остается заметить, что для $(i, j) \neq (1, 1)$

$$R_{ij}(x_n) = R_{11}(x_n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right) \right). \quad (16)$$

Из формул (13), (14) и (16) следует, что

$$\sum_{\hat{x} \in \tilde{V}_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \tilde{X}_n} \int_{K_z} q_n(\hat{y}) \exp\{n\tilde{b}_n(\hat{y}, \hat{x})\} d\hat{y} = R_{11}(x_n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right) \right). \quad (17)$$

В результате в соответствии с формулами (7), (10), (12) и (17) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n/n \in D_{\varepsilon_n}(x_n, I)) \\ = \prod_{j=k-l+1}^k \frac{h_j(n) \exp\{-\alpha_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}}{1 - \exp\{-h_j(n) \lambda_n^j(x_n)\}} \frac{\exp\{-n\Lambda_n(x_n)\}}{(2\pi n)^{l/2} \rho_n(x_n)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n\delta_n^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим $\mathbf{P}(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \cap G \setminus D_{\varepsilon_n}(x_n, I))$. Пусть

$$\tilde{\Omega}_{\tau_n} = \Omega_{\tau_n} \cap G \setminus D_{\varepsilon_n}(x_n, I), \quad \beta_n = \inf_{x \in \Omega_{\tau_n}} \{\Lambda_n(x) - \Lambda_n(x_n)\}.$$

В соответствии с формулой (2), $\det \Lambda_n''(x_n) \leq \delta^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_n/n \in \tilde{\Omega}_{\tau_n}) \\ &= \sum_{x \in \tilde{\Omega}_{\tau_n} \cap X_n} \frac{1}{(2\pi n)^{k/2}} \prod_{j=1}^k h_j(n) (\det \Lambda_n''(x))^{1/2} \exp\{-n\Lambda_n(x)\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{(2\pi n)^{k/2}} \prod_{j=1}^k h_j(n) \delta^{-1/2} \exp\{-n(\Lambda_n(x_n) + \beta_n)\} |\tilde{\Omega}_{\tau_n} \cap X_n| \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$|\tilde{\Omega}_{\tau_n} \cap X_n| \leq |G \cap X_n| = O\left(n^k / \prod_{j=1}^k h_j(n)\right),$$

то есть

$$\mathbf{P}(S_n/n \in \tilde{\Omega}_{\tau_n}) \leq \frac{n^{k/2} \delta^{-1/2}}{(2\pi)^{k/2} \exp\{n\beta_n\}} \exp\{-n\Lambda_n(x_n)\} \left(O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Для $\gamma_1 > 1$ пусть $C_{\gamma_1 \varepsilon_n}(x_n, I)$ — замыкание множества $D_{\gamma_1 \varepsilon_n}(x_n, I) \setminus D_{\varepsilon_n}(x_n, I)$. В силу единственности точки минимума функции $\Lambda_n(x)$ на множестве Ω_{τ_n} для достаточно малого положительного числа ε_n справедливо неравенство $\beta_n > 0$, и существует вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*) \in C_{\gamma_1 \varepsilon_n}(x_n, I)$, для которого

$$\beta_n = \Lambda_n(x^*) - \Lambda_n(x_n).$$

Рассмотрим два возможных случая расположения точки x^* .

Случай 1. Пусть для некоторой константы $c_3 > 0$

$$\sum_{j=k-l+1}^k |x_j^* - x_n^j| \geq c_3 \varepsilon_n.$$

По формуле Тейлора

$$\beta_n = \langle \Lambda_n'(\tilde{w}), x^* - x_n \rangle,$$

где $\tilde{w} \in D_{\gamma_1 \varepsilon_n}(x_n, I)$, и для ε_n , близкого к нулю, знак $\partial \Lambda_n(\tilde{w}) / \partial x_j$ совпадает со знаком $x_j^* - x_n^j$, $j = 1, \dots, k$, то есть

$$\beta_n \geq \sum_{j=k-l+1}^k \frac{\partial \Lambda_n(\tilde{w})}{\partial x_j} (x_j^* - x_n^j).$$

В свою очередь по лемме 1 существует не зависящая от n положительная константа c_4 такая, что

$$\left| \frac{\partial \Lambda_n(\tilde{w})}{\partial x_j} \right| \geq c_4 \delta_n, \quad j = k-l+1, \dots, k,$$

для любого $\tilde{w} \in D_{\gamma_1 \varepsilon_n}(x_n, I)$.

В результате получаем, что $\beta_n \geq c_3 c_4 \beta \delta_n^2$ при $\varepsilon_n = \beta \delta_n$, и в силу условия 2 теоремы

$$n^{(k+l+2)/2} \exp\{-n\beta_n\} = o(1/n).$$

Случай 2. Пусть

$$\sum_{i=k-l+1}^k |x_i^* - x_n^i| < c_3 \varepsilon_n.$$

По формуле Тейлора

$$\beta_n \geq \sum_{i=k-l+1}^k \frac{\partial \Lambda_n(x_n)}{\partial x_i} (x_i^* - x_n^i) + (x^* - x_n) \Lambda_n''(x_n) (x^* - x_n)^T + O(\varepsilon_n^3).$$

Матрица $\Lambda_n''(x_n)$ для любого n положительно определена.

В силу теоремы Фробениуса (см. [5], стр. 362) и леммы 1 для характеристических чисел $\mu_1(n), \dots, \mu_k(n)$ матрицы $\Lambda_n''(x_n)$ справедливы неравенства

$$|\mu_j(n)| \leq k B_2, \quad j = 1, \dots, k.$$

В то же время

$$\det \Lambda_n''(x_n) = \prod_{j=1}^k \mu_j(n) \geq \tilde{\delta}_1 > 0.$$

Следовательно,

$$(x^* - x_n) \Lambda_n''(x_n) (x^* - x_n)^T \geq \frac{\tilde{\delta}_1}{(k B_2)^{k-1}} (x^* - x_n, x^* - x_n) \geq \frac{\tilde{\delta}_1 \beta^2 \delta_n^2}{(k B_2)^{k-1}}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=k-l+1}^k \frac{\partial \Lambda_n(x_n)}{\partial x_i} (x_i^* - x_n^i) > -c_3 c_4 \beta \delta_n^2.$$

Выбирая константу c_3 достаточно малой, получаем, что и в этом случае

$$n^{(k+l+2)/2} \exp\{-n\beta_n\} = o(1/n).$$

Для $j = k - l + 1, \dots, k$ величины

$$\frac{1 - \exp\{-h_j(n)\lambda_n^j(x_n)\}}{h_j(n) \exp\{-\alpha_j(n)\lambda_n^j(x_n)\}}$$

и $\rho_n(x_n)$ равномерно по n ограничены сверху константами, не зависящими от n . Следовательно,

$$\begin{aligned} P(S_n/n \in \tilde{\Omega}_{\tau_n}) &= \frac{\exp\{-n\Lambda_n(x_n)\}}{(2\pi n)^{l/2} \rho_n(x_n)} \\ &\times \prod_{j=k-l+1}^k \frac{h_j(n) \exp\{-\alpha_j(n)\lambda_n^j(x_n)\}}{1 - \exp\{-h_j(n)\lambda_n^j(x_n)\}} o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Остается заметить, что в силу условия 3 теоремы

$$P(S_n/n \in \Omega_{\tau_n} \setminus G) = P(S_n/n \in \tilde{\Omega}_{\tau_n}) (1 + O(1/n)). \quad (20)$$

Из формул (5), (6), (18)–(20) следует справедливость утверждения теоремы 2 для множества $I = \{k-l+1, \dots, k\}$. Для произвольного множества $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ доказательство производится аналогичным образом.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Алешкявичене А. К. Многомерные интегральные предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применения* (1983) **28**, №1, 62–81.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. *Труды ИМСО РАН* (1992) **19**.
3. Боровков А. А., Рагозин Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №1, 61–69.
4. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. *Аппроксимация нормальным распределением и статистические разложения*. Наука, Москва, 1982.
5. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*. Наука, Москва, 1967.
6. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов В. Х. *Математический анализ*. Наука, Москва, 1979.
7. Нагаев А. В., Сакоян С. К. Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения в $\mathbf{R}^k$. *Доклады АН СССР* (1972) **204**, №3, 554–556.
8. Осипов Л. В. Многомерные предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применения* (1975) **20**, №1, 40–57.
9. Осипов Л. В. О вероятностях больших уклонений для сумм независимых случайных векторов. *Теория вероятностей и ее применения* (1978) **23**, №3, 510–526.
10. Петров В. В. О вероятностях больших уклонений для сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №1, 310–322.
11. Рихтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применения* (1957) **2**, №2, 214–229.
12. Рихтер В. Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применения* (1958) **3**, №1, 107–114.
13. Санов И. Н. О вероятностях больших отклонений случайных величин. *Матем. сб.* (1957) **24**, №1, 11–44.
14. Саулис Л. И. Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных векторов. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №3, 482–493.
15. Саулис Л., Статулявичус В. *Предельные теоремы о больших уклонениях*. Мокслас, Вильнюс, 1989.
16. Светулявичене В. К. О вероятностях больших уклонений для сумм случайных векторов. *Лит. матем. сб.* (1981) **21**, №2, 191–199.
17. Von Bahr B. Multidimensional integral limit theorems for large deviations. *Ark. Math.* (1967) **7**, №7, 89–99.
18. Chaganty N. R., Sethuraman J. Multidimensional large deviation local limit theorems. *J. Multivariate Analysis* (1986) **20**, 190–204.
19. Richter W. Mehrdimensionale Grenzwertsätze für große Abweichungen und ihre Anwendung auf die Verteilung von χ^2 . *Теория вероятностей и ее применения* (1964) **9**, №1, 31–42.

Статья поступила 27.01.93.

Переработанный вариант поступил 06.01.95.