Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Еловикова, Свойства решетки всех кратно Ω -канонических формаций, *Дискрет. матем.*, 2006, том 18, выпуск 2, 146–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm54>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:01:33

Свойства решетки всех кратно Ω -канонических формаций

© 2006 г. Ю. А. Еловикова

Исследуются решетки ΩK_n и K_n соответственно всех n -кратно Ω -канонических и n -кратно канонических формаций. Основные результаты работы — доказательства $\mathfrak{G}$ -отделимости решетки ΩK_n и совпадения систем тождеств решеток K_n и K_m при различных целых неотрицательных n и m .

Исследование Ω -расслоенных формаций с различными направлениями началось после опубликования в 1999 году первых работ В. А. Ведерникова и М. М. Сорокиной, посвященных этой теме. Понятие Ω -расслоенной формации позволило ввести в рассмотрение бесконечное множество новых типов формаций, каждый из которых характеризуется определенным направлением φ . Следуя [1], через Ω обозначаем непустой подкласс класса $\mathfrak{Z}$ всех конечных простых групп, а направление формации определяется как отображение φ класса $\mathfrak{Z}$ в множество всех непустых формаций Фиттинга. В частности, в [1, 2] были определены канонические (K -формации) и Ω -канонические (ΩK -формации), имеющие направление $\varphi(A) = \mathfrak{G}_A \mathfrak{G}_A$ при всех $A \in \mathfrak{Z}$.

В монографии [3] методы общей теории решеток [4] успешно применяются при исследовании n -кратно локальных τ -замкнутых формаций, образующих полную решетку I_n^r . Исследуя свойства этой решетки, А. Н. Скиба в [3] доказал совпадение систем тождеств у решеток I_n^r и I_m^r при различных n и m . При этом существенно использовалось свойство $\mathfrak{G}$ -отделимости решетки I_n^r для любого целого неотрицательного n .

Множества ΩK_n и K_n , соответственно, всех n -кратно Ω -канонических и n -кратно канонических формаций также образуют полные решетки формаций [5]. Работы автора [5–7] посвящены разработке специального аппарата для применения методов общей теории решеток при изучении n -кратно Ω -расслоенных и, в частности, ΩK_n -формаций и K_n -формаций. Основные результаты данной работы — доказательства $\mathfrak{G}$ -отделимости решетки ΩK_n и совпадения систем тождеств решеток K_n и K_m при различных целых неотрицательных n и m .

Все группы предполагаются конечными. Через $\mathfrak{G}$ обозначаем класс всех конечных групп. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1–3]. Следуя [1], формацию $\mathfrak{F}$ называем Ω -расслоенной с направлением φ , если

$$\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')\}$$

и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$, где f и φ — некоторые ΩF -функция и FR -функция соответственно. Функцию f называют Ω -спутником формации $\mathfrak{F}$. В част-

ности, если φ — направление Ω -канонической формации, получим Ω -каноническую формацию вида

$$\mathfrak{F} = \Omega K F(f) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega'))$$

и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$.

Пусть θ — полная решетка формаций. Будем называть Ω -формационную функцию θ -значной или, коротко, $\Omega\theta$ -функцией, если все ее значения принадлежат θ . Через $\Omega F^{\varphi}\theta$ обозначим множество всех Ω -расслоенных формаций с направлением φ , обладающих хотя бы одним $\Omega\theta$ -спутником (в этом случае для Ω -канонических формаций используем обозначение $\Omega K\theta$). Положим также $\Omega F\theta(\mathfrak{X}, \varphi) = \Omega F^{\varphi}\theta \text{ form}(\mathfrak{X})$ и, в сокращенном виде, $\Omega K\theta F(\mathfrak{X})$, если φ — направление Ω -канонической формации.

Множество всех Ω -расслоенных формаций с направлением φ обозначим через ΩF^{φ} (ΩK — для множества всех Ω -канонических формаций). Как показано в [5], ΩF^{φ} образует полную решетку формаций. Всякую формацию считают 0-кратно ΩF^{φ} -формацией. Формацию $\mathfrak{F}$ называют n -кратно ΩF^{φ} -формацией для некоторого натурального n , если она обладает Ω -спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно ΩF^{φ} -формациями. Обозначим ΩF_n^{φ} множество всех n -кратно Ω -расслоенных формаций с направлением φ . Если $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп, то $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) = \Omega F_n^{\varphi} \text{ form}(\mathfrak{X})$ — пересечение всех формаций из ΩF_n^{φ} , содержащих $\mathfrak{X}$. Аналогично для Ω -канонических формаций используются обозначения ΩK_n , $\Omega K_n F(\mathfrak{X})$.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$ -отделимой [3], если для любого терма $\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\theta}\}$, любых θ -формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \omega(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$ -группы $A_1, A_2, \dots, A_m$, что $A \in \omega(\theta \text{ form } A_1, \theta \text{ form } A_2, \dots, \theta \text{ form } A_m)$.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega K_n F(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, $n \geq 1$. Если f — минимальный ΩK_{n-1} -значный спутник $\mathfrak{F}$, то для любого ΩK_{n-1} -значного спутника h формации $\mathfrak{F}$

$$f(A) = \Omega K_{n-1} F(B \mid B \in \mathfrak{F} \cap h(A), O_A(B) = 1)$$

для всех $A \in K(\mathfrak{X}) \cap \Omega$.

Доказательство. Пусть

$$f_1(A) = \Omega K_{n-1} F(B \mid B \in \mathfrak{F} \cap h(A), O_A(B) = 1),$$

где $A \in K(\mathfrak{X}) \cap \Omega$. По следствию 1 из [5]

$$f(A) = \Omega K_{n-1} F(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$. Поскольку $f(A) \subseteq h(A)$, $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и $O_A(G/O_{A',A}(G)) = 1$ для всех $G \in \mathfrak{X}$, то $(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A)$ и $f(A) \subseteq f_1(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$.

Пусть теперь $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$, $B \in \mathfrak{F} \cap h(A)$ и $O_A(B) = 1$. Покажем, что $B \in f(A)$. Рассмотрим регулярное сплетение $G = A \wr B = [K]B$, $K = A \times \dots \times A$. По свойствам сплетения из равенства $O_{A'}(G) \cap K = 1$ следует, что $O_{A'}(G) = 1$ и $O_{A',A}(G) = O_A(G)$. Ясно, что $K \subseteq O_A(G)$. Так как $O_A(G) \cap B \in \mathfrak{G}_A$, то $O_A(G) \cap B \subseteq O_A(B) = 1$ и $O_A(G) \cap B = 1$. Следовательно, $O_A(G) = O_{A',A}(G) = K$ и $G/O_{A',A}(G) \cong B$.

С другой стороны, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/O_{A',A}(G) = G/O_A(G) \in h(A)$. Тогда, по лемме 2 из [2], $G \in \Omega K F(h) = \mathfrak{F}$. Отсюда $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$, то есть $B \in f(A)$. Следовательно, $(B \mid B \in \mathfrak{F} \cap h(A), O_A(B) = 1) \subseteq f(A)$ и $f_1(A) \subseteq f(A)$. Таким образом, $f_1(A) = f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть

$$\mathfrak{F} = \Omega KF(f), \quad G^{\mathfrak{F}} \neq 1, \quad G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega').$$

Тогда существует группа $B \in K(G^{\mathfrak{F}}) \cap \Omega$ такая, что $G/O_{B',B}(G) \notin f(B)$.

Доказательство. Поскольку $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, существует группа $B \in \Omega \cap K(G)$ такая, что $G/O_{B',B}(G) \notin f(B)$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, учитывая включение $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{G}_{C'}$, получаем, что для всех $C \in (K(G) \setminus K(G^{\mathfrak{F}})) \cap \Omega$

$$(G/G^{\mathfrak{F}})/O_{C',C}(G/G^{\mathfrak{F}}) = (G/G^{\mathfrak{F}})/(O_{C',C}(G)/G^{\mathfrak{F}}) \cong G/O_{C',C}(G) \in f(C).$$

Значит, $B \in K(G^{\mathfrak{F}})$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если f — внутренний Ω -спутник ΩK -формации $\mathfrak{F}$, $G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_B(G) \in f(B)$ для некоторого $B \in \Omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Так как $G/O_B(G) \in f(B) \subseteq \mathfrak{F}$, справедливы соотношения

$$G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_B(G), \quad K(G^{\mathfrak{F}}) = (B) \subseteq \Omega.$$

В силу леммы 2 из соотношения

$$G/O_{B',B}(G) \cong (G/O_B(G))/(O_{B',B}(G)/O_B(G)) \in f(B)$$

следует, что $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть G — группа с $O_B(G) = 1$ для некоторой простой группы B и

$$\text{Soc}(G) = N_1 \times \dots \times N_t, \quad t \geq 1.$$

Если M_i — наибольшая содержащая $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t$, но не содержащая N_i , $i = 1, \dots, t$, нормальная в G подгруппа, то

$$(1) \quad G/M_i \text{ монолитична, ее монолит } N_i M_i / M_i \text{ } G\text{-изоморфен } N_i \text{ и } O_B(G/M_i) = 1,$$

$$(2) \quad M_1 \cap \dots \cap M_t = 1.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть G/M_i не монолитична и $T/M_i \triangleleft G/M_i$, $N_i M_i / M_i \triangleleft G/M_i$. Тогда

$$N_i \not\subseteq T, \quad N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t \subseteq M_i \subseteq T.$$

Но в этом случае, по определению M_i , $T \subseteq M_i$ и $T = M_i$. Отсюда следует, что G/M_i — монолитическая группа с монолитом $N_i M_i / M_i$. Так как $M_i \cap N_i = 1$, справедливо соотношение

$$N_i M_i / M_i \cong N_i / N_i \cap M_i = N_i.$$

Пусть $L/M_i = O_B(G/M_i) \neq 1$. Тогда монолит $N_i M_i / M_i \triangleleft L/M_i$ и $N_i M_i / M_i \cong N_i$ — B -группа, откуда $N_i \subseteq O_B(G) = 1$, $N_i = 1$ и монолит $N_i M_i / M_i = 1$, что невозможно.

Докажем второе утверждение леммы. Предположим, что $M_1 \cap \dots \cap M_t = K$ и R — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $R \subseteq K$. Тогда $R \neq N_i$, $i = 1, 2, \dots, t$. Несложно показать, что

$$\bigcap_{i=1}^t N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t = 1.$$

Значит, существует $s \in \{1, 2, \dots, t\}$ такое, что

$$R \not\subseteq Q = N_1 \times \dots \times N_{s-1} \times N_{s+1} \times \dots \times N_t.$$

Понятно, что $RQ \subseteq M_s$. Покажем, что тогда $N_s \subseteq M_s$. Поскольку $RQ \subseteq \text{Soc}(G)$, но $RQ \not\subseteq Q$, существует элемент $r = n_1 \dots n_{s-1} n_s n_{s+1} \dots n_t \in RQ$ такой, что $n_i \in N_i$, $i = 1, 2, \dots, t$, $n_s \neq 1$. Для элемента $q = n_1^{-1} \dots n_{s-1}^{-1} n_{s+1}^{-1} \dots n_t^{-1} \in Q$ справедливо соотношение $1 \neq n_s = rq \in RQ \cap N_s$. Так что,

$$RQ \cap N_s \neq 1, \quad N_s \subseteq RQ \cap N_s.$$

Получаем включения

$$N_s \subseteq RQ \subseteq M_s,$$

что невозможно по определению M_s . Полученное противоречие показывает, что $K = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть f — внутренний Ω -спутник Ω -канонической формации $\mathfrak{F}$, R — монолит группы A и $K(R) = (B) \in \Omega$. Если $A/O_{B',B}(A) \in f(B)$ и $A/O_\Omega(A) \in f(\Omega')$, то $A \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Ясно, что

$$R \subseteq O_{B',B}(A) = O_B(A), \quad A/O_B(A) \in f(B) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Так как $A/O_B(A) \in \mathfrak{F}$ и $C \in K(A/O_B(A))$, для всех $C \in \Omega \cap K(A)$, $C \not\cong B$,

$$\begin{aligned} A/O_{C',C}(A) &\cong (A/O_B(A))/(O_{C',C}(A)/O_B(A)) \\ &= (A/O_B(A))/O_{C',C}(A/O_B(A)) \in f(C). \end{aligned}$$

С учетом условия леммы $A/O_{C',C}(A) \in f(C)$ для любых $C \in \Omega \cap K(A)$. Кроме того, вновь по условию леммы $A/O_\Omega(A) \in f(\Omega')$ и по определению ΩK -формации $A \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $\mathfrak{M}$ — полуформация и $A \in \Omega K_n F(\mathfrak{M})$. Если $O_B(A) = 1$ для некоторого $B \in \Omega$, то $A \in \Omega K_n F(\mathfrak{M}_1)$, где

$$\mathfrak{M}_1 = (G/O_B(G) \mid G \in \mathfrak{M}).$$

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{M}$, то $A \cong A/O_B(A) \in \mathfrak{M}_1$. Поэтому далее считаем, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Пусть A — монолитическая группа с монолитом R .

При $n = 0$ получаем, что $A \in \Omega K_0 F(\mathfrak{M}) = \text{form } \mathfrak{M}$. По следствию 1.2.26 из [3] в $\text{form } \mathfrak{M}$ существует группа H с $2t+2$, $t \geq 2$, нормальными подгруппами $N, M, N_1, \dots, N_t$,

$M_1, \dots, M_t$ такими, что $H/N \cong A$, $M/N = \text{Soc}(H/N)$, $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$ и H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$ -группа с монолитом M_i/N_i , который H -изоморфен M/N , $i = 1, \dots, t$.

Из равенства $O_B(A) = 1$ следует, что $O_B(H/N_i) = 1$. В противном случае монолит M_i/N_i группы H/N_i является B -группой и $M_i/N_i \subseteq O_B(H/N_i)$, откуда

$$M_i/N_i \cong M/N = \text{Soc}(H/N) \cong \text{Soc}(A) \in \mathfrak{G}_B,$$

что противоречит условию $O_B(A) = 1$. Значит, из включения $H/N_i \in \mathfrak{M}$ следует, что $(H/N_i)/O_B(H/N_i) \in \mathfrak{M}_1$ и $A \in \text{HR}_0\{H/N_1, \dots, H/N_t\} \subseteq \text{form } \mathfrak{M}_1$.

Пусть теперь $n > 0$ и $K(R) = (C)$. Ясно, что $C \not\cong B$. В случае $C \in \Omega$ для любой группы G выполняется соотношение

$$G/O_{C',C}(G) \cong (G/O_B(G))/(O_{C',C}(G)/O_B(G)) = (G/O_B(G))/O_{C',C}(G/O_B(G)).$$

Если f и h — минимальные ΩK_{n-1} -значные спутники $\mathfrak{F} = \Omega K_n F(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{H} = \Omega K_n(\mathfrak{M}_1)$ соответственно, то

$$\begin{aligned} f(C) &= \Omega K_{n-1} F(G/O_{C',C}(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \\ &= \Omega K_{n-1} F(G/O_{C',C}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_1) = h(C). \end{aligned}$$

Также с учетом включения $B \in \Omega$ находим, что

$$G/O_\Omega(G) \cong (G/O_B(G))/(O_\Omega(G)/O_B(G)) = (G/O_B(G))/O_\Omega(G/O_B(G))$$

и

$$\begin{aligned} f(\Omega') &= \Omega K_{n-1} F(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \\ &= \Omega K_{n-1} F(G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}_1) = h(\Omega'). \end{aligned}$$

Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, для $C \in \Omega \cap K(A)$ получаем, что $A/O_{C',C}(A) \in f(C) = h(C)$, $A/O_\Omega(A) \in f(\Omega') = h(\Omega')$ и по лемме 3 $A \in \mathfrak{H}$.

В случае $C \notin \Omega$ из $A \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$A \cong A/O_\Omega(A) \in f(\Omega') = h(\Omega') \subseteq \mathfrak{H}.$$

Рассмотрим случай

$$\text{Soc}(A) = N_1 \times \dots \times N_t, \quad t > 1.$$

Пусть M_i — наибольшая в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t$, но не содержащая N_i , $i = 1, \dots, t$. Тогда по лемме 4 $A \in R_0(A/M_1, \dots, A/M_t)$, где A/M_i — монолитическая группа с $O_B(A/M_i) = 1$, $i = 1, \dots, t$. Зная также, что $A/M_i \in \Omega K_n F(\mathfrak{M})$, по доказанному выше, можно сделать вывод, что $A/M_i \in \Omega K_n F(\mathfrak{M}_1)$, $i = 1, \dots, t$. Таким образом, $A \in R_0(A/M_1, \dots, A/M_t) \subseteq \Omega K_n F(\mathfrak{M}_1)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Для любого целого неотрицательного n решетка ΩK_n всех n -кратно Ω -ка-
нонических формаций $\mathfrak{G}$ -отделима.

Доказательство. Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ принадлежат ΩK_n и $A \in \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$ в терм ω покажем, что существуют такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$, что $A \in \omega(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_m)$, где $\mathfrak{M}_i = \Omega K_n F(A_i)$, $i = 1, \dots, m$.

При $r = 0$ очевидно, что если $A \in \mathfrak{F}$, то $A \in \Omega K_n F(A)$.

Пусть $r = 1$, то есть $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ или $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega K_n} \mathfrak{F}_2$. В случае $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ справедливо включение $A \in \Omega K_n F(A) \cap \Omega K_n F(A)$. В случае $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega K_n} \mathfrak{F}_2$ для доказательства применим индукцию по n .

Предположим, что $n = 0$, тогда

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega K_0} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = HR_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Значит, $A \cong S/N$, $S \in R_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$, откуда заключаем, что $S^{\mathfrak{F}_1} \cap S^{\mathfrak{F}_2} = 1$ и $S \in R_0(S/S^{\mathfrak{F}_1}, S/S^{\mathfrak{F}_2})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} A \in \text{form}(S/S^{\mathfrak{F}_1}, S/S^{\mathfrak{F}_2}) &= \text{form}(S/S^{\mathfrak{F}_1}) \vee \text{form}(S/S^{\mathfrak{F}_2}) \\ &= \text{form}(S/S^{\mathfrak{F}_1}) \vee_{\Omega K_0} \text{form}(S/S^{\mathfrak{F}_2}). \end{aligned}$$

Пусть $n > 0$ и утверждение теоремы выполняется для любых натуральных чисел, меньших n и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega K_n} \mathfrak{F}_2$. Тогда, поскольку по лемме 12 из [5] решетка ΩK_n является ΩK -индуктивной, $A/O_{B'_i, B_i}(A) \in f_1(B_i) \vee_{\Omega K_{n-1}} f_2(B_i)$, $i = 1, \dots, t$, для всех $B_i \in K(A) \cap \Omega = (B_1, \dots, B_t)$, где f_1 и f_2 – внутренние Ω -спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно, а также $A/O_\Omega(A) \in f_1(\Omega') \vee_{\Omega K_{n-1}} f_2(\Omega')$. В силу леммы 4 из [1] без потери общности можем считать, что $f_i(\Omega') = \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. По предположению индукции существуют группы $K_i \in f_1(B_i)$ и $L_i \in f_2(B_i)$ такие, что

$$\begin{aligned} A/O_{B'_i, B_i}(A) &\in (\Omega K_{n-1} F(K_i)) \vee_{\Omega K_{n-1}} (\Omega K_{n-1} F(L_i)) \\ &= \Omega K_{n-1} F(K_i, L_i), \quad i = 1, \dots, t, \end{aligned}$$

и группы $P \in f_1(\Omega')$, $Q \in f_2(\Omega')$ такие, что $A/O_\Omega(A) \in \Omega K_{n-1} F(P, Q)$. Пусть $\mathfrak{R}_i$ и $\mathfrak{L}_i$ – полуформации, порожденные группами K_i и L_i соответственно, $i = 1, \dots, t$, тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i &= (K_i^{(1)}, K_i^{(2)}, \dots, K_i^{(r)}), & \mathfrak{L}_i &= (L_i^{(1)}, L_i^{(2)}, \dots, L_i^{(s)}), \\ \Omega K_{n-1} F(K_i) &= \Omega K_{n-1} F(\mathfrak{R}_i), & \Omega K_{n-1} F(L_i) &= \Omega K_{n-1} F(\mathfrak{L}_i). \end{aligned}$$

Значит,

$$A/O_{B'_i, B_i}(A) \in \Omega K_{n-1} F(K_i, L_i) = \Omega K_{n-1} F(\mathfrak{R}_i \cup \mathfrak{L}_i).$$

По лемме 6, так как

$$O_{B_i}(A/O_{B'_i, B_i}(A)) = 1,$$

можем считать, что

$$O_{B_i}(K_i^{(l)}) = O_{B_i}(L_i^{(m)}) = 1, \quad l = 1, \dots, r, \quad m = 1, \dots, s.$$

Пусть

$$\begin{aligned} D_i &= K_i^{(1)} \times K_i^{(2)} \times \dots \times K_i^{(r)}, \\ R_i &= L_i^{(1)} \times L_i^{(2)} \times \dots \times L_i^{(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку класс $\mathfrak{G}_{B_i}$ — формация Фиттинга, согласно утверждению 1.25 гл. 10 в [8] $\mathfrak{G}_{B_i}$ есть класс Локетта и

$$O_{B_i}(D_i) = O_{B_i}(K_i^{(1)}) \times \dots \times O_{B_i}(K_i^{(r)}) = 1,$$

аналогично,

$$O_{B_i}(R_i) = 1.$$

Кроме того, ясно, что

$$A/O_{B'_i, B_i}(A) \in \Omega K_{n-1} F(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{L}_i) = \Omega K_{n-1} f(D_i, R_i).$$

Рассмотрим регулярные сплетения

$$M_i = B_i \wr D_i, \quad N_i = B_i \wr R_i, \quad i = 1, \dots, t.$$

Отметим, что

$$O_{B_i}(M_i) = B_i \times \dots \times B_i$$

— база сплетения. В противном случае $1 \neq H = O_{B_i}(M_i) \cap D_i \triangleleft D_i$ и H — B_i -группа, откуда $1 \neq H \subseteq O_{B_i}(D_i) = 1$, что невозможно. Таким образом,

$$M_i/O_{B_i}(M_i) \cong D_i \in R_0 H(K_i) \subseteq f_1(B_i)$$

и, поскольку $B_i \in \Omega$,

$$M_i/O_{\Omega}(M_i) \cong (M_i/O_{B_i}(M_i))/(O_{\Omega}(M_i)/O_{B_i}(M_i)) \in f_1(B_i) \subseteq \mathfrak{F}_1 = f_1(\Omega').$$

Значит, по лемме 3 $M_i \in \mathfrak{F}_1, i = 1, \dots, t$. Аналогично, $N_i \in \mathfrak{F}_2, i = 1, \dots, t$. Тогда

$$A_1 = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_t \times P \in \mathfrak{F}_1,$$

$$A_2 = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t \times Q \in \mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (\Omega K_n F(A_1)) \vee_{\Omega K_n} (\Omega K_n F(A_2)).$$

Ясно, что $M_i \in \mathfrak{F}$, откуда $M_i/O_{B'_i, B_i}(M_i) \in f(B_i)$, где f — внутренний Ω -спутник $\mathfrak{F}$, для которого, согласно лемме 4 из [1], положим $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Предположим, что $1 \neq O_{B'_i}(M_i) \triangleleft M_i$, тогда $O_{B'_i}(M_i)$ имеет нетривиальное пересечение с базой M_i , которая является B_i -группой, получаем противоречие. Следовательно, $O_{B'_i}(M_i) = 1$ и $O_{B'_i, B_i}(M_i) = O_{B_i}(M_i)$ совпадает с базой сплетения M_i , откуда $M_i/O_{B'_i, B_i}(M_i) \cong D_i$, то есть $D_i \in f(B_i), i = 1, \dots, t$. Аналогично получаем, что $R_i \in f(B_i), i = 1, \dots, t$. Тогда $A/O_{B'_i, B_i}(A) \in \Omega K_{n-1} F(D_i, R_i) \subseteq f(B_i)$ для любых $B_i \in K(A) \cap \Omega$. Группы P и Q , как гомоморфные образы A_1 и A_2 соответственно, принадлежат $\mathfrak{F}$. Следовательно,

$$A/O_{\Omega}(A) \in \Omega K_{n-1} F(P, Q) \subseteq \mathfrak{F} = f(\Omega').$$

Из доказанного выше вытекает, что

$$A \in \mathfrak{F} = (\Omega K_n F(A_1)) \vee_{\Omega K_n} (\Omega K_n F(A_2))$$

и при $r = 1$ утверждение леммы выполняется для натурального числа n .

Пусть теперь $r > 1$, то есть в терм ω входят $r > 1$ символов из $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$ и для термов с меньшим числом вхождений утверждение теоремы выполняется. Пусть ω имеет вид $\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b})$, где $\Delta \in \{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$, $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ формации $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$ и $\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Тогда, по предположению индукции, существуют такие группы $A_1 \in \mathfrak{R}_1$, $A_2 \in \mathfrak{R}_2$, что $A \in \Omega K_n F(A_1) \Delta \Omega K_n F(A_2)$. С другой стороны, согласно индукционному предположению, найдутся группы $B_1, \dots, B_a, C_1, \dots, C_b$ такие, что $B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$, $k = 1, \dots, a$, $C_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, $s = 1, \dots, b$, и $A_1 \in \omega_1(\Omega K_n F(B_1), \dots, \Omega K_n F(B_a))$, $A_2 \in \omega_2(\Omega K_n F(C_1), \dots, \Omega K_n F(C_b))$.

Пусть из множества $x_{i_1}, \dots, x_{i_a}$ переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ не входят в слово ω_2 , а все переменные $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}$ входят в ω_2 . Рассмотрим группы $D_{i_k} = B_k$ при $k \leq t$, $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где q такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$, при $k > t$. Положим также $D_{j_s} = C_s$, если $x_{j_s} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Введем обозначения

$$\mathfrak{M}_p = \Omega K_n F(D_{i_p}), \quad \mathfrak{L}_c = \Omega K_n F(D_{j_c}), \quad p = 1, \dots, a, \quad c = 1, \dots, b.$$

Понятно, что

$$A_1 \in \omega_1(\Omega K_n F(B_1), \dots, \Omega K_n F(B_a)) \subseteq \omega_1(\Omega K_n F(D_{i_1}), \dots, \Omega K_n F(D_{i_a})).$$

Последнее включение несложно доказать индукцией по числу s вхождений символов из $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$ в терм ω_1 . Действительно, при $s = 1$ справедливо включение

$$\Omega K_n F(B_k) \cap \Omega K_n F(B_l) \subseteq \mathfrak{M}_k \cap \mathfrak{M}_l,$$

или

$$\Omega K_n F(B_k) \vee_{\Omega K_n} \Omega K_n F(B_l) \subseteq \mathfrak{M}_k \vee_{\Omega K_n} \mathfrak{M}_l.$$

При $s > 1$ предположим, что включение выполняется для всех натуральных чисел, меньших s . Теперь, если терм ω_1 имеет s вхождений символов, он имеет вид $\omega_{11} \Delta \omega_{12}$, $\Delta \in \{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$, причем в термы ω_{11} и ω_{12} входит меньше, чем s символов из $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$. Применяя предположение индукции, получим, что

$$\begin{aligned} \omega_1(\Omega K_n F(B_{k_1}), \dots, \Omega K_n F(B_{k_v})) &= (\omega_{11} \Delta \omega_{12})(\Omega K_n F(B_{k_1}), \dots, \Omega K_n F(B_{k_v})) \\ &\subseteq (\omega_{11} \Delta \omega_{12})(\mathfrak{M}_{k_1}, \dots, \mathfrak{M}_{k_v}) = \omega_1(\mathfrak{M}_{k_1}, \dots, \mathfrak{M}_{k_v}). \end{aligned}$$

Итак, $A_1 \in \omega_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a)$. Аналогично можно показать, что $A_2 \in \omega_2(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_b)$. Отсюда следует, что

$$A \in \Omega K_n F(A_1) \Delta \Omega K_n F(A_2) \subseteq \omega_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a) \Delta \omega_2(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_b).$$

Выберем формации $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ так, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{i_p} &= \mathfrak{M}_p = \Omega K_n F(D_{i_p}), & p &= 1, \dots, a; \\ \mathfrak{F}_{j_c} &= \mathfrak{L}_c = \Omega K_n F(D_{j_c}), & c &= 1, \dots, b, \end{aligned}$$

тогда

$$A \in \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \Delta \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m),$$

причем $D_{i_p} \in \mathfrak{F}_{i_p}$, $D_{j_c} \in \mathfrak{F}_{j_c}$, что и завершает доказательство теоремы.

Далее будет рассматриваться множество всех n -кратно канонических формаций, образующее полную решетку K_n . В случае, когда класс простых групп Ω в определении Ω -расслоенной формации совпадает с классом $\mathfrak{Z}$ всех простых групп, используются следующие определения и обозначения [1]: функцию

$$f: \mathfrak{Z} \rightarrow (\text{формации конечных групп}),$$

принимаящую одинаковые значения на изоморфных группах из $\mathfrak{Z}$, называют формационной функцией или, коротко, F -функцией; формация

$$\mathfrak{F} = KF(f) = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется канонической формацией (K -формацией), а f — ее спутником. Через $K\theta$ будем обозначать множество всех канонических формаций, обладающих хотя бы одним θ -значным спутником. Для произвольного класса групп $\mathfrak{X}$ через $K\theta F(\mathfrak{X})$ и $K_n F(\mathfrak{X})$ обозначим формации $K\theta \text{ form}(\mathfrak{X})$ и $K_n \text{ form}(\mathfrak{X})$ соответственно.

Если $\Sigma \subseteq \mathfrak{Z}$ — произвольная совокупность простых групп, используем в дальнейшем обозначение

$$\mathfrak{D}_\Sigma = \bigoplus_{A \in \Sigma} \mathfrak{G}_A.$$

Через $K_n|_{\mathfrak{F}}$ обозначим решетку всех K_n -подформаций n -кратно канонической формации $\mathfrak{F}$.

Для терма ω сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega F_\varphi \theta}\}$ будем обозначать через $\bar{\omega}$ терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, получаемый из ω заменой каждого вхождения символа $\vee_{\Omega F_\varphi \theta}$ на $\vee_\theta$. В частности, для терма ω сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$ через $\bar{\omega}$ обозначим терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega K_{n-1}}\}$, получаемый из ω заменой каждого вхождения символа $\vee_{\Omega K_n}$ на символ $\vee_{\Omega K_{n-1}}$.

Лемма 7. Пусть θ — Ω_φ -индуктивная решетка формаций, $\omega(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega F_\varphi \theta}\}$, f_i — внутренний θ -значный спутник Ω -расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = \Omega F(\bar{\omega}(f_1, \dots, f_m), \varphi).$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу r вхождений в терм ω символов из $\{\cap, \vee_{\Omega F_\varphi \theta}\}$. При $r = 0$ лемма, очевидно, верна. Пусть лемма верна для всех натуральных чисел, меньших r , и в терм ω входят r символов операций.

Рассмотрим

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}), \quad \Delta \in \{\cap, \vee_{\Omega F_\varphi \theta}\},$$

и $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$. По предположению индукции, для термов ω_1 и ω_2 лемма верна. Тогда

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \Omega F(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}), \varphi),$$

$$\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \Omega F(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b}), \varphi).$$

Ясно, что оба спутника $\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и $\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})$ — внутренние спутники соответствующих формаций, значит, по определению Ω_φ -индуктивной решетки θ ,

$$\begin{aligned} \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) &= \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \Delta \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) \\ &= \Omega F(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) \bar{\Delta} \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b}), \varphi) \\ &= \Omega F(\bar{\omega}(f_1, \dots, f_m), \varphi), \end{aligned}$$

где $\bar{\Delta} = \vee_{\theta}$, если $\Delta = \vee_{\Omega F_{\theta}}$. В случае, когда $\Delta = \cap$, справедливо равенство $\bar{\Delta} = \cap$, и утверждение леммы также очевидно.

Лемма доказана.

Следующая лемма вытекает из леммы 12 в [5] и леммы 7.

Лемма 8. Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\Omega K_n}\}$, f_i — внутренний ΩK_{n-1} -значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = \Omega K F(\bar{\omega}(f_1, \dots, f_m)).$$

Теорема 2. Пусть Σ — некоторое бесконечное множество простых групп, $\mathfrak{F} \in K_n$. Тогда при любом натуральном n решетки $K_n|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}}$ и $K_{n-1}|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F}}$ порождают одно и то же многообразие решеток.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой простой группы $A \in \mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{G}_A$ является n -кратно канонической формацией со спутником f таким, что $f(A) = \mathfrak{G}_A$ и $f(B) = \emptyset$ для всех $A \in \mathfrak{F} \setminus (A)$. Согласно теореме 1 из [6], $\mathfrak{D}_{\Sigma}$ также является n -кратно канонической формацией. По следствию 3 из [5], из включений $\mathfrak{F} \in K_n$ и $\mathfrak{D}_{\Sigma} \in K_n$ для любой простой группы $A \in \Sigma$ следует, что $(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F} \in K_n$ для любого натурального n .

Рассмотрим некоторое тождество

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \quad (1)$$

сигнатуры $\{\cap, \vee_{K_n}\}$. Предположим, что тождество (1) выполняется в решетке $K_n|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}}$. Покажем, что в этом случае в решетке $K_{n-1}|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F}}$ выполняется тождество

$$\bar{\omega}_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \bar{\omega}_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}). \quad (2)$$

Ввиду леммы 4.2.4 из [3] для этого достаточно показать, что для произвольных однопорожденных формаций $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ из $K_{n-1}|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F}}$ справедливо равенство

$$\bar{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}). \quad (3)$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_c} = K_{n-1} F(A_{i_c}), \quad \mathfrak{F}_{j_d} = K_{n-1} F(A_{j_d}), \quad c = 1, \dots, a, \quad d = 1, \dots, b.$$

Выберем группу $P \in \Sigma$ такую, что $P \notin K(A_{i_1}, \dots, A_{i_a}, A_{j_1}, \dots, A_{j_b})$; пусть $B_{i_c} = P \wr A_{i_c}$, $B_{j_d} = P \wr A_{j_d}$.

Покажем, что формации

$$\mathfrak{M}_{i_c} = K_n F(B_{i_c}), \quad \mathfrak{M}_{j_d} = K_n F(B_{j_d})$$

принадлежат решетке $K_n|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}}$. Действительно, $A_{i_c} \in \mathfrak{F}_{i_c} \in K_{n-1}|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F}}$, отсюда следует, что $A_{i_c} \in \mathfrak{F}_{i_c} \subseteq (\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F}$. В то же время

$$B_{i_c} = (P \times P \times \dots \times P) \lambda A_{i_c} \in \mathfrak{D}_{\Sigma} (\mathfrak{D}_{\Sigma})^{n-1} \mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F},$$

значит, $K_n F(B_{i_c}) \subseteq (\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_{i_c} \in K_n|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}}$, $c = 1, \dots, a$. Аналогично, $\mathfrak{M}_{j_d} \in K_n|_{(\mathfrak{D}_{\Sigma})^n \mathfrak{F}}$, $d = 1, \dots, b$. Таким образом,

$$\mathfrak{M} = \omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) = \mathfrak{G}.$$

Пусть f_{ic} — минимальный K_{n-1} -значный спутник $\mathfrak{M}_{ic}$, $c = 1, \dots, a$, f_{jd} — минимальный K_{n-1} -значный спутник $\mathfrak{M}_{jd}$, $d = 1, \dots, b$. Тогда по лемме 8

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) &= KF(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \\ \omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) &= KF(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).\end{aligned}$$

Рассмотрим минимальные K_{n-1} -значные спутники m и h формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{S}$ соответственно. Покажем, что

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(P) = m(P).$$

Рассмотрим спутник $s = \bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и проведем индукцию по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_{K_{n-1}}\}$ в терм $\bar{\omega}_1$. При $r = 1$ в случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k \vee_{K_n} \mathfrak{M}_t$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}s(P) &= (f_k \vee_{K_{n-1}} f_t)(P) \\ &= [K_{n-1}F(G/O_{P',P}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_k)] \vee_{K_{n-1}} [K_{n-1}F(G/O_{P',P}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_t)] \\ &\subseteq K_{n-1}F(G/O_{P',P}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_k \cup \mathfrak{M}_t) = m(P)\end{aligned}$$

и, в силу минимальности m ,

$$s(P) = m(P).$$

В случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k \cap \mathfrak{M}_t$, поскольку $s = f_k \cap f_t$ — внутренний спутник $\mathfrak{M}$, по лемме 1

$$\begin{aligned}m(P) &= K_{n-1}F(H \mid H \in f_k(P) \cap f_t(P) \cap \mathfrak{M}_k \cap \mathfrak{M}_t, O_P(H) = 1) \\ &= K_{n-1}F(H \mid H \in f_k(P) \cap f_t(P), O_P(H) = 1).\end{aligned}$$

Так как

$$H \in f_k(P) = K_{n-1}F(B_k/O_{P',P}(B_k)) = K_{n-1}F(A_k) \subseteq \mathfrak{G}_{P'},$$

справедливы соотношения

$$O_P(H) = 1, \quad m(P) = K_{n-1}F(f_k(P) \cap f_t(P)) = f_k(P) \cap f_t(P) = s(P).$$

Пусть утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших r , и $\bar{\omega}_1$ имеет r вхождений символов из $\{\cap, \vee_{K_{n-1}}\}$. Тогда

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) = \bar{\omega}'_1(f_{k_1}, \dots, f_{k_p}) \bar{\Delta} \bar{\omega}''_1(f_{t_1}, \dots, f_{t_q}),$$

где $\bar{\Delta} \in \{\cap, \vee_{K_{n-1}}\}$ и $\{f_{k_1}, \dots, f_{k_p}\} \cup \{f_{t_1}, \dots, f_{t_q}\} = \{f_{i_1}, \dots, f_{i_a}\}$. По предположению индукции, значения $\bar{\omega}'_1(f_{k_1}, \dots, f_{k_p})$ и минимального K_{n-1} -значного спутника формации $\omega'_1(\mathfrak{M}_{k_1}, \dots, \mathfrak{M}_{k_p})$ на P совпадают. То же можно сказать о значениях на P спутника $\bar{\omega}''_1(f_{t_1}, \dots, f_{t_q})$ и минимального K_{n-1} -значного спутника формации $\omega''_1(\mathfrak{M}_{t_1}, \dots, \mathfrak{M}_{t_q})$. Так как для $r = 1$ утверждение справедливо, совпадают и значения на P спутника $\bar{\omega}'_1(f_{k_1}, \dots, f_{k_p}) \bar{\Delta} \bar{\omega}''_1(f_{t_1}, \dots, f_{t_q}) = \bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$, и минимального K_{n-1} -значного спутника m формации

$$\omega'_1(\mathfrak{M}_{k_1}, \dots, \mathfrak{M}_{k_p}) \Delta \omega''_1(\mathfrak{M}_{t_1}, \dots, \mathfrak{M}_{t_q}) = \omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = m.$$

Аналогично можно показать, что

$$\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(P) = h(P).$$

Итак, поскольку $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}$, справедливо равенство

$$m(P) = h(P)$$

и

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(P) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(P).$$

В то же время

$$f_{i_c}(P) = K_{n-1}F(B_{i_c}/O_{P',P}(B_{i_c})) = K_{n-1}F(A_{i_c}) = \mathfrak{F}_{i_c}, \quad c = 1, \dots, a,$$

аналогично,

$$f_{j_d}(P) = \mathfrak{F}_{j_d}, \quad d = 1, \dots, b.$$

Таким образом,

$$\bar{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

то есть тождество (2) выполняется для произвольных однопорожжденных формаций $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ из решетки $K_{n-1}|(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}$.

Предположим, что тождество (2) истинно в решетке $K_{n-1}|(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные формации из $K_n|(\mathfrak{D}_\Sigma)^n\mathfrak{F}$, f_{i_c} — минимальный K_{n-1} -значный спутник $\mathfrak{F}_{i_c}$, $c = 1, \dots, a$, f_{j_d} — минимальный K_{n-1} -значный спутник $\mathfrak{F}_{j_d}$, $d = 1, \dots, b$. По лемме 8

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = KF(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})),$$

$$\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = KF(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Для любой простой группы A значения спутников $f_{i_c}(A)$ и $f_{j_d}(A)$ принадлежат решетке $K_{n-1}|(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}$, $c = 1, \dots, a$, $d = 1, \dots, b$. Действительно, все непустые значения спутника f_{i_c} имеют вид

$$f_{i_c}(A) = K_{n-1}F(G/O_{A',A}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_{i_c}).$$

Но $\mathfrak{F}_{i_c} \in K_n|(\mathfrak{D}_\Sigma)^n\mathfrak{F}$ и при любом натуральном n для любой группы $G \in \mathfrak{F}_{i_c} \subseteq (\mathfrak{D}_\Sigma)^n\mathfrak{F}$ справедливо включение $G^{(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}_\Sigma$, а поскольку $\mathfrak{D}_\Sigma \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для всех $A \in \mathfrak{Z}$, отсюда следует, что $G^{(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}} \in \mathfrak{D}_\Sigma \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$. Следовательно, для произвольной группы $G \in \mathfrak{F}_{i_c}$ получаем, что

$$G/O_{A',A}(G) \cong (G/G^{(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}})/(O_{A',A}(G)/G^{(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}}) \in (\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F},$$

значит,

$$f_{i_c}(A) \subseteq (\mathfrak{G}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F},$$

и

$$f_{i_c}(A) \in K_{n-1}|(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}, \quad A \in \mathfrak{Z}, \quad c = 1, \dots, a.$$

Аналогично,

$$f_{j_d}(A) \in K_{n-1}|(\mathfrak{D}_\Sigma)^{n-1}\mathfrak{F}, \quad A \in \mathfrak{Z}, \quad d = 1, \dots, b.$$

Таким образом,

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(A) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(A)$$

для любых $A \in \mathfrak{F}$. Наконец, формации, определяемые спутниками $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, равны:

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Справедливость тождества (1) в решетке $K_n|_{(\mathfrak{G}_\Sigma)^n} \mathfrak{F}$ установлена.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть Σ — некоторое бесконечное множество простых групп, m и n — целые неотрицательные числа, $m \leq n$, $\mathfrak{S} \in K_n$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Sigma \mathfrak{S}$. Тогда множества тождеств решеток $K_n|_{\mathfrak{F}}$ и $K_m|_{\mathfrak{F}}$ совпадают.

Доказательство. Заметим, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Sigma \mathfrak{S} = (\mathfrak{D}_\Sigma)^n \mathfrak{F} = (\mathfrak{D}_\Sigma)^m \mathfrak{F}.$$

Формация $\mathfrak{G}_\Sigma$ является n -кратно канонической со спутником f таким, что $f(A) = \mathfrak{G}_\Sigma$ для всех $A \in \Sigma$ и $f(A) = \emptyset$ при $A \notin \Sigma$. Значит, по следствию 3 из [5], $\mathfrak{F} \in K_n$. Ввиду теоремы 1, множества тождеств решеток $K_n|_{(\mathfrak{D}_\Sigma)^n \mathfrak{F}} = K_n|_{\mathfrak{F}}$ и $K_m|_{(\mathfrak{D}_\Sigma)^n \mathfrak{F}} = K_m|_{\mathfrak{F}}$ совпадают. Следствие доказано.

Следствие 2. При любых целых неотрицательных m и n множества тождеств решеток K_m и K_n совпадают.

Доказательство. Можем рассматривать $K_n = K_n|_{\mathfrak{G}}$, $K_m = K_m|_{\mathfrak{G}}$. Выбирая в следствии 1 $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$ и множество $\Sigma = \mathfrak{F}$ всех конечных простых групп, получаем требуемое утверждение. Следствие доказано.

Список литературы

1. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга. *Дискретная математика* 2001 **13**, №3, 125–144.
2. Ведерников В. А., Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга конечных групп. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН* (2001) **2**, 217–233.
3. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
4. Грэтцер Г., *Общая теория решеток*. Мир, Москва, 1982.
5. Скачкова Ю. А., Решетки Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 85–94.
6. Скачкова Ю. А., Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 42–46.
7. Скачкова Ю. А., Решетки Ω -расслоенных формаций. В сб.: *Тезисы докл. III Международной алгебраической конференции в Украине*. Сумской госпедунив., Сумы, 2001, с. 251.
8. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*. Gruyter, Berlin, 1992.

Статья поступила 17.05.2004.